

快 报

奇异吸引子容量计算中的不收敛问题

王光瑞

陈式刚

郝柏林

(北京 8009 信箱) (中国科学院物理研究所) (中国科学院理论物理研究所)

1983 年 9 月 27 日收到

提 要

在用盒子计数法来计算奇异吸引子容量时,常常遇到收敛慢的问题,这是因为差分方程的周期与其相应的原微分方程的周期不同,以及阻尼因子的原因. 在积分过程中简单地减少时间步长的办法,不仅延长计算时间,而且会更阻止收敛. 正确的选择采样间隔可以克服不收敛问题. 我们给出强迫布鲁塞尔振子的数值研究实例,以说明上述结论.

奇异吸引子维数^[1]的最基本最直观的定义是柯尔莫哥洛夫容量. 设混沌运动相空间的维数为 n , 如果以边长为 ϵ 的 n 维小盒子去覆盖吸引子, 其中含有吸引子点集的盒子数为 N_ϵ , 则柯尔莫哥洛夫容量 d_c 的定义为: $d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln N_\epsilon / \ln \frac{1}{\epsilon}$. 如果系统的自由数 (即相空间维数) 未知, 测定吸引子的维数对判断混沌运动的机制是很重要的. Takens 提出了用单个观测量 a 的时间序列值 $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ 来计算维数的办法^[2]. 他证明了: n 维空间 (n 大于吸引子维数) 中的点集 $S_D = \{\langle a_i, \dots, a_{i+n-1} \rangle\}_{i=1}^\infty$ 与原流形有同样的维数. 但是当所构造的相空间的维数大于 2 时遇到了收敛慢的困难, 因而使 Takens 方法成为不现实的. Kaplan-Yorke 利用李雅普诺夫指数引入了另一种维数的定义^[3], 称为李雅普诺夫维数 d_L . 人们推测: 除了个别情况外 $d_L = d_c$. d_L 的计算比 d_c 容易得多, 因此人们期望用 d_L 的计算代替 d_c 的计算. 但是终究 d_L 与 d_c 是两种不同的维数概念, 即使为了证实 $d_L = d_c$, 也应设法把 d_c 算出来. 本文以强迫布鲁塞尔振子为例来讨论 d_c 计算中的收敛性问题.

Greenside 等人^[4]正确地分析了在高维相空间中计算容量时收敛慢的原因. 但对他们自己给出的关于 Lorenz 模型和 Curry 模型的不收敛的结果却没有作任何讨论. 其实, 从理论角度讲, 后者比前者更重要. 因为即使盒子计数法的收敛很慢, 只要增加计算量, 原则上还是能求得正确的结果, 不收敛则得不到任何正确的结果. 我们在强迫布鲁塞尔振子奇异吸引子维数的计算中也遇到了不收敛现象. 它也是在把吸引子流形嵌入高维空间时产生的. 因此可能与文献[4]中的不收敛性有同样的起因. 强迫布鲁塞尔振子模型中所包含的线性振子使我们对这个问题的分析可以大大简化, 并且使结论一目了然.

为了明确地定义维数, 应把强迫布鲁塞尔振子模型的方程

$$\dot{X} = A - (B + 1)X + X^2Y + \alpha \cos \omega t, \quad \dot{Y} = BX - X^2Y \quad (1)$$

写成自治形式. 从减少计算量的角度考虑, 最好应省去余弦计算. 因此我们采用了四变量的自治形式

$$\dot{X} = A - (B + 1)X + X^2Y + \alpha u, \quad (2)$$

$$\dot{Y} = BX - X^2Y, \quad \dot{u} = -\omega v, \quad \dot{v} = \omega u.$$

(2)式中 u, v 的运动独立于 X, Y , 初条件的选择将使奇异吸引子只存在于 (u, v) 平面的单位圆上. 所以只要用三维相空间就可以描述奇异吸引子. 轨线在 (u, v) 单位圆上的运动是已知的, 它对维数贡献 1. 为了尽可能好地利用计算机的容量, 应把已知的维数消去. 办法是只考虑轨线与和 (u, v) 平面坐标轴有固定夹角的 (X, Y) 平面的交点所构成的点集的维数. 这个点集相当于在(1)式的基础上用周期 $2\pi/\omega$ 采样所获得的点集, 它与嵌入的空间无关. 强迫布鲁塞尔振子模型在这个意义上在 (X, Y) 平面上定义了一个二维映象.

实际的计算总是把微分方程离散化成差分方程来进行的, 现在我们分析离散化所带来的影响. 如果对 u, v 的计算是完全准确的, 离散化相当于把微分方程(2)用某一组代数方程

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_n; A, B, \alpha, \omega, h), \quad Y_{n+1} = g(X_n, Y_n; A, B, \alpha, \omega, h) \quad (3)$$

来代替. 下标 $n+1, n$ 所标出的时间差一周期. (3)式除包含原方程的参数 A, B, α, ω 外, 还包含时间步长作为另一个参数. 利用(3)式可以产生一个与 h 有关的吸引子, 它可能与 $h=0$ 时的吸引子完全不同(大尺度的结构仍具有连续性), 但有确定的维数 $d_c(h)$. 当我们用盒子计数法来计算维数时, 只会出现收敛慢的现象, 而不会出现不收敛现象. 这时如果用(3)式的导数来计算李雅普诺夫维数, 则根据上面提到的推测, 应有 $d_L(h) = d_c(h)$. 在实际计算中, 我们不是直接用(3)式的导数, 而是用(1)或(2)式的线性化方程的某种差分方程来计算的, 这使等式只能近似地成立 $d_L(h) \simeq d_c(h)$. 总之, 尽管(3)式在 $h=0$ 和 $h \neq 0$ 时可能会给出完全不同的吸引子, 但是, 对于 $h \neq 0$ 的代数方程的迭代所形成的吸引子, 关于维数的算法和 $d_c = d_L$ 的推测同样成立, 我们仍然会得到满意的结果.

现在进一步, 把 u, v 也离散化, 情况就完全不同了. 例如, 若采用四阶 Runge-Kutta 方法, u, v 的差分方程为

$$u_{n+1} = au_n + bh\omega v_n, \quad v_{n+1} = -bh\omega u_n + av_n, \quad (4)$$

其中

$$a = 1 - \frac{1}{2}(h\omega)^2 + \frac{1}{24}(h\omega)^4, \quad b = 1 - \frac{1}{6}(h\omega)^2. \quad (5)$$

(4)式有解

$$u_n = \exp[n(\gamma + i\varphi)], \quad e^\gamma = \sqrt{a^2 + (bh\omega)^2}, \quad \sin \varphi = bh\omega / \sqrt{a^2 + (bh\omega)^2}. \quad (6)$$

它的周期为

$$T = Nh = \frac{N}{\omega} \left[\sin \frac{2\pi}{N} + \frac{1}{6} \left(\sin \frac{2\pi}{N} \right)^3 + \frac{1}{12} \left(\sin \frac{2\pi}{N} \right)^5 + \cdots \right], \quad (7)$$

并有一阻尼因子

$$e^\gamma = 1 - \frac{256}{144} \left(\frac{2\pi}{N} \right)^6 + \cdots, \quad (8)$$

其中 N 为一周期内的步数. (7) 式与微分方程的周期 $2\pi/\omega$ 有一微小的差别:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{120} \left(\frac{2\pi}{N} \right)^4. \quad (9)$$

容易看到, 如果对 u, v 的离散化所产生的周期变化和阻尼两种效应处理不当, 都会引起盒子计数法结果的不收敛. 例如, 如对离散化后的点集仍用微分方程的周期 $2\pi/\omega$ 去采样, 结果就相当于每次采样时采样平面要转动 $2\pi\Delta T/T = \frac{\pi}{60} (2\pi/N)^4$ 角. 当这种转动使采样点越出最小盒子线度 $\epsilon_{\min}$ 时, 就会出现类似于文献[4]中给出的 $N_{\min}$ 随采样次数不断增加的现象. 不过这种不收敛性是容易克服的, 办法就是不用 $2\pi/\omega$ 而用(7)式为周期去采样. 阻尼因子 $e^{N\gamma}$ 产生了更严重的问题, 它使原来定义在 u, v 平面单位圆上的运动逐渐地移向圆的内部, 最后使线性振子的振幅趋向零. 因此阻尼效应也使维数计算不收敛, 长时间的采样将使维数增加 1. 好在这个例子中阻尼效应的阶数较高, 用较小的步长就可以避免它的发生. 在 (X, Y, u, v) 空间中周期采样相当于 Poincare 映象. 文献[4]曾期望利用 Poincare 截面可以改善收敛性. 从上面的讨论可见, 如果计算仍在嵌入的高维空间中进行, 关键仍在于处理好高维空间的差分计算. 利用 Poincare 截面的好处只在于可以减少所需的计算机容量.

对强迫布鲁塞尔振子所作的数值计算证实了上述讨论. 当 $A = 0.4, B = 1.2, \alpha = 0.08, \omega = 0.852$ 时强迫布鲁塞尔振子作混沌运动. 如用每周期内步数 $N = 256$ 进行计算, 并每隔 $2\pi/\omega$ 时间进行采样, 则当采样到周期数 $N_T = 10^5$ 时就出现不收敛现象 (它与所选的 $\epsilon_{\min}$ 有关). 图 1 中 1, 2, 3, 4, 5 实线给出了不同 N_T 情况下的 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线, 它随 N_T 的增大越来越往上翘就是不收敛性的表现. 如果改用 $N = 128$, 则在 $N_T = 30000$ 时 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线就已上翘. 如果仍用 $N = 128$, 但改用(7)式去采样, 则在算到 $N_T = 70000$ 时, $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线在 $1/\epsilon_{\min}$ 处仍然比直线稍微偏低. 图中点划线 1' 与虚线 2' 给出了这两种不同采样法所得的 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 曲线. 在 $N = 128, N_T \sim 10^5$ 情况, 阻尼效应还不起作用, 可以不予考虑. 根

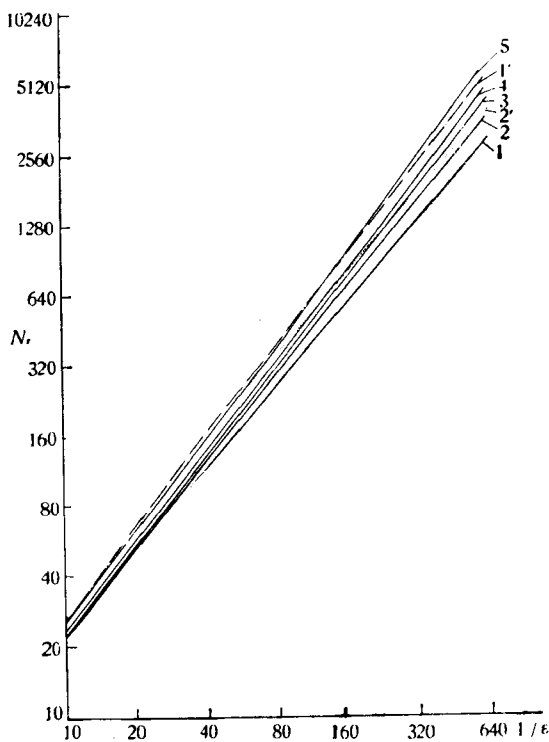


图 1

实线 1, 2, 3, 4, 5 分别表示 $N_T = 10400, 31200, 62400, 92400, 272400$ 时 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 关系. 点线 2' 表示按(7)式采样, $N_T = 30000$ 和 70000 时 (在 $\epsilon = 1/10, 1/20, 1/40, 1/80, 1/160, 1/320, 1/640$ 处 N_ϵ 分别为 23, 65, 160, 361, 817, 1839, 4021 和 24, 66, 161, 362, 819, 1862, 4148; 图中点线 2' 实际上代表此两条线) $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 关系; 点划线 1' 表示按 $2\pi/\omega$ 采样 $N_T = 30000$ 时 $\ln N_\epsilon - \ln(1/\epsilon)$ 关系 (图中为双对数坐标轴)

据 $N = 128$ 时用(7)式采样的计算结果得

$$d_c = 1.177 \pm 0.05, d_L = 1.15. \quad (10)$$

在误差范围内 $d_c = d_L$. 整个吸引子的维数还应加上 u, v 平面上的维数 1, 结果为

$$d_c = d_L = 2.15. \quad (11)$$

对 A, B, α, ω 取其他值时一些吸引子用 $N = 512$ 所作的计算表明, 到 $N_T \simeq 10^5$ 时不会出现不收敛现象. 关于这些计算结果的详细情况将另文发表^[5].

本文例子中离散化所遇到的三种效应对于盒子计数法的不收敛性具有典型意义. 根据对这个例子的分析, 如果要把一个给定的奇异吸引子的容量算准, 首先应该在准确的时刻采样(如果(2)式中 a_i 的测量准确). 这对于实验观测特别重要, 时间间隔的误差和漂移将会增加所算得的吸引子的维数. 其次, 所采用的计算方法不应该使得在嵌入的高维空间中沿新引入的方向产生运动. 克服了这种效应后, 就可以算得离散化后的代数方程的迭代所产生的点集的维数. 在 Takens 算法中, 这正是所期望获得的结果. 一般情况下, 当没有办法对差分方程进行分析时, 最简单的作法是缩小时间步长, 使得在 $N_{\min}$ 趋向稳定极限值的时间 t 处, 离散化引起的误差 $\Delta X(t), \Delta Y(t), \Delta u(t), \Delta v(t)$ 小于最小盒子的线度 $\epsilon_{\min}$. 这是一个自洽条件, 否则可能会遇到恶性循环: 高维空间采样点数剧增, 因此要大大延长计算时间, 而延长计算时间会使离散化误差所产生的不收敛性变得更为严重. 选用过小的步长确实会使高维空间中使用盒子计数法成为不现实的. 然而, 用足够多的采样点确能给出收敛的正确结果. 除了选用小步长外, 也可选用高精度的差分方程. 哪种办法好, 决定于总的计算量.

参 考 文 献

- [1] J. D. Farmer, E. Ott, J. A. Yorke, The Dimension of Chaotic Attractors (LA-UR-82-2856).
- [2] 参照文献[4]及其引文.
- [3] 参照文献[1]及其引文.
- [4] H. S. Greenside, A. Wolf, J. Swift and T. Pignataro, *Phys. Rev. A*, **25**(1982), 3453.
- [5] 王光瑞、陈式刚、郝柏林, 已送物理学报.

ON THE NONCONVERGENCE PROBLEM IN COMPUTING THE CAPACITY OF STRANGE ATTRACTORS

WANG GUANG-RUI

CHEN SHI-GANG

(P. O. Box 8009, Beijing)

(Institute of Physics, Academia Sinica)

HAO BAI-LIN

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The convergence of box-counting algorithm for computing the capacity of strange attractors is affected by the discretization procedure, because the period of the difference equations differs from that of the original ODE'S and, in addition, a damping factor appears. Simply decreasing the time-steps in the integration scheme not only costs more computer time, but also may deprive the convergence at all. The nonconvergence problem can be overcome by choosing at first a correct sampling interval. We give numerical evidence for what said above on the example of the periodically forced Brusselator.