

法国国立先进技术高等学校 对空泡现象的研究

(法) J. S. 达 罗 泽
G. L. 夏 伊 纳

中国造船工程学会
船舶力学学术委员会

序 言

本文扼要叙述了法国国立先进技术高等学校 (E. N. S. T. A.) (实际上是法国造船学院——译者注) 在空泡现象研究中取得的主要成果。这项研究工作是按照该校与试验设备和研究局 (D. R. M. E.) 签订的合同 (合同号 73/645, 75/006, 76/1104) 为加拿大国防研究所 (D. R. E. T.) 承担的。该项课题持续了八年, 已为五篇博士—工程师论文和一篇博士学位论文提供了素材。本文的对象是不专门从事空泡现象研究的专家。因此, 文中特别阐述了有关物理概念与所得结果。有赖于数学与计算技术不断发展所进行的验证工作还刚刚开始, 有关详情, 见文末列出的参考文献。

摘 要

在造船与其他工业部门关于高速流的概念中, 需要对空泡现象有充分的了解, 因为空泡会产生诸如剥蚀、噪声、性能降低等有害影响。文章叙述了法国国立先进技术高等学校自 1972 年以来围绕这一现象开展的工作。对气泡状空泡、涡空泡和超空泡等三种空泡现象进行了理论探讨与试验研究。

空泡状空泡气泡微观现象的分析占了文章的大部分篇幅。分别研究了球状与非球状变形 (第 2 章和第 4 章), 阐述了保持球状所需条件 (第 4 章第 3 节)。因此, 可以证明, 只有当空泡数及压力梯度与 1 相比均很小时, 气泡才会在无明显振动的情况下沿着流线运动, 尽管受到第三个条件的限制。工程师通常还是采用球形模型计算空泡噪声和剥蚀等。此外, 研究了粘性、表面张力、所含气体可压缩性规律、流体特性、压力场的变化等不同参数的相对重要性。量纲与渐近分析表明, 气泡振动期内粘性的影响很小, 表面张力只在气泡破裂的最后阶段发生作用。不过, 气泡内所含气体可压缩性规律起很重要的作用。试验中还取得了绝热压缩或恒温压缩性能完全不同的定量资料。通过对粘弹性特性的研究, 证明粘弹性对球状气泡产生的影响极小, 试验研究表明, 添加降阻聚合物将明显改变非球状气泡的特性 (在侧壁、自由表面附近或两壁之间的破裂), 在各种情况下, 聚合物添加剂的作用是保持球状。用高速摄影机 (20000 照片/秒) 进行试验, 可以精确测出非球状气泡的特性。因此, 在侧壁附近可以观察到朝侧壁方向的射流, 在自由表面情况下, 该射流沿相反方向离开, 附有一系列各种不同情况的照片。建立在渐近展开方法基础上的解析模型, 通过将问题简化为一组二阶微分方程的求解, 可以知道试验结果。

第 5 章讨论了超空泡流的渐近模型, 这对应于空泡数 Σ 小于 1 的情况, 不管物体形状如何, 空泡长度约等于 $1/\Sigma^2$, 精确长度只能用取决于物体形状的隐式公式求出。

在此情况下，容易求解反问题，得出了流动旁一定时的空泡长度和翼剖面形状。在渐近模型内，考虑了不同的尾流模型。空泡长度由物体阻力系数确定之，然后考虑了重力、刚性侧壁和自由表面等附加效应，重力的作用是缩短与流动傅氏数成正比的空泡长度，估算了一个或两个侧壁以及一个侧壁和（或：一个自由表面引起的空泡长度的修正值，得出了两壁间的极限间距，小于这一间距时，流动阻塞，空泡长度变成无限大。最后，提出了非定常超空泡水翼理论。

在空泡现象中，对涡空泡现象的认识最不充分，提出了几种近似理论方法，扼要介绍了现有的研究水平。得知空泡被旋涡俘获特性时间与涡心的初始距离的平方和包含物的密度成正比，而与涡空泡数成反比，根据理想流体条件，研究了涡空泡起始的条件，同时建立了一种生长模型，计算了与流动平行的旋涡情况下产生的轴向速度剖面，分析了粘性对空泡长度的作用，确定了不同空泡数时的空泡形状。

结论部份讨论了该校在两相流方面的研究趋势与研究目的。

1、 引 言

1. 1. 概论

大家知道，存在两种将液体变成气体的基本方法：

在恒压例如大气压下只需给液体加热，使其温度达到某一值，即沸点，或者在给定压力下的饱和温度。这一相位变化现象称为沸腾；

在恒温例如实验室温度下只需降低液体压力，使之低于某一极限值，即饱和蒸汽压力。这一相位变化现象称为空泡，是本文论述的主题。

由于这种区分法过于简单，故存在许多困难，例如：

a. 各种现象通常是互相关联的，因为要使液体变成气体，必须给液体以能量，其大小由蒸发潜热决定；

b. 上述定义不包括成核过程这一现象（即液体内部汽相的出现方式）。但是，这一现象涉及表面张力的影响。下面将要指出，表面张力的作用是使液—汽界面处的温度与压力值发生变化，因此，压力与温度饱和值不发生相位变化；

c. 相位变化现象有一个惯量，在“引言”简单描述中没有计及，在迅速减压或急剧升温时，惯量会使空泡延迟或沸腾减慢。

最后，由于空泡现象复杂，需要进行更精确的分析，并作十分详尽的描述。

通常认为，如果存在足以发生液—汽相位变化的局部减压，则流动是空泡现象的根源，特别是在高速流内设置一障碍物时会出现空泡。随着对空泡各种特性的认识加深，可在愈来愈多的场合下观察到这一现象，试举例加以说明：

舰船工程：水翼艇的升力面、高速螺旋桨、声纳发声面；

机电工程：水轮机主轴、泵、叶片振动作用下滑油剂空泡；

石油工程：石油高速运输过程中卸油管弯管 液化气体舱（例如油船）内的波动；

核子工程：快速中子反应堆中央，冷却管内结构底部液态钠的空泡；

土木工程：堤坝封闭闸和管道内、隔板后面的空泡。

在上述所有工程中，对流动的水动力研究证明，存在一些极低压区域，此系高速流

(相对障碍物而言)的腐蚀性或者外力(例如振动)产生的。

假若空泡不产生极其有害的后果,不必为空泡现象担心。按后果的严重程度,可举:

a. 空泡剥蚀

当急剧减压区内的气泡因在再压缩区内的流动产生对流时,这些气泡是汽-液反相变化现象的根源。气泡在再压缩时破裂,产生很强的压力脉冲。试验证明,当有侧壁时,随着气泡的破裂总会产生朝侧壁方向的微射流,其速度之快,足以使材料遭受很大损害。

b. 性能降低

空泡现象的存在限制了水翼艇翼剖面或螺旋桨叶上表面与下表面之间算出的压力差,因此,所用材料在性能上达不到设计要求。

c. 空泡噪声

每当再压缩区内气泡破裂(称之为破裂),总会发出很大的噪声,这就大大影响了机器运转状况听觉诊断方法的效果(例如沸腾声的分析是测定核反应堆事故的手段),明显降低了该方法的使用范围,从而给武器装备(例如潜艇螺旋桨)带来严重的损失。

上述空泡有害后果证明,多伦多国防研究所为什么要请国立先进技术高等学校对空泡机理进行基础研究,以便找到消除或延迟这一现象的方法。

1. 2 沿革

空泡现象的研究可以追溯到1859年,贝赞特(Besant)[1]提出了机理近似法,雷利(Rayleigh)[2]于1917年继续这一研究工作,从此,他的名字就和空泡机理近似法联系在一起。此后,特别是1940年以来,研究空泡的兴趣愈来愈浓,发表了大量论文和著作。纳普(Knapp),戴利(Daily)和哈密特(Hammit)(1970年)[3]的著作,以及普莱塞(Plesset)和普罗罗斯佩雷蒂(Prosperetti)(1977年)[4]的综合报告阐述了已经取得的成果。罗伯逊(Robertson)1969年在一篇文章中估计,已发表的有关空泡方面的文献已超过一万篇。

下面以年份为序简要介绍有关空泡现象基础研究的进展情况:

雷利(1917年)[2]研究了在给定水静恒压下,静止状态不可压缩理想流体内球形空穴消失产生的压力场,然后研究了空穴内气体存在的影响。

库克(Cook)和帕森(Porsons)(1916年)[9]推翻了关于接近破裂终止时流体不可压缩性的假设,提出了虚拟实心同心球(其给定半径极小)上气泡破裂会产生压力场的假设,根据这一假设可以计算其他作者称为"水锤压力"的破裂特征压力。

研究工作中断了二十余年。

赫林(Herring)(1941年)[7]对水下爆炸感兴趣,他研究了水下爆炸产生的气泡脉冲、海底和自由表面对这些脉冲的影响以及重心的作用。

比钦(Beeching)(1942年)[8]在雷利方程内加了对应表面张力和气泡内存在气体这两项。

西尔弗(Silver)(1942年)[3]精确计算了蒸汽压缩和热传导引起的与加热有关的热力学效应。

所有这些模型假设所研究的问题是球面对称,剥蚀是由增压或液体内的冲击波产生的。

科恩菲尔德(Kornfeld)和萨沃罗夫(Suvorov)(1944年)[10]在阐述侧壁剥蚀问题时,第一个提出破裂过程中有微射流存在。

科尔 (Cole) (1948 年) [11] 写出了不可压缩流体和可压缩流体内气泡增大的动态方程, 然后采用镜象法研究刚性侧壁或邻近自由表面的影响。

普莱塞 (1948 年) [12] 根据粘性研究了给定压力场内气泡半径的变化, 建立了著名的雷利—普莱塞方程 (详见第 2 节), 当气核在流动中移动时, 应用普莱塞理论需假设气泡沿流线运动, 他认为气泡半径的变化与流线上的压力变化直接有关, 从初步近似观点来看, 气泡不扰动总的流动。

纳普和霍兰德 (Hollander) (1948 年) [13] 于同年第一个开始了试验工作, 他们采用高速摄影技术证实破裂时存在很大的径向速度和加速度。

瑙尔汀 (Nolting) 和内皮拉斯 (Neppiras) (1950 年) [14] 第一个用雷利—普莱塞方程 [12] 对正弦压力场进行了数值计算, 他们指出, 气泡在破裂前的半径最大, 对一定范围内的气泡尺寸来说, 他们发现在唯一声循环过程中, 气泡会增大和破裂。

特里林 (Trilling) (1952 年) [15] 研究了含有绝热压缩理想气体的气泡破裂与回弹。他认为, 压力扰动以声速在液体中传播, 假设气泡内存在压缩波, 液体中存在膨胀波。

吉尔摩 (Gilmore) (1952 年) [16] 跟特里林不同, 他没有忽视小于声速的液体局部速度, 假定有一等熵压缩, 根据可压缩性重新写出雷利方程。

诺德 (Naude) 和埃利斯 (Ellis) (1961 年) [17] 在解析分析研究中, 首先用球面调和函数表示球形误差, 预报射流的形成, 然后通过高速摄影显示这一射流的形成。

自六十年代起, 空泡研究加速发展, 超声和两相流研究人员对空泡研究的兴趣愈来愈浓, 同时, 随着信息处理技术的进步, 研究人员可以用数值方法解决侧壁附近气泡表面的变形问题。

弗林 (Flynn) (1964 年) [18] 指出, 气泡可以在正弦压力场发生共振, 在导致破裂的多次循环及唯一声循环过程中气泡会增大。

弗洛舒茨 (Florschuetz) 和夏 (Chao) (1965 年) [19] 试图确定在什么条件下可以忽略热传导, 以研究气泡的动力学问题, 他们确立了惯性效应优于热传导效应的标准。

普莱塞和查普曼 (Chapman) (1969 年) [20] 利用有限差分法, 对理想流体内, 刚性侧壁附近的气泡破裂进行了数值研究, 他们阐述了射流的产生与发展。法国国立先进技术高等学校的勒努瓦 (Lenoir) 继续这一工作 [21], 他采用奇点法的变分公式。

米切尔 (Mitchell) 和哈密特 (1970 年) [22] 用 "标记与单元 (Markers and cells) 法" 研究了粘性流体, 同时计及了压力梯度内的气泡破裂情况, 阐述了射流。

费利克斯 (Félix) 和埃利斯 (1971 年) [23] 以及劳特博恩 (Lauterborn) (1972 年) [24] 用高能激光束 ($0.1 \sim 2$ 焦耳) 聚焦的方法制造气泡, 这样便有可能对气泡破裂进行极其精确的试验研究。他们继 "自然" 空泡后, 引入了 "声" 空泡和 "光" 空泡概念。

谢 (Hsieh) (1972 年) [25] 提出了一个关于非球形气泡动力学的新的近似理论方法, 他用变分公式求解问题, 为空泡研究发展开辟了新的道路, 此外, 他计及了伪球

形气泡的质量传递和热传导效应以及可压缩性效应。

1. 3 现状

自从对空泡进行了初步研究后, 半个多世纪以来一直存在三个基本问题。

- a. 什么是较好的模型与实物之间的相似定律?
- b. 怎样预报与限制空泡剥蚀?
- c. 可以用空泡噪声监听方法有效地预报空泡剥蚀吗?

1. 3 a. 相似

三十多年来, 人们认为, 如果保持空泡数 $\Sigma = \frac{(P_\infty - P_0)}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$ 相同, 则可实现模型与实物之间的相似关系。但是, 当比较同一翼型在不同装置内所得结果时, 情况并非令人满意 [26]。即便在同一装置内, 尺寸不同, 表面形状各异的相似翼型也是如此 [27]。在同一装置内, 同一翼型用不同试验方法所得结果之间的差异是有意义的。凯勒 (Keller) [28] 在 "1978 年空泡与多相流讨论会" 上提出的以雷诺数为函数的 Σ 曲线能清楚地说明这一问题。对所得结果的比较说明, 对同一雷诺数而言, 从一个装置到另一个装置, 空泡出现时的 Σ 数值增加十倍。

能阐述这些尺度问题的理由有三点, 它们之间多少有些关联, 第一是阿雷瓦里 (Arakeri) 和阿考斯塔 (Acosta) [29, 30] 阐述的边界层的影响; 第二是各空泡水筒之间的一系列不同便测量结果之间不一致 [31]; 第三是空泡核在空泡相似中的重要性。弄清这些空泡核在压力场内的分布及其特性是十分必要的。球面模型愈来愈被人重视, 至少在初步近似时是如此。人们都希望能尽快达到预期的目的, 球面模型具有易于分析的特点, 故在各类研究课题中是唯一实用的方法, 在初步近似时可以给出有用结果, 但不能用来计算受空泡剥蚀侧壁上的压力场。

1. 3 b. 空蚀的预报

空蚀是否由微射流冲击或者 (球面或非球面) 变形形成的局部激波所引起, 这是受空泡作用的机器制造者和使用者经常提出的问题, 因为至今对空泡破裂最终阶段微射流与邻近刚性侧壁之间相互作用的机理缺乏理论认识, 另一方面, 由于球面模型可以给出增压的度量级, 所以具有吸引力, 此外, 它还可以得出描述气泡介质的外插法, 这比孤立气泡更接近物理实际, 这一外插法已应用于声学空泡 [32]、水动力翼剖面附近的空泡 [33]。

1. 3 c. 空泡噪声

最后一个是空泡噪声, 它与前述两个问题有关, 但更为复杂。实际上, 总的噪声与空蚀速度之间, 给定能量声脉冲数分布与给定表面 "麻点" 数分布存在一种几乎线性的关系 [34]。但是, 目前还没有一种可以用声学方法从另一种气泡 (远离整个侧壁破裂) 区分 "空蚀" 气泡的方法。

上述仅涉及常见空泡范围, 有关其他新的应用, 需要对空泡气泡的动力学问题进一步加深认识。例如在液体内使用超声的工业上的应用。在此情况下, 空泡既是所求的又是有害的一种现象, 必须加强检查。第一类现象包括所要求的空蚀效应, 可以用来研究实验室的空泡剥蚀, 还可进行清洗、加工或作乳化剂使用 [35]; 第二类现象包括空泡对声纳的有害作用以及近来在医学中应用超声时发现的危险。

另一个空泡应用实例是用空泡清洗大面积表面（如船体...）或采掘水下岩石，这一方法先在水航公司实验室，后在其他实验室中应用〔36〕。埃利斯和斯塔雷特（Starrett）发明了一种利用水下放电器产生的大气泡射流的提取系统。



图1a. 螺旋桨空泡（巴黎船模试验水池）

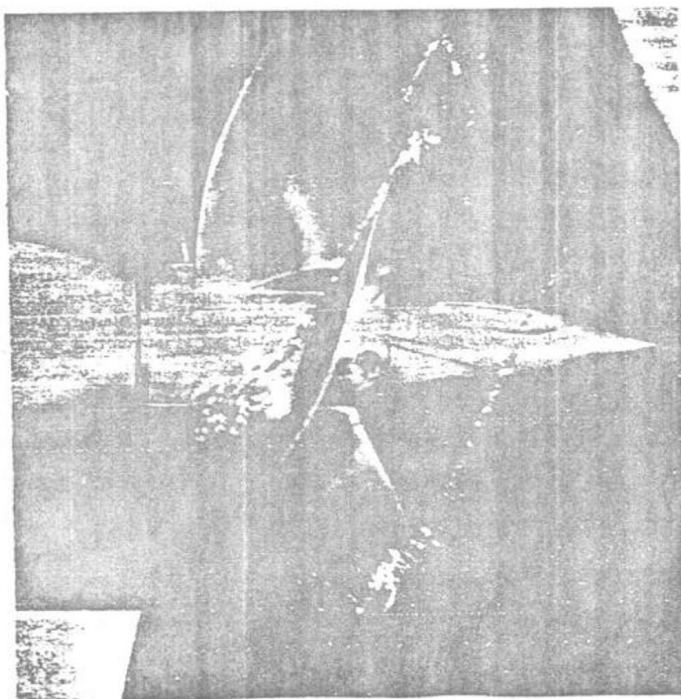


图1b. 螺旋桨空泡（巴黎船模试验水池）

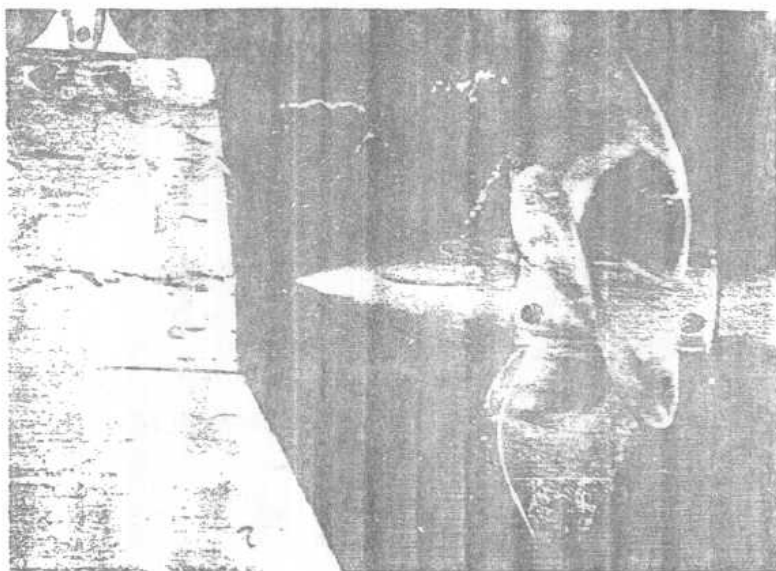


图 1c. 螺旋桨空泡 (巴黎船模试验水池)

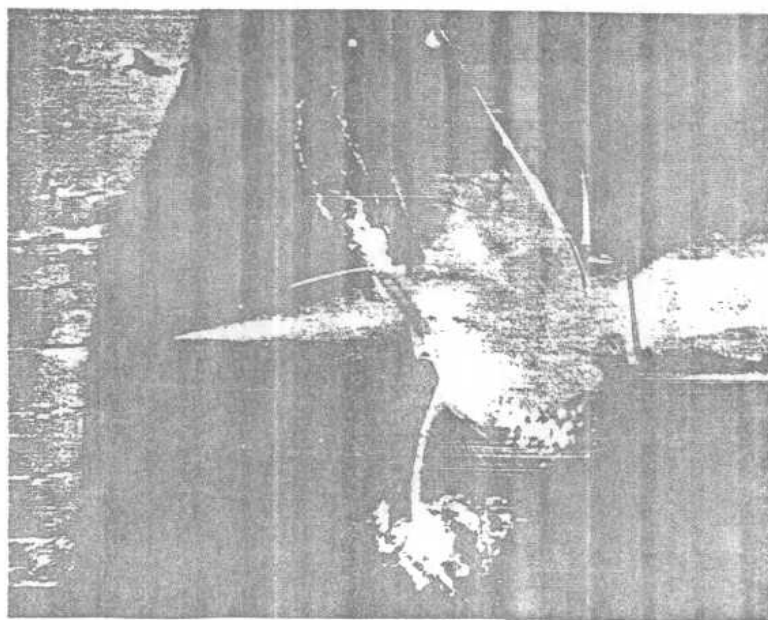


图 1d. 螺旋桨空泡 (巴黎船模试验水池)

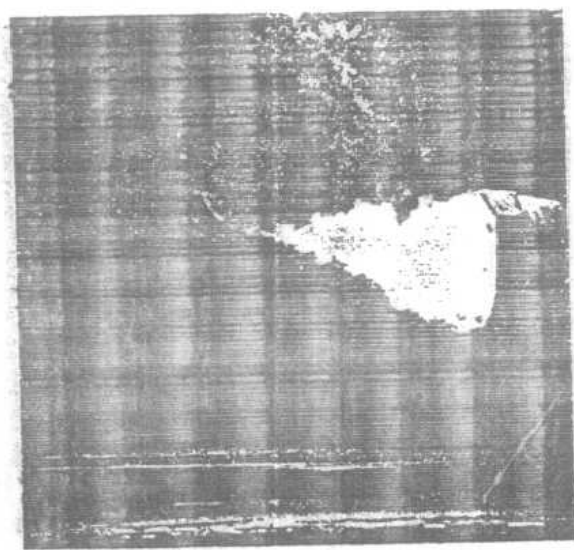
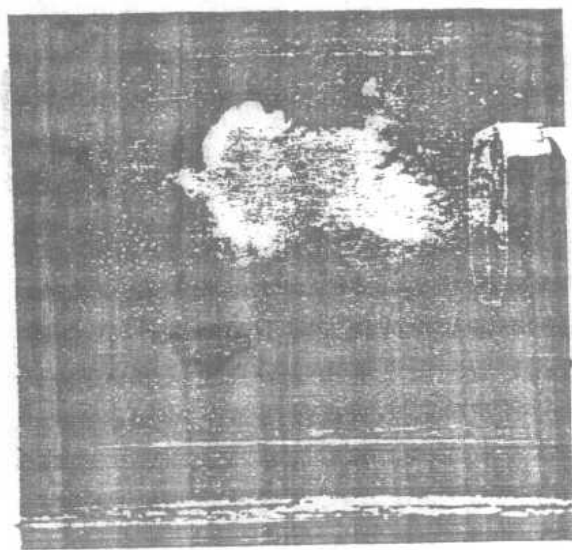


图2 换能器附近的空泡(勒布吕斯水下探测实验室)

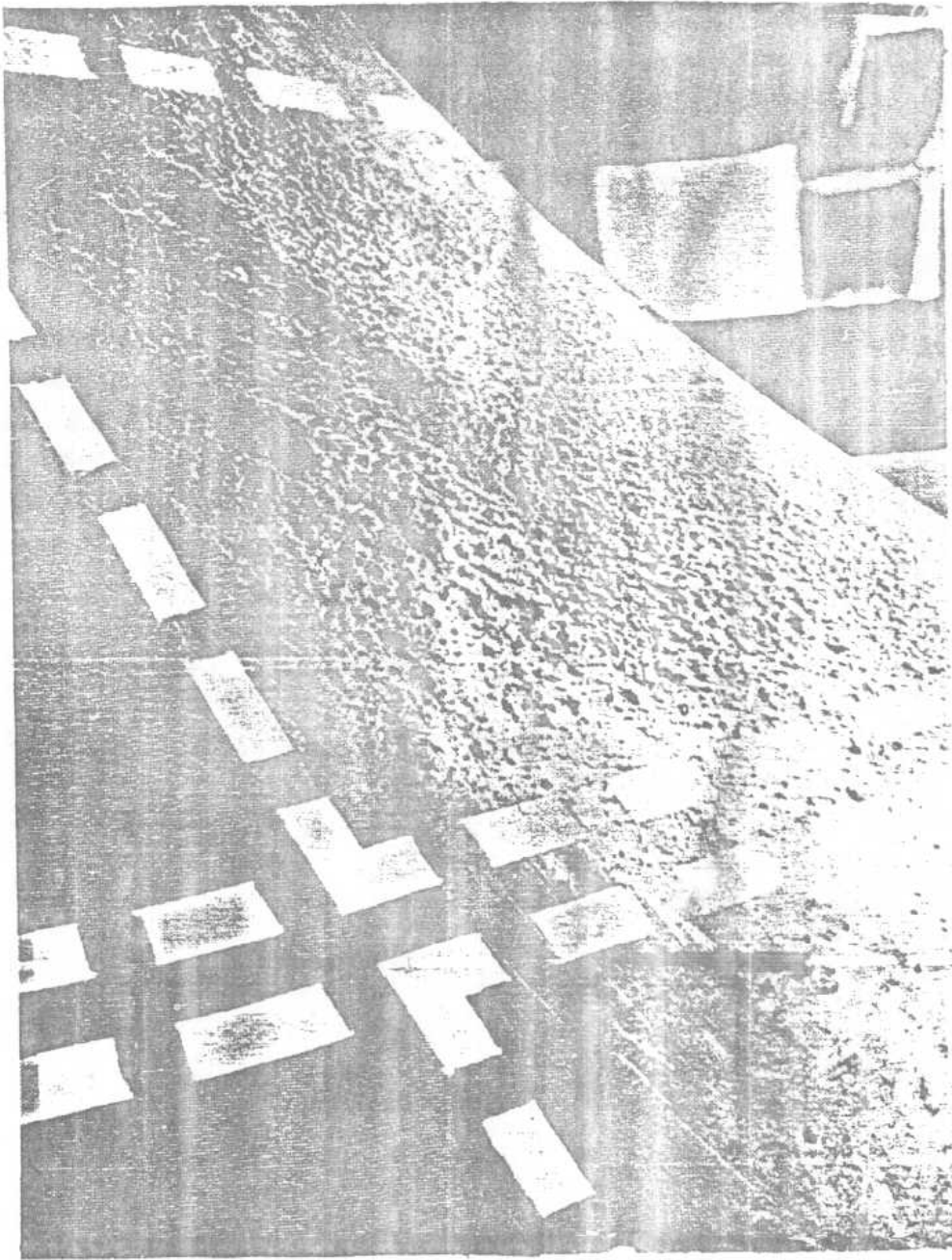


图 3 空蚀状况(巴黎船模试验水池)

2 球形气泡动力学基本理论

2.1 雷利—普莱塞方程

在所有未经专门处理的液体(如工业液体)内悬浮着大量微小气泡,这些气泡或者在液体与自由表面接触处,或者在流动中的对流混杂物上形成,它们是气体扩散现象的根源。当这些气泡进入高减压区时,它们确定液—汽相位变化现象的位置,这一现象发生在气泡核区域内〔38〕,而不是在液体内部,自发成核过程需要很大的减压。大家知道,释放出来的极其干净的液体能推迟相位变化现象(沸腾或空泡)的发生,这是不容忽视的。

由于空泡现象表示为减压区界面蒸汽形成时的小型气泡的增大,所以最初研究的重点是这些气泡在可变压力场内的特性,尽管雷利勋爵五十多年前已开始这类研究工作,至今仍有许多问题没有解决〔37〕。假设在无限远静止状态的介质内微型气泡总是发生变化,因为不存在不对称现象,所以认为气泡在运动时为球形。应该承认,如果推翻这一假设,必然使问题的解析分析极其复杂,在这方面唯一进行的研究涉及相对球形的微小变化〔39〕。

问题的提出

设在无限远静止状态介质内有一球状气泡,在无限远处,压力为 $P_{\infty}(t)$ 从初始时间的 $P_0 = P_{\infty}(0)$ 值开始随时间变化。

此外,在初始时间,气泡内含有压力为 P_0 的气体,其半径与介质内的气泡平衡相对应,为此,计划研究气泡半径随时间的变化 $a(t)$ 。

根据以气泡中心为原点的球面坐标 (r, θ, φ) ,可以迅速建立表示半径 $a(t)$ 变化的方程,实际上,只有径向速度 u_r 不为零。

不可压缩液体的连续方程可以写成:

$$(1) \quad 4\pi r^2 u_r = 4\pi a^2 \frac{da}{dt} \quad \text{soit } u_r = \frac{a^2}{r} \frac{da}{dt}$$

若考虑球面对称,动量方程写成:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - 2 \frac{u_r}{r^2} \right]$$

其中 ν 表示液体运动粘度, $P(r, t)$ 表示压力场。若用式(1)求出的值代替 u_r , 则得:

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \left[\frac{a^2}{r^2} \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{2a}{r^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{2a^4}{r^6} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right]$$

通过积分可得出压力场,特别是气泡 $r=a(t)$ 处的压力值是:

$$(3) \quad p(a) = P_{\infty}(t) + \rho \left[a \frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right]$$

界面处气泡 $r=a(t)$ 内外之间的法向应力平衡写成：

$$p_g + p_v - \frac{2\sigma}{a} = p(a) + \frac{4\mu}{a} \frac{da}{dt}$$

σ 表示表面张力参数, p_g 表示初始时间气泡内所含气体的剩余压力, p_v 表示饱和蒸汽压力。

设气体遵循多变压缩—膨胀规律, 可以写出方程式(4), 在气泡增大情况下, 变化很缓慢, 足以使温度达到平衡, 这是恒温 ($K=1$) 的情况。在破裂情况下, 发生绝热变化 $k = C_p/C_v$ 。

$$(4) \quad p_{g0} \cdot \frac{4}{3} \pi a_0^{3k} = p_g(t) \cdot \frac{4}{3} \pi a^{3k}(t)$$

此外, 初始时的平衡条件式写成：

$$p_g(0) = P_0 - p_v + \frac{2\sigma}{a_0}$$

由此用式(4)得出每个时间的 p_g 值。

用这些结果说明界面处法向应力平衡方程式时, 得出著名的雷利—普莱塞方程[12]

$$\rho \left[a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right] + \frac{4\mu}{a} \frac{da}{dt} = \left(P_0 - p_v + \frac{2\sigma}{a_0} \right) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3k} - P_\infty(t) + p_v - \frac{2\sigma}{a}$$

$$(5) \quad t=0 \quad a=a_0; \quad \frac{da}{dt}(0)=0$$

2.2. 拟静态平衡

第一篇阐述雷利方程的论文[2] 提出了拟静态平衡假设：半径为 $a(t)$ 时间内的气泡变化很慢, 相对时间的 $a(t)$ 的全导数可以忽略, 下节将要确定这一假设的有效范围。

雷利—普莱塞方程(5)简化为右端：

$$\left(P_0 - p_v + \frac{2\sigma}{a_0} \right) \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + p_v = P_\infty(t) + \frac{2\sigma}{a(t)}$$

对相应于初始平衡的每个 a_0 和 P_0 值而言, 上式可以描绘半径随每个时间 $P(t)$ 值的变化。

曲线 $P_\infty(a)$ 假定恒温情况下的值最小

$$(6) \quad a = a_c = \left[\frac{(P_0 - p_v + 2\sigma/a_0) 3 a_0^3}{2\sigma} \right]^{\frac{1}{2}}$$

该值称为空泡核的“临界半径”, 如果压力 P_∞ 的最小值 P_c 为

$$(7) \quad P_c = p_v - 4\sigma/(3a_c)$$

称为空泡出现时的“临界压力”，则可达到“临界半径”。

通常根据下述假设给特征量 a_0 和 P_0 定名： $P = P_0 < p_v$ 值是产生空泡所需的局部压力。事实上，这些量的估算是极其困难的。因为它们取决于初始压力 P_0 时的气泡半径初始值 a_0 （图4）。但是，在未经专门处理的液体内，存在大量尺寸不等的气核。目前，分析这些核的分布是许多试验研究的任务，现有的方法不是很精确，就是费用太贵，无法在工业部门使用。

此外，在这一简化研究中消除惯性项会掩盖两种现象。

a. 在局部压力小于 $P_0(a_0)$ 的区域内，如果初始半径 a_0 在这一区域内停留的时间不太长，则空泡不可能产生。

b. 在压力大于 P_0 的区域内，由于存在惯性现象，强大的再压缩可能使空化气泡突然消失，但是，在空泡效应中，重要的是空泡破裂，不是缓慢变化阶段。

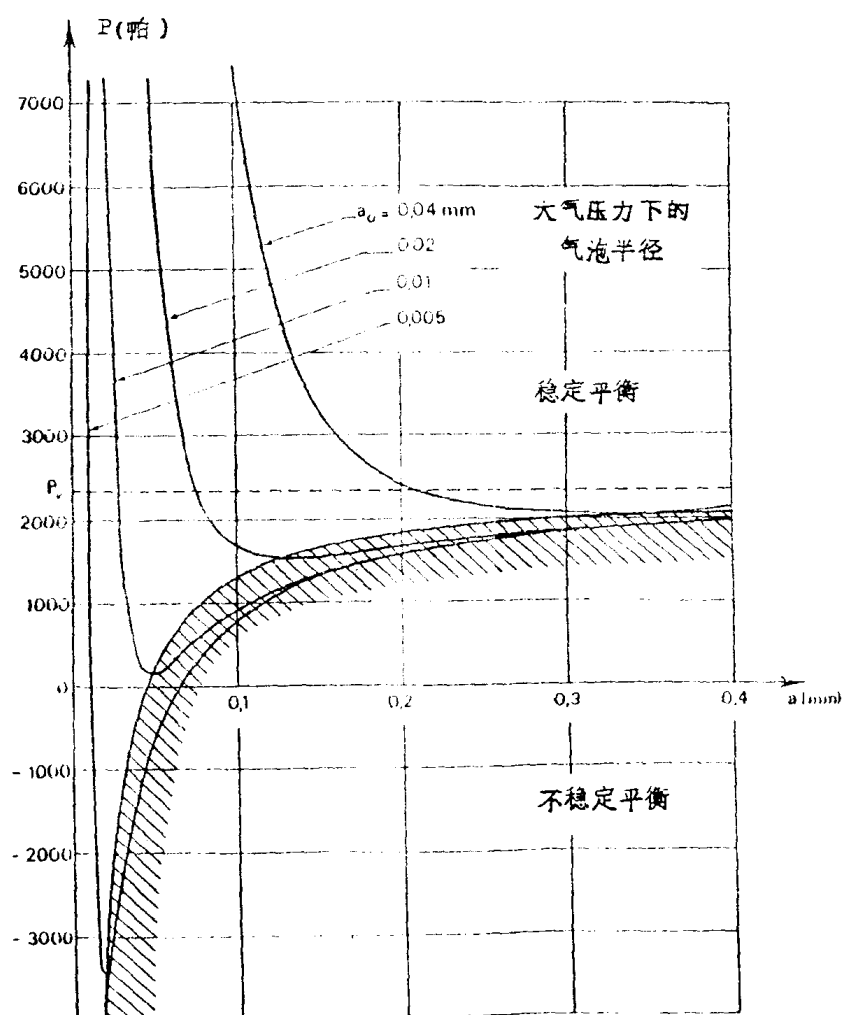


图4 气泡半径随压力的变化

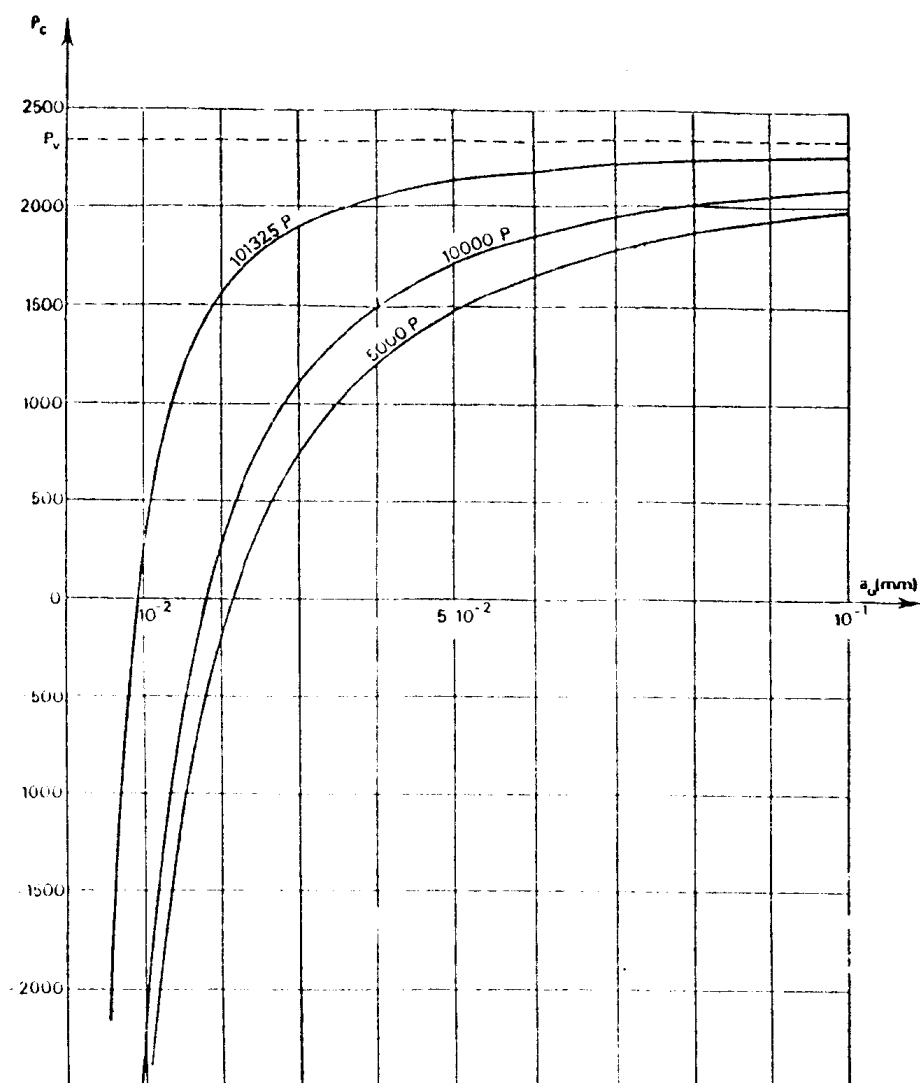


图 5 有三个初始压力值时的临界压力变化

由此得出，即使在对应无限介质内气泡的球面对称假设下，也必须精确分析雷利-普莱塞方程，研究工作分两方面进行：在解析方面，通过因次分析来确定预报可变压力场内气泡是否破裂的标准；在数值方面，全面分析了球状气泡在给定压力场内的精确变化。

2.3. 惯性效应对瞬时压力跃变作用下球状气泡变化的影响

图 6 示出了假定的压力场 $P(t)$ ，显然，由于变化发生在无限小的时标内及其惯性的作用，气泡不会发生瞬时变化。

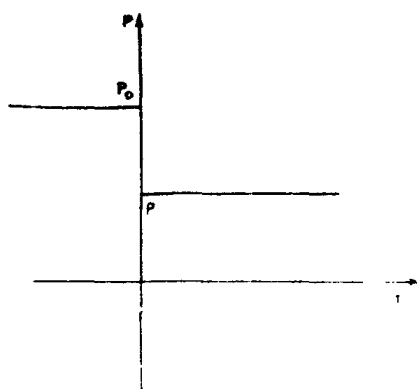


图 6

应该重新使用雷利—普莱塞完全方程(5)。该方程可以用无量纲数表示，取无限时间内气泡半径值 a_0 为长度单位： $a = a_0 R$ ，至今还未知的 T 值为时标， T 值将在下面确定之： $t = T\tau$ ，在恒温情况下得出：

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + (R^{-1}\dot{R}) = \mathfrak{G}\left(\frac{1}{R^3} - 1 + \alpha\right) + \mathfrak{W}\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R}\right)$$

$$(8) \quad t=0, R=1; \dot{R}=0$$

该表达式给出了下列无量纲数：

雷诺数：

$$iR = \frac{a_0^2}{4\nu T}$$

托马斯数：

$$\mathfrak{G} = \frac{(P_0 - P_v)}{\rho a_0^2} T^2$$

压差：(可为正或负)

$$\alpha = \frac{P_0 - P}{P_0 - P_v}$$

韦伯数：

$$\mathfrak{W} = \frac{2\sigma T^2}{\rho a_0^3}$$

据此，临界半径写成：

$$\frac{a_c}{a_0} = R_c = \sqrt{3\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{W}} + 1\right)}$$

上述无量纲数可以用特征时间比的幂表示。因此，引入粘性的特征时间：

$$\mathfrak{G}_v = \frac{a_0^2}{4\nu} \quad \text{或} \quad iR = \frac{\mathfrak{G}_v}{T}$$

它表示粘性影响起作用所需的时间；

表面张力的特征时间：

$$\tau_s = \sqrt{\frac{\rho a_0^3}{2\sigma}} \quad \text{或} \quad \tau_s = \left(\frac{T}{\sigma}\right)^2$$

它是表面张力对气泡运动起作用所需时间的数量级；

压力的特征时间：

$$\tau_p = a_0 \sqrt{\frac{\rho}{P_0 - p_v}} \quad \text{或} \quad \tau_p = \left(\frac{T}{\epsilon_p}\right)^2$$

它是初始半径为 a_0 的气泡在超压 $P_0 - P_v$ (雷利时间) 作用下振荡的特征时间。

如果这些特征时间不为同一数量级，则任何一种现象也不可能与另一种现象同时出现。因此，问题可以大大简化，因为根据特征时间按数量级分类，只存在唯一占优势的现象，即雷利—普莱塞方程内可以控制半径变化的唯一项。

但是，当其中两个特征时间相等，则可以同时出现两种现象，特别是：

$$\begin{aligned} \tau_v = \tau_s \quad \text{si} \quad a_0 = \frac{8\rho v^2}{\sigma} = R_* \\ \tau_s = \tau_p \quad \text{si} \quad a_0 = \frac{2\sigma}{P_0 - p_v} = a_1 \\ \tau_v = \tau_p \quad \text{si} \quad a_0 = \frac{4v\rho^{1/2}}{(P_0 - p_v)^{1/2}} = a_2 \end{aligned}$$

可以根据气泡半径的数量级 a_0 ，证实各种不同现象是否同时发生，特征半径 R_* 有很重要的意义，因为它只与液体的物理特性，即密度 ρ 、运动粘度 v 和表面张力 σ 有关。当 $a_1 = a_2$ 时，粘性、压力变化和表面张力这三种现象在半径变化过程中的作用同等重要，在 $a_1 = a_2 = R_*$ 情况下，当

$$P_0 - p_v = \frac{\sigma^2}{4\rho v^2} = P_*$$

时会发生。

R_* ， P_* 这两个力的作用很大，因为它们可以确定特征长度和取决于液体性质的特征压力，特别是对温度为 20 度的水来说，粘性、密度、表面张力和饱和蒸汽压力分别为米—千克—秒—安培单位的 10^{-6} ， 10^{-3} ， 10^{-1} 和 2337，从而给出数量级：

$$P_* = 5.10^5 \text{ 帕} \quad R_* = 2.10^{-7} \text{ 米}$$

一般来说， $P_0 - P_v$ 与 P_* 为同一数量级，但是，空泡核平均半径 a_0 远比 R_* 大，因此，对水来说，可以引入一个小参数

$$\epsilon = R_*/a_0$$

由于这一小参数的存在，可以对特征时间进行分类：

$$\tau_p = \epsilon^{1/2} \tau_s = \epsilon \tau_v$$

所以，当接近初始时间时，只有压力差控制气泡半径的变化，故取 $T = \tau_p$ ，得出：

$$\tau = 1 \quad (R^{-1} = \epsilon \quad \text{和} \quad \tau_s = \epsilon)$$

雷利—普莱塞方程写成。

$$(9) \quad RR + \frac{3}{2} \dot{R}^2 + \varepsilon \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{R^3} + \alpha - 1 + \varepsilon \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R} \right)$$

并用 ε 幂展开的形式求解： $\dot{R}(t, \varepsilon) = R_0(t) + \varepsilon R_1(t) + \dots$

$R_0(t)$ 是简化方程解：

$$(10) \quad R_0 \ddot{R}_0 + \frac{3}{2} \dot{R}_0^2 = \frac{1}{R_0^3} + \alpha - 1$$

$$R_0(0) = 1 \quad \dot{R}_0(0) = 0$$

如果所有变化发生在 $\mathcal{O}_P$ 时间内，半径始终大于 R_* ，则这一近似解 $R_0(t)$ ，即方程 10 的解总是有意义的。如果在 $\varepsilon^{-1/2} \mathcal{O}_P$ 时间以前没有达到新的平衡状态，则该解将失去意义，因为只有在超过这一时间后，表面张力现象才起作用。显然，若 $P < P_0(a_0)$ ，则这是可能的，因为在此情况下，不存在最终平衡状态。此外，该近似解 $R_0(t)$ 在气泡破裂终止时没有意义，因为在此情况下，气泡半径以无限速度趋向于零，约等于 R_* （为此需求解雷利—普莱塞完全方程）。

存在方程 10 的初积分：

$$(11) \quad \dot{R}_0^2 = \frac{1}{R_0^3} \left[\log R_0^3 + \frac{2}{3} (\alpha - 1) (R_0^3 - 1) \right]$$

若右端为正，则可对方程 11 进行类似于用经典力学研究小量运动及其稳性时的讨论情况根据函数展开用图 7a, b, c, d 表示。

$$q_1(R_0) = \log R_0^3 + \frac{2}{3} R_0^3 (\alpha - 1) - \frac{2}{3} (\alpha - 1)$$

只应保留正的部份。

若 $\alpha = 0$ ，则可能的唯一解是初始平衡。显然，由于在此情况下无限远处的压力不发生变化，这是完全合乎逻辑的。

若 $\alpha > 1$ （或 $P < P_0$ ），则不可能有最终平衡，气泡半径会无限增大，图 7 b 表明，当时间无限增加时，以增大恒速 $\dot{R}(\infty) \sim \frac{2}{3} (\alpha - 1)$ 保持渐近状态，半径随时间线性增大，从而表征相对于沸腾现象的空泡现象，这时平衡以外的渐近状态对应与 $\tau^{1/2}$ 成正比的半径的增加。