數學——它的內容方法和意義

（第三册）

宋甫鶴編譯

技術叢書出版社

數學——它的內容方法和意義

宋甫鶴編譯

技術叢書出版社

數學一它的
內容方法和意義
出 版 者：技術叢書出版社
地　　址：九龍青山道159號二樓
承 印 者：生生印刷廠
地　　址：九龍深水埗大埔道
六六五號地下

目　錄

第十五章　實變函數論

15-1　引　言

從歷史上來看，在 18 世紀末，19 世紀初，微分積分已具體而微地做出來了，一直到那個時期（實際上是經歷了整個 19 世紀）數學家們正從事於構架它的幾個分枝、正致力於發現更多更多新的事實、正發展着把微積分應用於力學、天文學、工藝學諸學問的問題等等更新更新的領域。時至今天，想概略瀏覽已獲得的成果、再有系統研究它們、進一步去深究分析學基本觀念的精義一事，已絕非空想之舉。然而緬懷過去的這一切，它與分析學基礎的冲擊，却有一頁道不盡的滄桑。

早在 18 世紀時期的數學家中，對於"函數是什麼？"已經有了歧見。不同的看法導致了長期在爭論着一個問題的這種解或那種解、以及由其所獲得的這個具體的數學結果或那個具體的數學結果，孰是孰非。逐漸地，數學家們體會到"函數"，及分析學上其它的一些基本的觀念，應該更加精確地建造，才不致引起混淆，甚至引出嚴重的錯誤。舉個往例來說，歷史上就曾因爲對連續性的意義及對連續函數的性質有不當的認識，而導出一大堆乖謬的敍述——其中一個居然是"一連續函數恆可微分"！

數學既然發展到處理如此複雜的函數，便不可以再信賴直覺與猜測。至此，實在有必要把"數學規定"（即定義）引入分析學的基本概念中。

第一個朝此一方向嚴肅的嘗試，首爲Lagrange 所作，其後Cauchy 循相同的途徑追隨之。Cauchy氏正確地建立起極限、連續性、積分等的定義，並不時地引用他自己給出的定義，因此它們才得殘存至今日。大約與Cauchy 相同的時期，捷克的數學家Bolzano 曾經對連續函數的基本性質作了一次極嚴格的探討。

且讓我們更詳細考察連續函數的下列性質：

假定有一個連續函數$f(x)$，定義在某一個區間［a,b］（指滿足不等式

$a\leqslant x\leqslant b$ 之一切數）上，從前的人們，認爲下列一事乃是極顯然的。

"若此函數在此區間的兩個端點上取得不同號的值（一爲正，而另一爲負），則它必在此區間中某一點處取得值0"。

但是，今天，此一事實則建立在一個嚴格的基礎上。用同樣的途徑，今天，人們已嚴格地證明了：

"定義在某一區間［a,b］上之一個連續函數，在某些點處，函數取得了它的最大值和最小值。"

爲了研究連續函數的這些性質，我們有必要更深入於實數的本性中。就如同實數論顯示的一個成果，數線（或謂標尺）的基本性質已經清楚地加以公式化了！

數學分析更進一步的發展，導致我們有必要研究更壞更壞的函數，特別是不連續函數。例如不連續函數竟常顯示爲一列連續函數的極限，然而並非先天上就知道此極限函數是否爲一連續函數，以及在此趨近過程中是否會造成如含一斷口形的函數。這便是一個新的引誘，就是推廣分析學的工具到不連續函數的討論。

黎曼（Riemann）氏曾研究下列問題：

"積分概念可推廣到什麼類型的不連續函數？"

就像此一分析基礎研究工作的結果一樣，引發了一個新的數學學門——單元實變函數論。

若古典數學分析操作那些根本上就是"好的函數"（如連續函數或可微分函數），則單元實變函數論便調查那些比"好的函數"更廣泛得多的函數。若數學分析中某種運算（例如積分）的定義，對於連續函數已經給出了，則單元實變函數論的特徵便是去找出什麼類型的函數使得此一定義也能延伸、適用？這定義應該如何修飾使得意味變得更廣義？譬如說，只有單元實變函數論，能夠對於"曲線的弧長是什麼？"以及"什麼樣的曲線談到弧長始有意義可言？"等問題給予一個令人心滿意足的答覆。

這種基礎，單元實變函數論所深深地建立在它上面的，便是名聞遐邇的"集合論"。

依照慣例地，在本書中我們由集合論上的元素描述作開始，其次轉至點集合的研究，而用實變函數論的一個基本概念——Lebesgue 積分——的說明、來結束本章。

15-2 集合

人們常常必需處理各類的物象群體，就如同在第一册中第一章已經解釋過的一樣，此一事實獲使"數"一觀念留傳下來並發展着，稍後再演變出"集合"一辭。這"集合"一語是原始的數學基本概念之一，並不需要給它下一個精密的定義，下列的評註只是用來說明集合是什麼，並非企圖想把它看成"定義"。

集合是對於循某一判斷準據或某一規則組合事物而成的一個聚集、總體、集團所賦給它的名字。一個集合的觀念起源於人類的一種抽象化的能力。藉着視某一物象集團爲一集合，我們不管形成此一集合的各個物象間的任何關聯和關係，但我們保持各個物象本身獨具有的特性。如此，由五個硬幣所組成的集合及由五個蘋果所組成之集合顯然不相同。但是，排列在一圓上的五個硬幣所成之集合，和用相同之硬幣排列成一個接一個鏈形狀所成的集合是相同的。

現便給出集合的一些例子：我們能說某一堆稻米的集合；太陽系一切行星的集合；在一明確時刻，處在某一屋內所有的人所成之集合；或者本書各頁所成之集合。而在數學中我們常常遇到各色各樣的集合，譬如，一所予之方程式的一切根所形成的集合，所有自然數所形成的集合，在一直線上的一切點所形成的集合等等。

數學諸部門中，研究集合的一般性質，即不依賴構成份子本身之性徵者，便稱做集合論。此一部門在 19 世紀末 20 世紀初便已開始嚴格地發展着。集合論的創建者爲德國的數學家G．Cantor．

Cantor氏在集合論上的工作，發源於探討三角級數收斂性的問題。極爲普遍地：常常本來是研究具體的數學問題，竟導至建造起一個極抽象且極一般性的理論。此種抽象的構架，它的價值在於：不僅同它發源處的具體問題有關，而且可更進一步地應用到許多其它的問題。特別對集合論來說，正是如此的一種情形。集合論的構想及觀念，差不多滲入一切的數學分枝中，而且把它們的面目完全改觀。因此不可能不熟悉集合論的基本知識，而竟可對當代的數學描述出適當的內涵。對於單元實變函數論而言，集合論尤具有偉大的意義。

當我們能夠判斷出對於任意給予的一個物象，是否屬於一集合時，這一個集合，便視爲已經給定。換言之，一個集合完全地由屬於它的物象所決定。若一集合M，僅由物象$a, b, c, \cdots\cdots$所組成，並且，不再由其它的物象所

組成，則我們記成

$$M = \{a, b, c, \cdots\}.$$

形成某一個集合的各個物象，通常便稱爲該集合的元素。"一物象m爲一集合M之一元素"皆爲一句眞實的敍述，便記成下列形式：

$$m \in M$$

讀成："m屬於M"或"m爲M之一元素"。若一物象n不屬於一集合M，則記成：$n \overline{\in} M$ 或$n \notin M$。對於一所予的集合而言，每一物象至多只能夠是它的一個元素；換言之，同一個集合內的一切元素，彼此互異。

一個集合M的元素，可以本身也是一個集合；但是爲了避免矛盾發生，方便上假定：任意一個集合M，不可以是它本身的一個元素，即$M \notin M$。

不包含任何元素的集合稱做空集合。例如，方程式：

$$x^2 + 1 = 0$$

的一切實根所成的集合爲空集合。此後，空集合都將以ϕ表之。

若有兩個集合M及N，M的每一個元素同時亦爲N的一個元素，則我們稱M爲N的一部份，或者說：M爲N的一個部份集合（或子集）、或M包含於N；記成下列形式：

$$M \subseteq N \qquad \text{或} \qquad N \supseteq M.$$

例如，集合$M = \{1,2\}$爲集合$N = \{1,2,3\}$的一部份。

顯然恆有$M \subseteq M$，方便上，可視空集合ϕ爲任何一個集合的一個子集。

兩個集合，若都是由相同的元素所組成，便稱此二集合爲相等。例如，方程式$x^2 - 3x + 2 = 0$的根所組成的集合，便與集合$M = \{1,2\}$相等。

現定義集合的運算法則於後：

聯集

假定$M, N, P, \cdots\cdots\cdots$皆爲集合，這些集合的聯集$X$，仍然是一個集合，它的每一個元素，至少屬於$M, N, P, \cdots\cdots\cdots$之中的某一個集合，以符號表示如下：

$$X = M \cup N \cup P \cup \cdots\cdots\cdots$$

這裡，一個元素$x \in X$甚至可以同時屬於好幾個原先的集合，但是在X中只算一個。

顯然有$M \cup M = M$而且若$M \subseteq N$則$M \cup N = N$。

交集

集合$M, N, P, \cdots\cdots$的交集Y，便是由那些同時屬於每一個（原先的）

集合M, N, P………的元素所組成的。以記號表成

$$Y = M \cap N \cap P \cap \cdots\cdots\cdots$$

顯然$M \cap M = M$，而且若$M \subseteq N$，則$M \cap N = M$。

若集合M與集合N的交集爲空集合，卽$M \cap N = \phi$，則我們說：它們不相交

集合的聯集和交集運算，我們亦常採用記號$\sum$與π，卽

$$E = \sum E_i \text{（有些書寫成} E = \cup E_i \text{）}$$

表示諸集合E_i的聯集。而

$$F = \pi E_i \text{（有些書寫成} F = \cap E_i \text{）}$$

表示諸集合E_i的交集。

讀者可自行驗證出集合的聯集和交集運算成立下列尋常的分配律關係：

$$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$
$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

差

兩個集合M、N的差Z仍爲一個集合，由那些屬於M、但是不屬於N的一切元素所組成，以記號表成：

$$Z = M - N$$

若$N \subseteq M$，則差$Z = M - N$亦稱爲N在M中的餘集

不難立卽驗出恆有下列關係式：

$$M \cap (N - P) = (M \cap N) - (M \cap P)$$
$$(M - N) \cup (M \cap N) = M$$

可見，集合的運算法則與尋常的算術法則有相當大的不同。

有限集合與無限集合

由有限多個元素所組成之集合，便稱爲有限集合。若一集合的元素個數並非有限多個，便稱爲無限集合。例如，所有的自然數所組成的集合，便是一個無限集合。

現考慮隨意的兩個集合M及N，問此二集合的元素個數是否相等？

若集合M是有限集合，那麼它的元素總體，可用一個自然數標出特徵，卽指明它的元素個數。在此種場合，欲比較M及N的元素個數，只需要計算M中元素的個數，並計算N中元素的個數，再比較這兩個數目便已足夠。自然而然地可推斷：集合M及N中，若一個爲有限集合，而另外一個卻是無限集合時，則無限集合較有限集合所包含的元素爲多。

然而，當兩個集合M及N都是無限集合時，則簡單的計數元素方法再也得不出什麼結果。因此緊隨而來的問題是：是否一切無限集合都有相同的元素個數？或者是在無限集合中也有元素較多、元素較少的差別存在？又若後一個問題的答案是肯定的話，無限集合中元素的個數又如何比較？我們現將把注意力移轉到這個問題上。

一對一對應

設M及N表示二個有限集合，倘若不得計算各集合中元素的個數，如何發現這二集合中那一個包含有較多的元素？朝此一目標，我們撮合M的一個元素及N的一個元素成爲一個偶對，如此偶對一個接一個地造下去，最後，若有M的某一個元素，不再有N的元素能與它撮合配成偶對，則M有較N爲多的元素。今用例子圖解此一論法於下：

假定在一間房子裡有某一數目的人及某一數目的椅子，想找出那一樣的數目較多時，只需規定一張椅子只能坐一人，請求每人找一張椅子坐下。若有某人無椅可坐時，便知道人數比椅子數多。若所有的人都坐下來了，而且所有的椅子也都坐滿了，那麼人數和椅子數一樣多。此種比較兩個集合元素個數的方法，勝過直接計算元素個數的方法，因爲它不需要接受任何修正，便可適用到有限集合或無限集合。

考慮所有自然數的集合

$$M=\{1,2,3,4,\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

以及所有的偶數集合

$$N=\{2,4,6,8,\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

那一個集合包含較多的元素？乍看之下，似乎是前一者。然而我們從這二個集合，可以形成許多偶對，如表1所示：

表 1

M	1	2	3	4	…
N	2	4	6	8	…

既無M的元素、亦無N的元素遺留下來而找不到配對。當然，我們也可以如表2一樣地形成偶對

表　2

M	1	2	3	4	5	…
N	—	2	—	4	—	…

則M有許多元素遺留下來而且未被配對。另一方面，我們也可以如表 3 一樣地形成偶對：

表　3

M	—	1	—	2	—	3	—	…
N	2	4	6	8	10	12	14	…

現在N有許多元素遺留下來而且未被配對。

如此，若A，B 皆爲無限集合，則不同的配對法導至不同的結果。但是倘若存在一種形成偶對的方法，使得A 的每一元素及B的每一元素均被配對成偶對，則我們說：在A 、B 之間可建立起一宗一對一的對應。例如由表 1 顯然我們可在集合M與集合N之間，建立起一宗一對一的對應。

若在集合A 與集合B之間，一宗一對一的對應可建立起來，則我們說它們有相等的元素個數。若對於形成偶對的每一種方法，A 總是有一些元素未能有B 的元素與它配成對，則我們說：集合A 包含較B 爲多的元素，或者，A 有一個較B 爲大的基數。

如此，對前面已提出的諸問題中的一個，我們現在已經知道如何比較無限集合的元素個數。儘管如此，然而這一回答却一點也沒有使我們更接近於另一個問題的答案：是否存在具有不同基數的多個無限集合呢？欲獲得此一問題的答案，且先來研究無限集合的一些簡單的類型。

可數集

倘若我們能夠在一個集合A 的一切元素，以及由一切自然數所形成的集合的一切元素，兩者之間建立起一宗一對一的對應，則我們說集合A 是可數的。換言之，一個集合是可數的，便是指出它的一切元素，可以用自然數數出來，即寫成下列敍列的形式：

$$a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, a_n \cdots\cdots\cdots$$

表 1 說明了一切偶數的集合爲可數的（表中上面一列可被看成下面一列

中對應數的足碼）

如此說來，可數集是無限集合中最小的一個：每一個無限集合包含一個可數的子集。

若兩個不是空集合的有限集合不相交，則它們的聯集包含的元素，較這兩個集合中的任何一個都多。但對於無限集合，這敘述不再成立。例如，設 E 爲一切偶數的集合，O 爲一切奇數的集合，Z 爲一切自然數的集合。如表 4 所示，集合 E 及 O 皆爲可數的。但是，集合 $Z = E \cup O$ 仍然又是可數的。

表　4

E	2	4	6	8	…
O	1	3	5	7	…
Z	1	2	3	4	…

"全量大於分量"一規則在無限集合已遭破壞的事實，說明了無限集合的性質在定性方面不同於有限集合的性質。從有限到無限的推移，其方法和有名的辯證原理完全一致，但是某些原來必定有的性質（如全量大於分量）却有了變化。

且讓我們證明：全體有理數的集合爲可數的。爲了此一目的，我們把有理數排列如表 5。

表　5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
1	2	3	4	5	6	…
0	-1	-2	-3	-4	-5	…
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	…
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	…
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	…
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{8}{3}$	…
…	…	…	…	…	…	…

此處所有的自然數按上昇順序排列在第一列，第二列中零及負整數按下降順序排列，在第三列中正的既約分數且以 2 為分母者依上昇順序排列，在第四列中負的既約分數且以 2 為分母者依下降順序排列等等。顯然，每一有理數在這表上出現一次且僅有一次。我們現便按箭頭指示的順序，把表中的一切數數下去。則一切有理數便排列成單一的一個敍列：

有理數所佔住的位置號數	$1,2,3,4,\ 5,6,7,\ 8,9,\cdots\cdots$
該有理數為：	$1,2,0,3,-3,\frac{1}{2},4,-2,\frac{3}{2},\cdots\cdots$

如此，我們已在一切有理數與一切自然數之間，建立起一宗一對一的對應。因此，全體有理數的集合是可數的。

具有連續體基數的集合

倘若在一集合M的元素與區間 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的點之間，可以建立起一個一對一的對應，則我們稱集合M具有連續體的基數。特別是，依本定義，線段 $0\leqslant x\leqslant 1$的點集合本身自然就具有連續體的基數。

由圖 1，顯然任何區間AB的點集合具有連續體的基數。這裡的一對一對應却是藉幾何射影建立起來的。

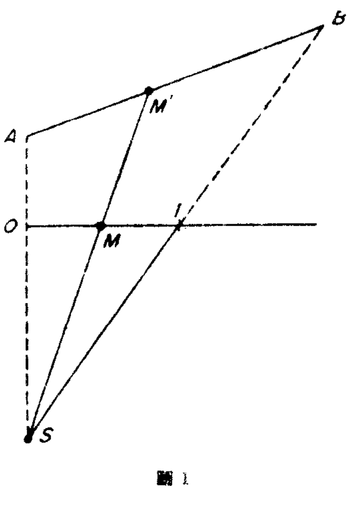

圖 1

不難證明任意一開區間$a<x<b$ 的點集合，與整個數線的點集合都具有連續體的基數。

下面的事實則更加有趣得多了：正方形$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 的點集合具有連續體的基數。粗略言之，便是正方形中的點與線段上的點一樣多。

15-3 實　數

"數"一概念的發展已在第一册第一章中有詳盡的描述。這裡我們將給讀者簡單的介紹一下 19 世紀中，和分析基本概念的基礎有關的實數理論。

(1)有理數

假定讀者對有理數的主要性質已經熟悉。不用再深入細節，回憶一下那些熟知的性質。所謂有理數便是形如m/n的數，這裡m 及n 皆爲整數且$n\neq 0$，它們形成一個數集，並且在這數集上兩種運算（加與乘）已有定義。此二運算服從一堆定律（即公理）。下面中，a, b, c 表有理數。

Ⅰ　加法公理

1.交換性：　$a+b=b+a$

2.結合性：　$a+(b+c)=(a+b)+c$

3.反運算的存在性：方程式$a+x=b$恆有唯一解。

由這些公理立刻得知式子$a+b+c$ 具有唯一的一個意義，又知存在一個有理數 0 使得$a+0=a$，此外也知加法有反運算（即減法）使得式子$b-a$有意義。

如此，從代數的觀點，全體有理數在加法運算之下，形成一個可換群。

Ⅱ　乘法公理

1.交換性：$ab=ba$

2.結合性：$a(bc)=(ab)c$

3.反運算的存在性：方程式$ay=b$(但$a\neq 0$) 有唯一解。

從這些公理立刻得知式子abc 具有唯一的一個意義，及知道存在一個有理數 1 使得$a.1=a$，此外也知道對不同於 0 之有理數，反運算（即除法）存在。全體異於 0 的有理數在乘法運算之下，形成一個可換群。

Ⅲ　分配公理

1.（$a+b$）$c=ac+bc$

公理Ⅰ至Ⅲ表示在加法運算及乘法運算之下，有理數形成一個所謂的"代數體"

Ⅳ　次序公理

1.對於任意兩個有理數a及b，下列三個關係中，有一個且僅有一個能成立：$a<b$ 或 $a=b$ 或 $a>b$.

2.若$a<b$ 且 $b<c$ 則 $a<c$

3.若$a<b$ 則 $a+c<b+c$（加法的單調性）

4.若$a<b$ 且 $c>0$ 則$ac<bc$（被$c>0$乘的單調性）

把這些公理放在一起，我們便可稱有理數集合為一有序體

除開有理數集合外，也存在其它的系，它們也都滿足這些公理，因此自然也為有序體。

現在敍述有理數的兩個重要的性質於後：

稠密性：對任意兩個數a, b 若$a<b$，則至少存在一個數c使得$a<c<b$。

可數性：全體有理數的集合為可數的（見§2）.

(2)量的測度

在數學中，處理許多量的測度工作上，僅有有理數已不夠用之事實甚為明顯。最簡單的幾個例子之一舉出於下，考慮區間長的測度問題。

取一有向線，原點（即 0 ）及標尺單位都給出之後，那麼，一線段OA，其端點在 1/2,1/3,2/3,−1/3 處之長，自然極清楚。更一般地：對於每一有理數a, 可在此線上標出一點a, 就是座標為$x=a$之點。在此情況，數a 決定有向線段OA 的長度。可是，在此構架中，並不是每一線段都以一有理數作為它的長度測度。例如，古希臘人已經知道以單位長為邊之正方形的對角線不能用任何有理數來測度。這種情形的自然成果就是在數與長度之間一對一對應的建立，即數觀念的一個更遠的推廣。

(3)實數

至此獲得的結論是：僅僅有理數不夠用來測度許多量，而且數的觀念必需推廣，使得在數與線上的點，兩者之間能有一宗一對一的對應。默記此一目標於心中，今試一試看看：是否決定數線上隨意一點的位置，僅藉有理點一事並非常為可能。在有理數的範圍中，類似於此的構架，將引導我們到所謂實數的觀念。