

原子核內軌道角動量分佈與核密度的進一步探討*

楊 立 銘

劉 漢 昭

(北京大學物理系)

(南開大學物理系)

一. 導 言

原子核內的密度分佈直接地或間接地與許多實驗聯系着^[1]。一個較可靠的核密度分佈顯然將有助於核模型理論的進一步發展^[2]。近來曾有不少人企圖從與核內電荷直接有關的實驗來確定核內分佈^[3,4]。這些實驗不外是荷電粒子被原子核的散射，或在核附近及核內部運動着的荷電粒子的輻射。這些荷電粒子最好是已知它們與核子間作用力除了電磁力外就非常小。這樣就迴避了我們對其他作用力不清楚的困難。電子與 μ 介子正符合這要求。由這些實驗定出來的核密度分佈與作者之一（楊）前所確定的很相近^[1,5]。在上一文中曾根據殼層結構理論所給出的核內核子的軌道角動量與密度間的聯系^[5-9]，指出正確核密度分佈應滿足一些條件；其所給出的核密度分佈只是近似的。本文企圖更準確地利用這個聯系與更充分地利用殼層理論所供的數據。這一目的是通過對前由費米所給出的積分方程^[5]作更仔細的考察而達到的。我們已將這一非線性積分方程轉變為線性的，求出它的精確解，並為實際應用設計一些近似解法。最後又利用已知原子內電子的分佈，驗證了這個近似法的一部分。

我們還沒有應用這一方法具體計算原子核內的核子密度。因為一方面這個計算是比較繁重的，同時我們覺得在計算前應當考慮到本文的出發點（基本方程(2)）的近似性與應有的修正，如庫倫力，交換項與自旋軌道耦合能的影響等。

我們還可注意到本文的出發點——密度與軌道角動量間的關係——是與

*1955 年 5 月 21 日收到。

1) 在這一工作中所確定的核密度分佈，尚有一未定常數。我們已用中能電子散射實驗數據決定這一常數，並與高能電子散射數據及其他實驗比較。詳情另發表。

粒子間作用力無關的。但在利用本文方法綜合殼層理論、電子散射、 μ -介原子 X-光譜等實驗數據求得較為可靠的密度 $\rho(r)$ 後，便可求得核子在核內的平均位能 $\varphi(r)$ ，

$$\varphi(r) = \int F(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho(r') d\mathbf{r}',$$

如果核子間平均作用能 $F(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ 是已知的。反之，如果 $\varphi(r)$ 為已知的，便可求得 $F(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ，而 $\varphi(r)$ ，按其物理意義，是與原子核光學模型中^[10]所決定的核子在核內平均位能的實數部分相同的。當然由 $\rho(r)$ 與 $\varphi(r)$ 得到的 $F(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ 只是核子間作用能的某種統計平均。

二. 費米積分方程的線性化及其解

試考慮一含 N 費米子的多體系（如原子中的電子或原子核內的核子），其中湯費模型的基本要求是被滿足的。令 $\rho_N(r)$ 表距中心為 r 處的密度， $P_N(r)$ 表在 r 處的粒子的最大動量， $K_N(r) = P_N(r)/\hbar$ ，則按湯費模型應有：

$$\rho_N(r) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{P_N(r)}{\hbar} \right)^3 = \frac{1}{3\pi^2} (K_N(r))^3. \quad (1)$$

又如以 $n_N(L)dL$ 表軌道角動量在 $L\hbar$ 與 $(L+dL)\hbar$ 間的粒子數，則按費米

$$n_N(L) = \frac{4}{\pi} \cdot L \int \sqrt{(rK_N(r))^2 - (L)^2} \frac{dr}{r} \quad (2)$$

積分區域是指 $(rK_N(r))^2 - (L)^2 \geq 0$ 的區域。顯然 $\rho_N(r)$ 應滿足歸一化條件

$$\int_0^\infty \rho_N(r) 4\pi r^2 dr = N. \quad (3)$$

若對於一定的 N 能從實驗求得一 L 的連續的函數 $n_N(L)$ ，則 (2) 式可視為 $K_N(r)$ 的非線性積分方程。要將這方程線性化，我們首先注意各函數的性質。 $\rho(r)$ 與 $K(r)$ 在 $0 < r < \infty$ 間是 r 的正的單值連續函數，具有高級微商，在 r 大時急速地趨於 0。在 $r = 0$ 處假定 $rK_N(r) = 0$ （這在原子內與在原子核內都是對的），這樣 $rK_N(r)$ 在 r 大或 r 小時皆趨近 0。在 $r = r_m$ 時 $rK_N(r)$ 有極大值 $= r_m K_N(r_m)$ 。這個極大值也決定了 L 的極大值 L_m ：

$$L_m = r_m K_N(r_m). \quad (4)$$

當 $0 \leq L \leq L_m$ 時， $n_N(L)$ 將是 L 的正單值連續函數，且具有高級微商。當 $0 \leq L \leq L_m$ 時，令 (2) 式中積分上下限各為 r_2, r_1 ，顯然 $r_1 < r_m < r_2$ 。(2) 式

積分可分為兩項；第一項從 r_1 積到 r_m ，第二項從 r_m 積到 r_2 ；在每一項中被積函數都是單調的，因此可引進反函數，令

$$\xi = L_m^2 - (r K_N(r))^2 \equiv \phi(r), \quad (5)$$

則 $\phi(r)$ 在 $r=r_m$ 處有極小值 $\phi(r_m)=0$ （見圖 1）。在 $0 < r < r_m$ 時， $\phi(r)$

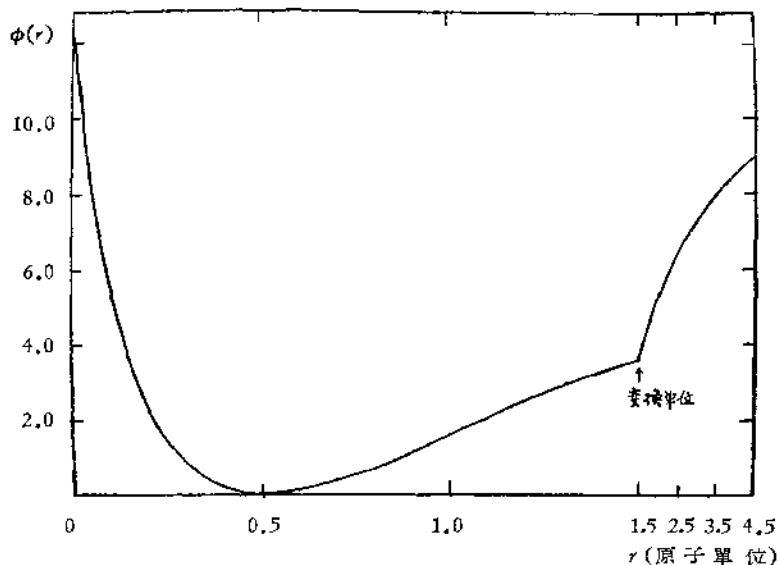


圖 1

為單調減少；在 $r_m < r < \infty$ 時， $\phi(r)$ 為單調增加。設

$$\left. \begin{aligned} \phi(r) &= \phi_1(r), & 0 < r < r_m \\ \phi(r) &= \phi_2(r), & r_m < r < \infty \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(r) &\xrightarrow{r \rightarrow 0} L_m^2, & \phi_1(r_m) &= \phi_2(r_m) = 0, \\ \phi_2(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} L_m^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由 (6) 可得單值單調反函數 $\phi_1^{-1}(\xi)$ 與 $\phi_2^{-1}(\xi)$ 如下：

$$\left. \begin{aligned} r &= \phi_1^{-1}(\xi), & 0 < r < r_m, \\ r &= \phi_2^{-1}(\xi), & r_m < r < \infty; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^{-1}(\xi) &\xrightarrow{\xi \rightarrow 0} r_m, & \phi_2^{-1}(\xi) &\xrightarrow{\xi \rightarrow 0} r_m, \\ \phi_1^{-1}(\xi) &\xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2 - 0} 0, & \phi_2^{-1}(\xi) &\xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2 - 0} \infty. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

再令
$$L^2 = L_m^2 - x, \quad 0 \leq x \leq (L_m)^2, \quad (10)$$

則
$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(r K_N(r))^2 - (L)^2} \frac{dr}{r} = \int_{r_1}^{r_m} \sqrt{x - \xi} \frac{dr}{r} + \int_{r_m}^{r_2} \sqrt{x - \xi} \frac{dr}{r}$$

$$= \int_0^x \sqrt{x - \xi} \mu(\xi) d\xi;$$

其中
$$\mu(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left(\log_e \frac{\phi_2^{-1}(\xi)}{\phi_1^{-1}(\xi)} \right). \quad (11)$$

令
$$f(x) = \frac{\pi}{4} \frac{n_v(L)}{L} = \frac{\pi}{4} \frac{n_v(\sqrt{L_m^2 - x})}{\sqrt{L_m^2 - x}}, \quad (12)$$

則 (2) 式變為

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{x - \xi} \mu(\xi) d\xi. \quad (13)$$

這樣便將 (2) 式線形化了。(13) 式屬於福爾泰拉 (Volterra) 第一種線性積分

方程。根據 $\phi(r)$ 函數的性質, 可知 $\log_e \frac{\phi_2^{-1}(\xi)}{\phi_1^{-1}(\xi)}$, $\mu(\xi)$, $f(x)$ 各具有下列性質

(見圖 2, 3, 4):

在 $0 < \xi < L_m^2$ 時, $\log_e \frac{\phi_2^{-1}(\xi)}{\phi_1^{-1}(\xi)}$ 為一正單調連續函數且具有高級微商:

$$\log_e \frac{\phi_2^{-1}(\xi)}{\phi_1^{-1}(\xi)} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0, \quad \log_e \frac{\phi_2^{-1}(\xi)}{\phi_1^{-1}(\xi)} \xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2 - 0} \infty. \quad (14)$$

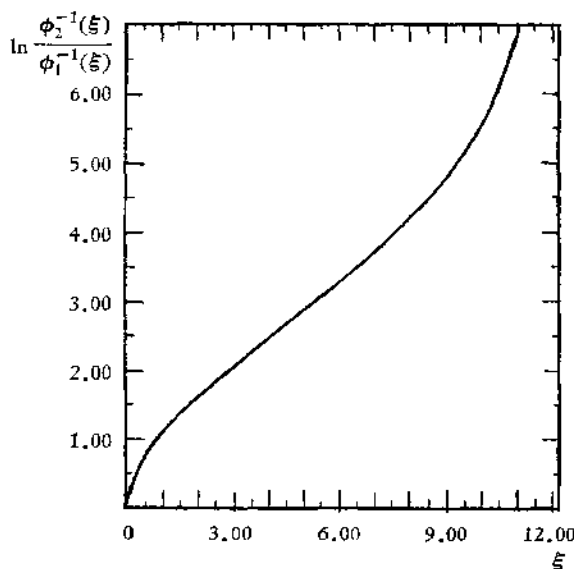


圖 2

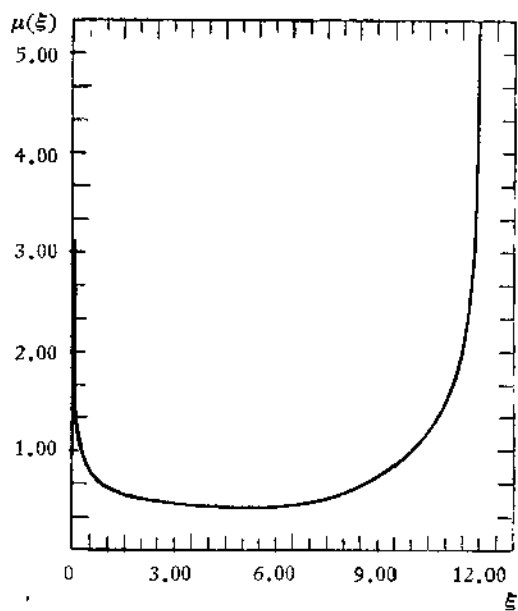


圖 3

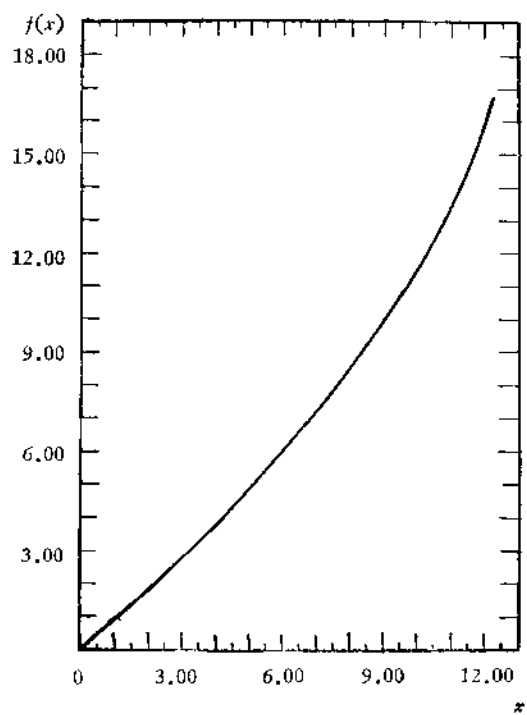


圖 4

$$\begin{aligned} \text{又因 } \phi_1^{-1'}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} -\infty, \quad \phi_1^{-1'}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2-0} -\infty^1), \quad \phi_2^{-1'}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} +\infty, \\ \phi_2^{-1'}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2-0} +\infty, \end{aligned} \quad (15)$$

所以在 $0 < \xi < L_m^2$ 時, $\mu(\xi)$ 為一正連續函數。在邊界上

$$\mu(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0+} \infty, \quad \mu(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2-0} \infty. \quad (16)$$

另外,由定義 (12) 知道 當 $0 \leq x < L_m^2$ 時 $f(x)$ 必為 x 的正連續函數且具高級微商。(13) 式的解可證明為下式 (見附錄 1):

$$\mu(\xi) = \frac{2}{\pi} \frac{f'(0)}{\sqrt{\xi}} + \frac{2}{\pi} \int_0^\xi \frac{f''(x) dx}{\sqrt{\xi-x}}. \quad (17)$$

若 $f(x)$ 能從殼層理論得到,則由費米積分方程直接解出的是 $\mu(\xi)$, 而不是 $K_N(r)$ 或 $\phi(r)$, 得到 $\mu(\xi)$ 後, 由 (11) 與 (14) 可得

$$\log_e \frac{\phi_2^{-1}(\xi)}{\phi_1^{-1}(\xi)} = \int_0^\xi \mu(x) dx, \quad (18)$$

$$\text{亦即} \quad \phi_2^{-1}(\xi) = \phi_1^{-1}(\xi) \exp \left\{ \int_0^\xi \mu(x) dx \right\}. \quad (18)'$$

至此我們只能求出 $\phi_2^{-1}(\xi)$ 與 $\phi_1^{-1}(\xi)$ 間的比, 還不能直接找到 $\phi(r)$ 。但我們應不要忘記 $\phi_2^{-1}(\xi)$ 與 $\phi_1^{-1}(\xi)$ 是同一原函數 $\xi = \phi(r)$ 的兩個支的反函數。從物理考慮, 對 $\phi(r)$ 的連續性與可微分性的假定是完全合理的。這樣在 $r = r_m$ 處, $\phi(r)$ 應具有連續的高級微商。 $\phi(r)$ 可在 $r = r_m$ 點展開:

$$\xi = \phi(r) = \frac{\phi''(r_m)}{2!} (r - r_m)^2 + \frac{\phi'''(r_m)}{3!} (r - r_m)^3 + \dots. \quad (19)$$

由此得

$$r - r_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \xi^{n/2}, \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_2^{-1}(\xi) &= P(\xi) + \sqrt{\xi} Q(\xi), \\ \phi_1^{-1}(\xi) &= P(\xi) - \sqrt{\xi} Q(\xi); \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\text{其中} \quad P(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \xi^n + r_m, \quad Q(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \xi^{n-1},$$

1) 就原子中電子分佈言, $\phi_1^{-1}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2-0}$ 有限負數。

b_n 為常數, $P(\xi)$ 與 $Q(\xi)$ 皆為 ξ 的升幕級數, 且常數項均不為零, 從 (19) 到 (21) 的過程是唯一的, 所以原則上從 (18) 與 (21) 可完全確定 $P(\xi)$ 與 $Q(\xi)$, 亦即完全確定 $\phi_2^{-1}(\xi)$, $\phi_1^{-1}(\xi)$ 與 $\phi(r)$.

以上只是對一定 r_m 值而言, 但 r_m 之值本身是不能從殼層結構理論決定的, 正如前一文中所指出^[1], 這個數值很容易從別的實驗 (主要是電子散射實驗) 來決定.

在實際計算中, 雖然各函數的性質是知道的, 但殼層理論只給出 $f(x)$ 幾個點之值, 所以我們必須設計一近似解方法.

三. 近 似 解 法

首先要從實驗數據決定一個近似的 $n_N(L)$ 與 $f(x)$. 令 $n_l(N)$ 表含 N 個費米子多體系中軌道角動量量子數為 l 的粒子數, 由殼層理論得出的 $n_l(N)-N$ 圖形為一折線, 而用湯費模型求出的 $n_N(L)-N$ 圖形 (利用 (2) 式, 並取 $L = l + \frac{1}{2}$, $dL = 1$) 由於其統計性, 應為一平滑曲線^[5]. 對原子中電子言, 兩者頗為相近, 因此在原子核中, 亦能相信這種類似的情況會存在. 所以首先從實驗給出的 $n_l(N)-N$ 折線求出近似的 $n_N(L)-N$ 曲線, 然後從 $L = l + \frac{1}{2}$ ($l=0, 1, 2, \dots, lm$) 所相對應的 $n_N(L)$ 值, 得到 $(lm+1)$ 個 $n_N(L)$ 的值, 再加上 $n_N(L_m)=0$, 共 $lm+2$ 個 $n_N(L)$ 值. 通過這些點可作一 $n_N(L)-L$ 曲線, L_m 之值又可用以下考慮近似地決定. 在統計模型中 L_m 應是 N 的連續函數, L_m-N 曲線可從幾個典型的原子 (或原子核) 來決定. 設粒子數為 $(N+1)$ 時, 角動量量子數為 l 的新殼層剛開始, 則在粒子數為 N 時, 應有 $n_N(l+\frac{1}{2})=0$, 亦即 $L_m = l + \frac{1}{2}$. 例如在原子中, $N=54$ 為 $l=3$ 新殼層開始的前夕, 則應有 $L_m = 3.5$. 由已知的湯、費精確解求出 $L_m = 3.51$. 實際上由湯、費精確解可知 $N^{1/3} = CL_m$, $C = 1.08-3$, 與用以上方法所得的極為相近.

知道了 $lm+2$ 個 $n_N(L)$ 的值, 利用 (12) 式便可求得 $(lm+2)$ 個 $f(x)$ 之值. 此外, $f(x)$ 具有下列性質:

- i) $f(x)$ ($0 \leq x < L_m^2$) 是 x 的連續函數並具高級微商, $f(0)=0$;
- ii) $\frac{2}{\pi} \int_0^{L_m^2} f(x) dx = N$ (由 $f(x)$ 定義即可證明)¹⁾; (22)

1) 應當指出這一歸一化條件與前 (3) 式是一致的. 可以證明用 $\mu(\xi)$ 表示出來兩者都等於 $\frac{4}{3\pi} \int_0^{L_m^2} (L_m^2 - \xi)^{3/2} \mu(\xi) d\xi$. 因此由滿足 (22) 的 $f(x)$ 定出來的 $\rho(r)$ 必滿足 (3).

$$\text{iii) } f'(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\mu(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi > 0, \text{ 因 } \mu(\xi) > 0 \text{ (} 0 < \xi < L_m^2 \text{);} \quad (23)$$

$$\text{iv) } f''(x) \xrightarrow{x \rightarrow L_m^2 - 0} \infty. \quad (24)$$

最後一性質可利用 (17), (16) 及 (23) 來證明。

根據這些性質我們將確定 $f(x)$ 的函數型。方法先用幾項去保證 $x \rightarrow 0+$ 與 $x \rightarrow L_m^2 - 0$ 時 $f(x)$ 的變化。中間部分可用多項式去代表它。首先證明當 $x \rightarrow 0+$ 時, $f(x)$ 可寫成

$$f(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots \quad (25)$$

證。從 (21) 式可得

$$\mu(\xi) = \frac{(P + \sqrt{\xi} Q)'}{P + \sqrt{\xi} Q} - \frac{(P - \sqrt{\xi} Q)'}{P - \sqrt{\xi} Q} \quad \left(' \text{ 表示 } \frac{d}{d\xi} \right).$$

令 $\xi = \zeta^2$, 得

$$\mu(\zeta^2) = \frac{\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{d}{d\zeta} \right) \left(\frac{P}{Q} \right)}{\left(\frac{P}{Q} \right)^2 - \zeta^2}.$$

$$\text{但 } \frac{P}{Q} = B_0 + B_1 \zeta^2 + B_2 \zeta^4 + \dots \quad \left(B_0 = \sqrt{\frac{\xi^{(2)} r_m^2}{2}}, \left[\xi^{(2)} = \frac{d^2 \phi}{dr^2} \right]_{r=r_m}, \right. \\ \left. B_1, B_2 \dots \text{ 皆常數} \right)$$

$$\therefore \mu(\zeta^2) = \mu(\xi) = A_0 \xi^{-1/2} + A_1 \xi^{1/2} + A_2 \xi^{3/2} + \dots \quad \left(A_0 = \sqrt{\frac{2}{\xi^{(2)} r_m^2}} \right) \quad (26)$$

以此代入 (13) 便得

$$f(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots \quad \left(C_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\xi^{(2)} r_m^2}} \right).$$

其次當 $x \rightarrow L_m^2 - 0$ 時, $f(x)$ 的形式決定於 $\rho_N(r)$ 在 r 大處與在 r 小處的變化。一般說來, $f(x)$ 可寫成

$$f(x) = D_0 + D_1 L + D_2 L^2 + \dots \quad (27)$$

利用 (12) 與 (2) 可得

$$D_0 = \int_0^\infty K_N(r) dr, \\ D_1 = \lim_{L \rightarrow 0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{-L}{\sqrt{(r K_N(r))^2 - L^2}} \frac{dr}{r}.$$

對於一般合理的在 r 小處與 r 大處的 $\rho_N(r)$ 的變化 (例如在原子與原子核中),

$D_0, D_1, \dots$ 皆為有限數。

綜合 (25) 與 (27)，可決定 $f(x)$ 的函數型如下：

$$f(x) = \sum_{i \geq 1} C_i x^i + \sum_{i \geq 0} D_i (\sqrt{L_m^2 - x})^i, \quad (0 \leq x \leq L_m^2); \quad (28)$$

其中常數 C_i, D_i 將由前述 $f(x)$ 須通過的 $(L_m + 2)$ 個點、 $f(x)$ 的歸一化條件、及其他性質決定。由於在 x 接近 L_m^2 處，湯-費模型本身的準確度不高，所以在 (28) 第二級數中可只取 D_0 與 D_1 兩項，而在第一級數中 C_i 可多取幾項，這樣 $f(x)$ 型變為

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i x^i + D_0 + D_1 (\sqrt{L_m^2 - x}).$$

利用 $f(0) = 0$ ，可得 $D_0 = -D_1 L_m$ 。於是上式又變為

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i x^i + C(L_m - \sqrt{L_m^2 - x}); \quad (29)$$

此時 $f(x)$ 的歸一化條件 (22) 變成

$$\frac{L_m^3}{6} C + \sum_{i=1}^n \frac{L_m^{2(i+1)} C_i}{2(i+1)} = \frac{\pi}{4} N. \quad (30)$$

至於 $f(x)$ 的性質 (24) 則自然地被 (29) 滿足着。

將 (29) 代入 (17)，經積分後得

$$\mu(\xi) = \frac{C L_m}{\pi \sqrt{\xi} (L_m^2 - \xi)} + \sum_{i=1}^n \frac{2^i}{\pi} \frac{i! C_i}{(2i-3)!!} \xi^{i-3/2}; \quad (31)$$

再將上式代入 (18)，使得

$$\log_e \frac{\phi_2^{-1}(\xi)}{\phi_1^{-1}(\xi)} = \frac{2}{\pi} \left\{ C \tanh^{-1} \frac{\sqrt{\xi}}{L_m} + \sum_{i=1}^n \frac{2^i \cdot i! \cdot C_i}{(2i-1)!!} \xi^{i-1/2} \right\}. \quad (32)$$

下一步便是如何從 (32) 求得近似的 $P(\xi)$ 與 $Q(\xi)$ 。從 (21) 與 (32) 可得

$$\frac{P(\xi)}{\sqrt{\xi} Q(\xi)} = \coth E(\xi), \quad (33)$$

$$\text{其中} \quad E(\xi) = \frac{1}{\pi} \left\{ C \tanh^{-1} \frac{\sqrt{\xi}}{L_m} + \sum_{i=1}^n \frac{2^i \cdot i! \cdot C_i}{(2i-1)!!} \xi^{i-1/2} \right\}. \quad (34)$$

由 ϕ_2^{-1} 與 ϕ_1^{-1} 的邊界條件及其他性質可知 $P(\xi)$ 與 $Q(\xi)$ 的函數型（在原子核

情形下) 應為

$$P(\xi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi^i + \frac{1}{2\alpha_0} \left[\log_e L_m^2 - \log_e (L_m^2 - \xi) \right] + r_m, \quad (35)$$

$$\sqrt{\xi} Q(\xi) = \sqrt{\xi} \left[\sum_{i=0}^n (\beta_i \xi^i) - \frac{1}{2\alpha_0 L_m} \log_e (L_m^2 - \xi) \right]; \quad (36)$$

其中 α_i, β_i 皆為未定常數。這些常數可由以下條件決定:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_0^{L_m^2} |P(\xi) - \sqrt{\xi} Q(\xi) \coth E(\xi)|^2 d\xi &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial \beta_i} \int_0^{L_m^2} |P(\xi) - \sqrt{\xi} Q(\xi) \coth E(\xi)|^2 d\xi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

在具體計算中 $\coth E(\xi)$ 尚須用一滿足歸一化條件的近似式表示。此外尚可將由電子散射實驗及 μ -介原子 X -光譜得到的關於 $\rho(r)$ 的限制作為附加條件加入以上的變分法中。這個計算估計比較繁重。本文將就已知的原子內電子的分佈來檢查 (32) 的準確性。

四. 就 Xe 中電子分佈驗證 $f(x)$ 與 $\mu(\xi)$

利用已知的原子內電子分佈函數, 可求得在 Xe 中 $L_m = 3.51_{-3}$. 為方便計我們將取與殼層理論給出的 $n_l(N) - N$ 折線相接近的曲線為由費米給出的 $n_N\left(l + \frac{1}{2}\right) - N$ 曲線。並由此求得 $f(x)$ (見圖 2)。由已知的 $\rho(r)$ 在 r 大處與 r 小處的性質

$$\rho_N(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{a}{r^6}, \quad \rho_V(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{b}{r^{3/2}},$$

$$\text{可得 } \phi_2^{-1}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2 - 0} a^{1/3} (L_m^2 - \xi)^{-1/2}, \quad \phi_1^{-1}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2 - 0} b^{-2/3} (L_m^2 - \xi),$$

$$\mu(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2 - 0} \frac{d}{d\xi} \log_e \frac{a^{1/3} (L_m^2 - \xi)^{-1/2}}{b^{-2/3} (L_m^2 - \xi)} = \frac{3}{2} \frac{1}{(L_m^2 - \xi)}.$$

由 (31) 可得

$$\mu(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow L_m^2 - 0} \frac{C}{\pi (L_m^2 - \xi)}, \quad (38)$$

$$\therefore C = \frac{3}{2} \pi.$$

為計算簡單, 我們將在 $f(x)$ 函數型 (29) 中只保留 C_1, C_2, C_3, C_4 .

於是

$$f(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \frac{3}{2} \pi (L_m - \sqrt{L_m^2 - x}). \quad (39)$$

此時 $f(x)$ 的歸一化條件 (30) 變為

$$\frac{\pi}{4} N = \frac{\pi}{4} L_m^3 + \frac{L_m^4}{4} C_1 + \frac{L_m^6}{6} C_2 + \frac{L_m^8}{8} C_3 + \frac{L_m^{10}}{10} C_4, \quad (N = 54). \quad (40)$$

還須要在 $f(x)$ 曲線上取三點：

$$f(2) = 1.67, \quad f(4) = 3.69, \quad f(8) = 8.53, \quad (41)$$

由 (40), (41) 解出 C_1, C_2, C_3, C_4 之值如下：

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 3.64_{-1} \times 10^{-2}, & C_2 &= 6.17_3 \times 10^{-2}, \\ C_3 &= -7.48_5 \times 10^{-3}, & C_4 &= 3.34_2 \times 10^{-4}; \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

代入 (39) 後可求出相應於 $x = L_m^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$ ($l=0, 1, 2$) 的 $f(x)$ 值如下：

$$f(6.05) = 6.01, \quad f(10.05) = 11.9, \quad f(12.05) = 17.5. \quad (43)$$

由費米的精確解求得的相應值如下：

$$f(6.05) = 6.03, \quad f(10.05) = 11.6, \quad f(12.05) = 16. \quad (44)$$

比較 (43) 與 (44) 可知如此定出的 $f(x)$ 是相當可靠的。

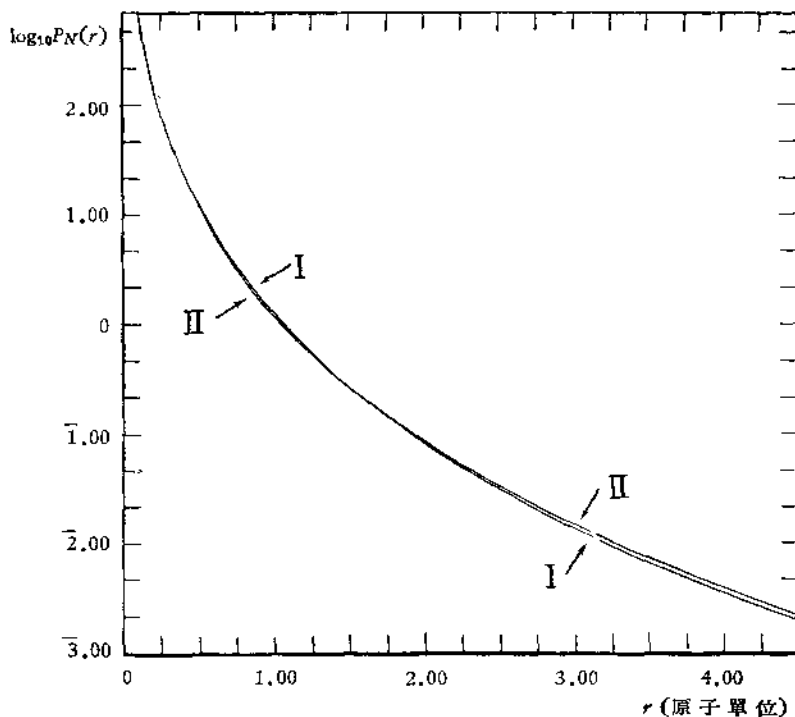


圖 5

將 (42) 代入 (31) 便得

$$\begin{aligned} \mu(\xi) = & 2.32 \times 10^{-2} \xi^{-1/2} + 1.572 \times 10^{-1} \xi^{1/2} - 3.81 \times 10^{-2} \xi^{3/2} + \\ & + 2.72 \times 10^{-3} \xi^{5/2} + \frac{5.26}{\sqrt{\xi(12.30 - \xi)}}. \end{aligned} \quad (45)$$

圖 3 中的曲線即由此畫出，爲了進一步與精確解比較，將 (42) 代入 (32) 得

$$\begin{aligned} r_2 = \phi_2^{-1}(\xi) = \phi_1^{-1}(\xi) \exp \left\{ 4.63 \times 10^{-2} \xi^{1/2} + 1.05 \times 10^{-1} \xi^{3/2} - 1.52 \times 10^{-2} \xi^{5/2} \right. \\ \left. + 7.78 \times 10^{-4} \xi^{7/2} + 3.00 \times \tanh^{-1} \frac{\sqrt{\xi}}{3.51} \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

如以精確的 $\phi_1^{-1}(\xi)$ 值代入上式，便可求出 $\phi_2^{-1}(\xi)$ ，由此便可得 $r > r_m$ 時的 $\rho(r)$ 曲線。圖 5 中曲線 (II) 即由此得來，與正確曲線 I 相比，其差誤在 $r \leq 4.7$ 時均小於 5/100。

附 錄

設 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ ($0 \leq x \leq \xi_{\max}$) 均爲連續函數，且 $f(0) = 0$ ，則可證明積分方程

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mu(\xi)}{(x-\xi)^\lambda} d\xi \quad (-1 < \lambda < 0) \quad (1)$$

的解答是

$$\mu(\xi) = \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda \pi} \frac{f'(0)}{\xi^{-\lambda}} + \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda \pi} \int_0^\xi \frac{f''(x)}{(\xi-x)^{1-\lambda}} dx. \quad (2)$$

這個證明可以利用下已知積分方程及其解^[11]

$$F(x) = \int_0^x \frac{v(\xi)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (3)$$

其中 $F(x)$ 爲連續函數，且有連續一級微商，上式解答爲：

$$v(\xi) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{F(0)}{\xi^{1-\alpha}} + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\xi \frac{F'(x) dx}{(\xi-x)^{1-\alpha}}. \quad (4)$$

取 $F(x) = f'(x)$, $\alpha = \lambda + 1$, $v(\xi) = -\lambda \mu(\xi)$, ($-1 < \lambda < 0$)，則 (4) 式變爲 (2)，而 (3) 變爲

$$f'(x) = \int_0^x \frac{-\lambda \mu(\xi)}{(x-\xi)^{\lambda+1}} d\xi, \quad (-1 < \lambda < 0), \quad (5)$$

故知 (2) 式滿足 (5) 式。將 (5) 式左右對 x 積分，得

$$\int_0^x f'(x) dx = f(x) = -\lambda \int_0^x dy \int_0^y \frac{\mu(\xi)}{(y-\xi)^{\lambda+1}} d\xi. \quad (6)$$

從 (2) 式可知 $\mu(\xi)$ 只在 $\xi = 0$ 處不連續，且 $\mu(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda \pi} \frac{f'(0)}{\xi^{-\lambda}}$ ，這

是因為 (2) 式右邊第二項中的積分

$$\int_0^x \frac{f''(x)}{(\xi-x)^{-\lambda}} dx, \quad (0 \leq \xi \leq \xi_{\max})$$

由已知條件易見為一致收斂。由此 (6) 式可簡化如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= -\lambda \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \int_0^x dy \int_{\epsilon_1}^{y-\epsilon_2} \frac{\mu(\xi) d\xi}{(y-\xi)^{\lambda+1}}, \quad (0 \leq x \leq \xi_{\max}) \\ &= -\lambda \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\epsilon_1}^{x-\epsilon_2} d\xi \int_{\xi+\epsilon_2}^x \frac{\mu(\xi)}{(y-\xi)^{\lambda+1}} dy = \int_0^x \frac{\mu(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\lambda}}; \end{aligned}$$

故知 (2) 式為 (1) 式的解。正文中的 (13) 與 (17) 即相當於 $\lambda = -\frac{1}{2}$ 。

參 考 文 獻

- [1] 楊立銘 物理學報, **9**, (1953), 302.
- [2] Bohr, A. Kgl. Danske. Vidensk. Selsk., *Mat. Fys. Medd.* **26** (1952), No. 14.
- [3] Ravenhall, D. G. and Yennie, D. R., *Phys. Rev.* **96** (1954), 257.
- [4] Ford, K. W. and Hill, D. L., *Phys. Rev.* **94** (1954), 1630.
- [5] Fermi, E., *Z. Physik*, **48** (1928), 73.
- [6] Born, M. and Yang, L. M. (楊立銘), *Nature* **166** (1950), 399.
- [7] Yang, L. M. (楊立銘), *Proc. Phys. Soc. (Lon.)* **64** (1951), 632.
- [8] Иваненко, Д. и Родичев, В., *Дан* **70** (1950), 295.
- [9] Иваненко, Д. и Соколов, А., *Дан* **74** (1950), 33.
- [10] Feshbach, H., Porter, C. E. and Weisskopf, V. F., *Phys. Rev.* **96** (1954), 448.
- [11] Goursat, E., *Acta. Math.* **27** (1903), 129.

FURTHER INVESTIGATION ON THE ORBITAL ANGULAR MOMENTUM DISTRIBUTION IN NUCLEI AND NUCLEAR DENSITY

YANG LI-MING (*Department of Physics, Peking University*)

and

LIU HAN-CHAO (*Department of Physics, Nankai University*)

ABSTRACT

The fundamental equation which relates the orbital angular momentum distribution $n(L)$ to the particle density $\rho(r)$

$$n(L) = \frac{4}{\pi} L \int \sqrt{r^2 K^2(r) - L^2} \frac{dr}{r}, \quad K^3(r) = 3\pi^2 \rho(r), \quad (1)$$

derived originally by Fermi^[5] for electrons in atoms and applied to the case of nucleons in nuclei by a number of authors^[6-9] may be regarded as an integral equation for $\rho(r)$ or $K(r)$, provided that $n(L)$ is found from the theory of shell structure. In an early investigation^[1], moments of distribution in L were utilized to provide test for any proposed density function and a simple density function containing two parameters, made to satisfy the test, was given. In the present investigation we have attempted to make full use of the fundamental equation (1). We have succeeded in transforming this non-linear integral equation into a linear one

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{x-\xi} \mu(\xi) d\xi \quad (2)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \xi &= L_m^2 - r^2 K^2(r) = \phi(r), \quad L_m = \left[r K(r) \right]_{\max} = r_m K(r_m) \\ x &= L_m^2 - L^2 \\ f(x) &= \frac{\pi}{4} n(\sqrt{L_m^2 - x}) / \sqrt{L_m^2 - x} \\ \mu(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \log_e \frac{\phi_2^{-1}(\xi)}{\phi_1^{-1}(\xi)} \\ \phi(r) &= \phi_1(r), \quad (0 < r < r_m) \\ &= \phi_2(r), \quad (r_m < r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Equation (2) is of the type of Volterra's integral equation of the first kind. Its solution is

$$\mu(\xi) = \frac{2}{\pi} \frac{f'(0)}{\sqrt{\xi}} + \frac{2}{\pi} \int_0^\xi \frac{f''(x)}{\sqrt{\xi-x}} dx \quad (4)$$

To determine $f(x)$ from the data supplied by the shell model, approximate method has been devised. The validity of the method is then tested for the atomic case where accurate electron distribution in the Thomas-Fermi model is known.

For a given $f(x)$, and therefore $\mu(\xi)$, $\rho(r)$ can in principle be determined uniquely apart from a constant r_m , which can then be fixed from data on high energy electron scattering by nuclei. For practical purpose, approximate method has been devised to obtain $\rho(r)$ from $\mu(\xi)$.

It is pointed out that an accurately determined $\rho(r)$, together with the real part of accurately determined optical-model-potential can provide information on the radial dependence of statistically averaged nuclear force between two nucleons in nuclei.