

用外罚函数法作机构的最优综合

宗光华 張启先

【摘 要】

本文概述了外罚函数法的要点,介绍了 OPTIGO 程序的特点。通过列举的几个例题着重探讨了根据几何等同条件运用外罚函数法作机构最优综合的问题。研究表明外罚函数法在机构最优综合中值得推广。

概 述

机构最优综合作为一个非线性规划问题并用各种数值优化方法求解的研究工作,十多年来有很大的发展。在使用方法上,罚函数法由于处理非线性规划问题很有效而受到普遍重视。目前,内罚函数法所取得的研究成果较多;而有关外罚函数法的研讨仅散见于极少的文献。外罚函数法有一些独特的优点,诸如对初始点的要求不高、收敛速度快、处理等约束条件方便、较易得到全局最优解等等。因此正在引起广泛的兴趣。

本文概述了外罚函数法的要点,介绍了文献[3]中所提的 OPTIGO 优化程序的特点,对将其推广于机构(特别是空间机构)最优综合的问题进行了尝试,并在一些方面加以深化和完善,还着重就根据几何等同条件运用方向余弦矩阵法作机构最优综合时数学模型建立的方式展开了讨论。通过文章列举的数值例子说明,外罚函数法解决机构最优综合问题是有效的。本文对基本方法、计算例题和一些初步经验予以小结。

外罚函数法要点

机构最优综合通常属于约束优化问题。

罚函数法是约束优化问题的一种间接解法。其基本思想是把约束优化问题转化成序贯的

无约束优化问题求解（即 *SUMT* 方法）。文 [3] 介绍的外罚函数法的数学模型表述形式如下：

考虑问题：

$$\min_{x \in D} Q(\bar{x}) \quad (1)$$

受约束于：

$$R_k(\bar{x}) \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, N_R \quad (2)$$

$$E_j(\bar{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N_E \quad (3)$$

其中 $Q(\bar{x})$ 为目标函数， $\bar{x}$ 为设计变量， R_k 、 E_j 分别代表在定义域 E^n 上连续的不等约束条件和等约束条件。令 D 为可行域，则：

$$D = \{ \bar{x} | \bar{x} \in E^n, R_k(\bar{x}) \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, N_R; \\ E_j(\bar{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N_E \} \quad (4)$$

定义增广目标函数：

$$QP(\bar{x}, \eta_P) = Q + P = Q + C_P \eta_P \left[\sum_{j=1}^{N_E} q_j (E_j)^2 \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{N_R} q_k (R_k)^2 \right] \quad (5)$$

式中第二项 P 称作罚函数项，其中定义：

$$\begin{cases} R_k = R_{k+} = 0 & \text{当 } R_k \geq 0 \\ R_k = R_{k-} & \text{当 } R_k < 0 \end{cases} \quad (6)$$

而系数 q_j 、 q_k 称为加权因子，通过取得不同的加权值可以对约束条件的惩罚作用加以调节。

如是，则原约束最优化问题由下列序贯无约束最优化问题组成：

对 $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ (每取一个 t 值意味着一次新的无约束最优化开始，称之为轮)，求：

$$\min_{x \in E^n} QP(\bar{x}, \eta_P^{(t)}) \quad (7)$$

其中，

$$\eta_P^{(t+1)} = \mu \eta_P^{(t)}, \quad \text{且 } \eta_P^{(0)} = 1, \quad \text{并取 } \mu = 8。$$

由此可见， $\{\eta_P^{(t)}\}$ 是一个严格递增的正数列，用以实现愈渐陡峭的惩罚墙，驱使无约束最优点从可行域的外部逐渐逼近可行域的边界。当 $t \rightarrow \infty$ ，若第 t 轮的最优点 $\bar{x}^{(t)} \in D$ ， $\bar{x}^{(t)}$ 就是约束最优解；若 $\bar{x}^{(t)}$ 充分接近可行域，则可看成是原问题的近似解。

有关外罚函数法收敛性的详细证明可查阅专著，在此不做赘复。

OPTIGO程序的特点

文[3]介绍的外罚函数法其相应程序命名为 *OPTIGO*。它的粗框图如图1所示。

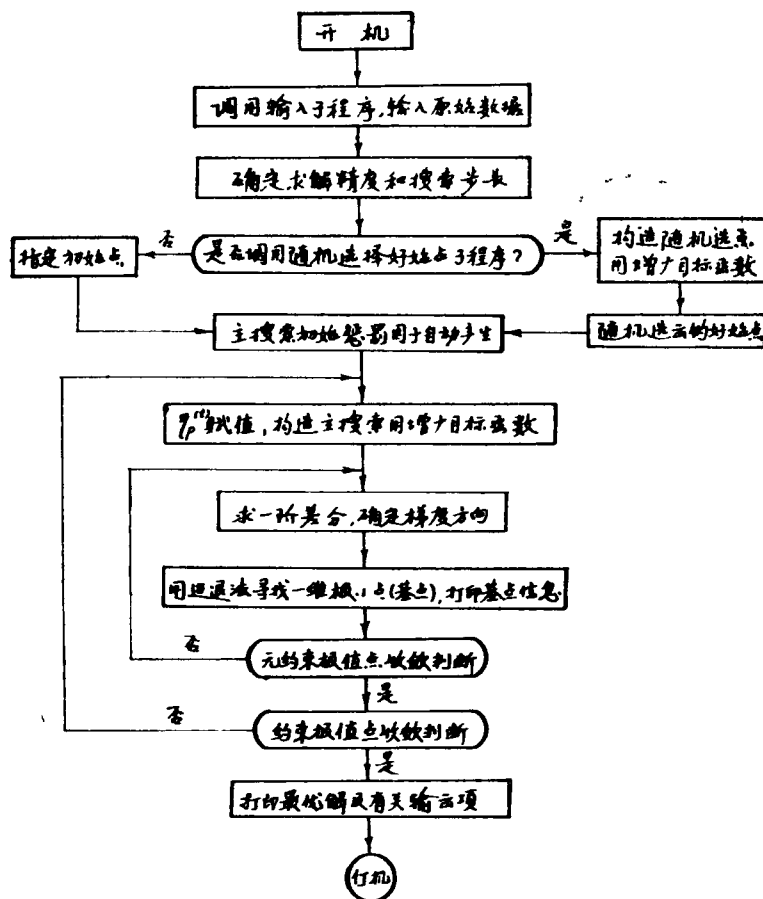


图 1

程序构造外部抛物型惩罚函数, 无约束极小化采用最速下降法。合成最速下降方向的各项偏导数由中心差分近似表示。值得指出, 在机构优化设计中用差分近似偏导数是适宜的, 因为有时不易由其数学模型直接导出偏导数的表达式, 有时虽可导出, 但计算很费机时。该程序采用进退法作一维搜索, 无须事先确定寻查区间, 具有合理的计算机效率。程序可以由人为指定的初始点出发搜索; 也允许调用本身附设的随机选择好始点子程序, 由它自行产生一个好的初始点出发搜索。程序具备自动产生初始惩罚因子的功能, 使增广目标函数的构造比较合理, 搜索不致过度深入非可行域。

程序具有三种典型运行方式: 随机优选始点和自动产生初始惩罚因子方式; 指定初始点和自动产生初始惩罚因子方式; 指定初始点和指定初始惩罚因子方式。所有运行方式都以相邻两轮无约束极值点的距离小于给定精度 ε 为收敛判据。予先给定的小正数 ε 的值随着搜

$$\|\bar{x}^{(t+1)} - \bar{x}^{(t)}\| \leq \varepsilon \quad (8)$$

索的不同阶段可以自动调整：在粗搜索阶段取较大的值，在精搜索阶段取较小的值。考虑到可能出现迭代不收敛的情况，在一维搜索作满极限步数或在每轮无约束寻优作满极限射线数之后搜索自动中止。

OPTIGO由一个主程序和七个子程序组成。通常有三个子程序需用户根据不同的优化数学模型自行编写。程序使用 FORTRAN—IV 语言。

机构最优综合的数学模型

一些文献曾对机构最优综合的数学模型作了颇有启发的阐述。本文的不同之处是：在优化方法上借助外罚函数法，这导致数学模型的若干新特点；在综合方法上将机构运动的几何等同条件推广到模型的建立上；在数学模型的表述形式上也比较多样，这是目标函数和等约束条件变化而衍生出的结果。文章对它们作了比较。下面用例题加以说明。所有数值例子都经 FELIX C—256 计算机或 SIEMENS 7.000 计算机计算。

[例 1]

设计一平面曲柄摇杆机构，要求曲柄由 ϕ_0 转至 $\phi_0 + \frac{\pi}{2}$ 时摇杆输出角最优地

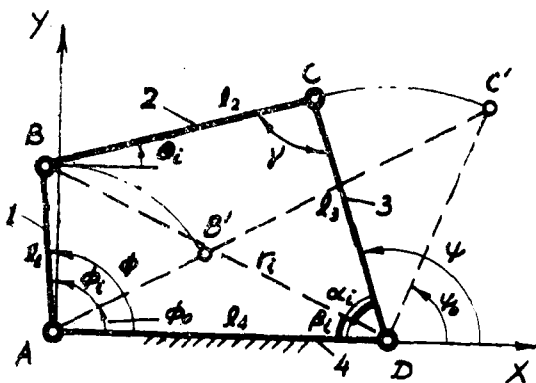


图 2

实现期望函数 $\psi = \psi_0 + \frac{2}{3\pi}(\phi - \phi_0)^2$ 。式中 ϕ_0 、 ψ_0 分别为对应于摇杆右极限位置时曲柄和摇杆的位置角（以机架 AD 作基准逆时针度量。参见图 2）。给定 $l_1 = 1$ ， $l_4 = 5$ ， $[\gamma]_{\min} = 45^\circ$ ， $[\gamma]_{\max} = 135^\circ$ 。

显然这是一个二维优化问题。按照通常的做法，以输出角的平方误差建立目标函数：

$$Q(\bar{l}) = \sum_{i=1}^S (\psi_i - \psi_{si})^2 \quad (9)$$

其中 $\bar{l} = (l_2, l_3)^T$ ， ψ_i 为期望输出角， ψ_{si} 为实际输出角。S 为 $[\phi_0, \phi_0 + \frac{\pi}{2}]$ 上主动转角等分节点数。本例 $S = 11$ 。

目标函数的计算与以下式子有关：

$$\psi_{si} = \begin{cases} \pi - \alpha_i - \beta_i & \text{当 } 0 \leq \phi \leq \pi \text{ 时} \\ \pi - \alpha_i + \beta_i & \text{当 } \pi < \phi < 2\pi \text{ 时} \end{cases} \quad (10)$$

而

$$\phi_0 = \arccos[(1+l_2)^2 - l_3^2 + 25/10(1+l_2)] \quad (11)$$

$$\psi_0 = \arccos[(1+l_2)^2 - l_3^2 - 25/10l_3] \quad (12)$$

$$r_1 = \sqrt{26 - 10\cos(\phi_0 + \phi_1)} \quad (13)$$

$$\alpha_1 = \arccos(r_1^2 + l_3^2 - l_2^2/2l_3r_1) \quad (14)$$

$$\beta_1 = \arccos(r_1^2 + 24/10r_1) \quad (15)$$

约束条件是以传动角为依据建立起来的, 计有:

$$R_1(\bar{l}) = l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3\cos[\gamma]_{\max} - 36 \geq 0 \quad (16)$$

$$R_2(\bar{l}) = 16 + 2l_2l_3\cos[\gamma]_{\min} - l_2^2 - l_3^2 \geq 0 \quad (17)$$

现在我们来考虑平面四连杆机构的曲柄存在条件。这可以用格拉斯霍夫定理写出:

$$\left. \begin{aligned} l_1 + l_2 &\leq l_3 + l_4 \\ l_1 + l_3 &\leq l_2 + l_4 \\ l_1 + l_4 &\leq l_2 + l_3 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其机构学上的含义是机构的可动性, 或对应于主动杆的任意位置机构的可装配性; 其数学上的含义是使式 (11)、(12)、(14) 恒有意义。

这种情况在机构最优综合中具有一定的代表性, 即目标函数涉及到定义域的判别, 优化设计变量不允许在整个实数域上随意取值, 仅局限在定义域被满足的范围内。图 3 是例 1 的可行域和定义域的示意。诚然, 用内罚函数法或其它优化方法求算该例时也会遇到类似情况, 但处理起来比较方便, 只须把可动性当作一种约束条件就行了, 算法能保证自动地在可行域内搜索。外罚函数法的情况则不同, 因为搜索往往在可行域外进行, 如果

沿用上面的做法, 则难免搜索到违反定义域的点上去, 造成非正常停机的错误, 过早地中断程序的运行。

当然, 欲求解例 1 也可以构造另一种数学模型。

仍参见图 2。引入中间参数 θ_i , $i=1, 2, \dots, 11$ 。设想转动副 C 被拆分, 根据 C 点在 A-XY 坐标系中坐标的几何等同条件可以建立以下两个方程:

$$\cos(\phi_0 + \phi_1) + l_2 \cos \theta_i - l_3 \cos \psi_i - 5 = 0 \quad (19)$$

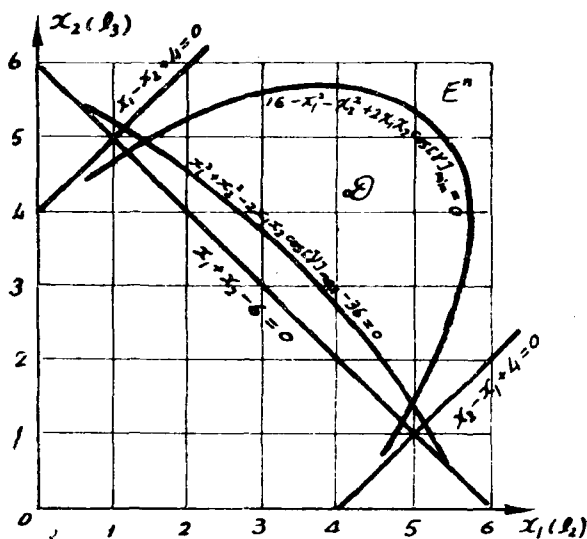


图 3

$$\sin(\phi_0 + \phi_i) + l_3 \sin \theta_i - l_3 \sin \psi_i = 0 \quad (20)$$

于是数学模型可以表述如下:

$$Q(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{11} [\sin(\phi_0 + \phi_i) + l_2 \sin \theta_i - l_3 \sin \psi_i]^2 \quad (21)$$

受限制于等约束条件:

$$E_i(\bar{x}) = \cos(\phi_0 + \phi_i) + l_2 \cos \theta_i - l_3 \cos \psi_i - 5 \quad i=1, 2, \dots, 11 \quad (22)$$

和不等约束条件:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= l_2 > 0, & R_2 &= l_3 > 0 \\ R_3 &= l_2^2 + l_3^2 - 2l_2 l_3 \cos[\gamma]_{\max} - 36 \geq 0 \\ R_4 &= 16 + 2l_2 l_3 \cos[\gamma]_{\min} - l_2^2 - l_3^2 \geq 0 \\ R_5 &= l_3 - l_2 + 4 \geq 0 \\ R_6 &= l_2 - l_3 + 4 \geq 0 \\ R_7 &= l_2 + l_3 - 6 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

这在形式上是十三维优化问题, 设计变量:

$$\bar{x} = (l_2, l_3, \theta_i, i=1, 2, \dots, 11)^T$$

又, 式 (23) 中, R_1 、 R_2 是边界约束, R_3 、 R_4 分别对应于最大、最小传动角的动力学条件, $R_5 \sim R_7$ 表达了曲柄存在条件。

比较上述两种数学模型的表述形式可以看到, 用外罚函数法求解机构最优综合问题, 对数学模型的定义域要做审慎地考虑。例如前一种形式 (模型 I), 应将可行域和定义域区别对待, 若借助 OPTIGO 程序求解则需附加若干补充功能, 以便处理搜索超出定义域的情况。后一种形式 (模型 II), 由于在建立模型阶段已经对避开定义域的问题作了考虑, 因而允许设计变量在整个实数域任意取值, 这时可直接引用 OPTIGO 求解。约束条件 $R_5 \sim R_7$ 的作用是显而易见的, 即落在可行域内的约束最优解一定满足曲柄条件。

图 4, 表 1 列出了用上述两种数学模型求解例 1 的结果。至于用 OPTIGO 解模型 I 时程序的补充部分, 考虑到篇幅的限制在此不拟叙述。

关于根据几何等同条件建立数学模型的问题, 本文仅就机构的运动学最优综合进行了讨论。这通

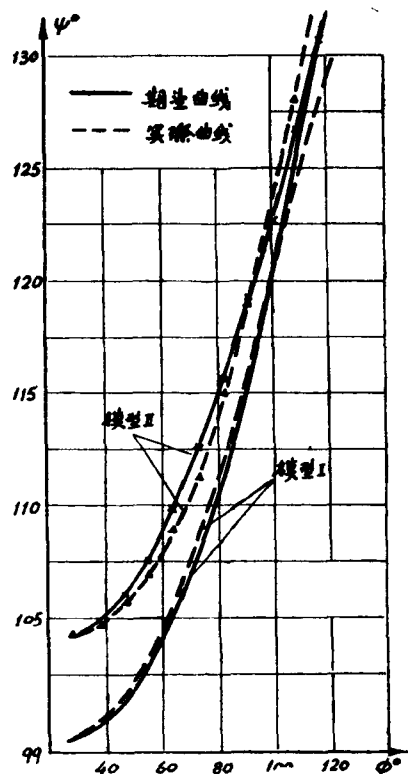


图 4

常归纳成三个任务：按主动、从动杆函数系关的综合；按连杆轨迹的综合；按连杆若干位置、姿态的综合。文中采用方向余弦矩阵法，其坐标系的设置可详见文〔1〕〔2〕。

表 1 期望输出角与实际输出角

分 点 号	数 学 模 型 I			数 学 模 型 II		
	曲柄轉角	期望輸出角	实际輸出角	曲柄轉角	期望輸出角	实际輸出角
	ϕ°	ψ°	ψ_s°	ϕ°	ψ°	ϕ_s°
1	26.228	99.625	99.625	28.573	104.369	104.378
2	35.228	99.925	100.017	37.573	104.669	104.743
3	44.228	100.825	101.156	46.573	105.569	105.807
4	53.228	102.325	102.975	55.573	107.069	107.510
5	62.228	104.425	105.392	64.573	109.169	109.779
6	71.228	107.125	108.317	73.573	111.869	112.531
7	80.228	110.425	111.662	82.573	115.169	115.687
8	89.228	114.325	115.337	91.573	119.069	119.158
9	98.228	118.825	119.260	100.573	123.569	122.867
10	107.228	123.925	123.346	109.573	128.669	126.731
11	116.228	129.625	127.511	118.573	134.369	130.668
运行方式	随机选点 (400)			指定起始点		
最优解	$\begin{pmatrix} l_2^* \\ l_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1441 \\ 2.3058 \end{pmatrix} \quad Q^* = 0.00318$			$(l_2^*, l_3^*, \theta_i^*) = (3.9963, 2.4668, 0.4985, 0.4588, 0.4190, 0.3806, 0.3457, 0.3174, 0.2987, 0.2919, 0.2984, 0.3178, 0.3478)$ $\theta_i - rad$		
起作用约束	$\gamma_{max} = 134.9842^\circ$			$\gamma_{max} = 135.0116^\circ$		
净机时	97秒			527秒		

〔例 2〕

空间 $RRSRR$ 曲柄摇杆机构。曲柄 1 为原动件，摇杆 4 为从动件。为简化问题 设 连

架杆转轴相互垂直，球面副每侧的一对转动副轴线相互平行（如图5），且令 $\alpha_{01} = \alpha_{12} = \alpha_{34} = 0$ ， $\alpha_{40} = -90^\circ$ ， $s_1 = s_3 = 0$ 。期望函数如表2，作优化综合。

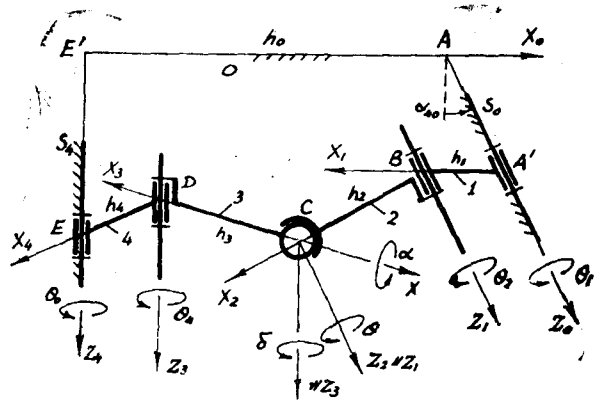


图 5

表 2 R R S R R 机构再现函数优化

序号	θ_1°	θ_2°	期望 θ_0°	实际 θ_0°	$ \Delta \theta_0 $
1	0	164.79	168.77	168.44	0.33
2	30	153.82	157.57	157.35	0.22
3	60	137.92	144.23	144.29	0.06
4	90	113.32	128.17	128.33	0.16
5	120	77.92	110.23	110.45	0.22
6	150	33.82	93.90	94.14	0.24
7	180	-15.21	90.23	90.16	0.07
8	210	-66.26	106.00	105.48	0.52
9	240	-116.35	130.60	130.11	0.49
10	270	-157.01	159.67	160.36	0.69
11	300	-176.35	178.80	179.12	0.32
12	330	-186.26	178.00	178.44	0.44

这是一个按主动、从动杆函数关系的优化设计问题。在进行机构位移分析时，为避开球面付 c 中的三个欧拉角 θ 、 α 、 δ ，设想在 c 处将机构拆成两个连架链。以 $AX_0(Y_0)Z_0$ 参考系建立 c 点坐标的等同关系式可以得到以下三个方程：

$$h_1 \cos \theta_1 + h_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = -h_0 - h_4 \cos \theta_0 - h_3 \cos(\theta_0 + \theta_4) \quad (24)$$

$$h_1 \sin \theta_1 + h_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = -s_4 \quad (25)$$

$$s_0 = h_4 \sin \theta_0 + h_3 \sin(\theta_0 + \theta_4) \quad (26)$$

由式 (24)、(26) 消去 θ_4 可得

$$-s_0 \sin \theta_0 + B \cos \theta_0 + C = 0 \quad (27)$$

而

$$B = h_0 + h_1 \cos \theta_1 + h_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$C = -\frac{1}{2h_4} (s_0^2 + B^2 + h_4^2 - h_3^2)$$

式 (25)、(27) 均包含中间运动参数 θ_2 ，欲从中再消去 θ_2 则所得式子较繁，故我们将 θ_{2i} ， $i = 1, 2, \dots, 12$ ，当作设计变量引入数学模型。于是目标函数可以写成：

$$Q(\bar{x}, \theta_{1i}, \theta_{0i}) = \sum_{i=1}^{12} \{ [-s_0 \sin \theta_{0i} + B \cos \theta_{0i} + C]^2 + [s_4 + h_2 \sin \theta_{1i} + h_2 \sin(\theta_{1i} + \theta_{2i})]^2 \} \quad (28)$$

其中 $\bar{x} = (h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, s_0, s_4, \theta_{2i}, i = 1, 2, \dots, 12)^T$ 为十九维设计空间。

不等约束条件为：

$$\left. \begin{aligned} s_0^2 + B_i^2 - C_i^2 &\geq 0 & i = 1, \dots, 12 \\ 0 &\leq h_j \leq h_{j \max} & j = 0, 1, 2, 3, 4 \\ s_{k \min} &\leq s_k \leq s_{k \max} & k = 0, 4 \\ (\theta_{2i})_{\min} &\leq \theta_{2i} \leq (\theta_{2i})_{\max} & i = 1, 2, \dots, 12 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

该数学模型实际上就是在被式 (29) 所制约的设计空间中求解非线性方程组 (25)、(27)。显然，倘若 $Q^* = 0$ ，表示所有非线性方程组被满足，期望函数精确地得到再现；反之则实际函数只是在满足约束前提下误差最小地逼近期望函数。

用随机优选始点和自动产生初始惩罚因子运行方式求解该例所得的一组解如下：

随机选点数：29800

最优点

$$\begin{aligned} \bar{x}^* = & (140.230, 41.626, 63.243, 83.624, 46.913, -27.858, \\ & -16.596, 2.874, 2.685, 2.407, 1.976, 1.359, 0.590, \\ & -0.266, -1.161, -2.039, -2.732, -3.068, -3.248)^T \\ & \theta_{2i}^* - rad \end{aligned}$$

最优值

$$Q^* = 0.8281$$

期望输出角与实际输出角列于表 2。由于外罚函数法处理等约束条件较为方便, 因此把数学模型中非线性方程式的组合形式变换一下也是允许的。例如, 考虑到中间运动参数 θ_{2i} 并非独立设计变量可以由根据式 (25) 写出的等约束方程消去, 而把数学模型改换成:

$$\left. \begin{aligned} Q(\bar{x}, \theta_{1i}, \theta_{0i}) &= \sum_{i=1}^{12} [-s_0 \sin \theta_{0i} + B \cos \theta_{0i} + C]^2 \\ E_i(\bar{x}, \theta_{1i}) &= s_4 + h_1 \sin \theta_{1i} + h_2 \sin(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \\ &\quad i=1, 2, \dots, 12 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

不等约束条件式 (29)

或在式 (28) 的基础上复加等约束条件 (25):

$$\left. \begin{aligned} Q(\bar{x}, \theta_{1i}, \theta_{0i}) &= \sum_{i=1}^{12} \{ [-s_0 \sin \theta_{0i} + B \cos \theta_{0i} + C]^2 \\ &\quad + [s_4 + h_1 \sin \theta_{1i} + h_2 \sin(\theta_{1i} \\ &\quad + \theta_{2i})]^2 \} \\ E_i(\bar{x}, \theta_{1i}) &= s_4 + h_1 \sin \theta_{1i} + h_2 \sin(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \\ &\quad i=1, 2, \dots, 12 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

不等约束条件式 (29)

表 3 的一组数值例对上述三种数学模型的搜索情况作了对比。搜索由同一初始点出发, 并选用相同的收敛精度。

本例以及其它一些算例的结果表明, 构造形如式 (30) 的数学模型比较适宜。这时再现函数的逼近精度高, 收敛速度居中, 综合效益好。

[例 3]

如图 6 的 $RRSS$ 机构。设曲柄 O 每隔 40° 转角所相应的期望轨迹 X_i, Y_i, Z_i (对参考坐标系 $D'-X_3(Y_3)Z_3$) 已由表 4 给定。试用连杆 AB 上的一点 K 生成的轨迹逼近。

这是一个按照连杆轨迹的优化设计问题。当然可以从不同的角度来处理它。本文仍根据几何等同条件运用方向余弦矩阵法为数学工具

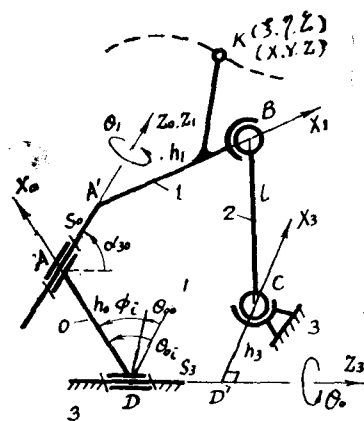


图 6

表 3 三种数学模型再现同一函数的比较

相同的初始点 $\bar{x}_0 = (150, 40, 80, 110, 55, -45, -25, 2.824, 2.555, 2.215, 1.759, 1.169,$

$0.461, -0.318, -1.121, -1.889, -2.519, -2.935, -3.215)^T \theta_{2i} - rad$

相同的收敛精度 $(\beta_{s_{0i}})_s = 4000, (\beta_{s_{0i}})_f = 4 \times 10^4$. 计算机型号: SIEMENS 7.000

序号	θ_i	期望角 θ_i°	数学模型 (28)		数学模型 (30)		数学模型 (31)	
			实际输出角 θ_i°	$ \Delta \theta_i $	实际输出角 θ_i°	$ \Delta \theta_i $	实际输出角 θ_i°	$ \Delta \theta_i $
1	0	168.77	166.81	1.96	168.47	0.3	167.30	1.47
2	30	157.57	155.21	2.36	156.73	0.84	155.66	1.91
3	60	144.23	141.95	2.28	142.98	1.25	142.09	2.14
4	90	128.17	126.66	1.51	126.87	1.30	126.23	1.94
5	120	110.23	110.41	0.18	109.37	0.86	109.04	1.19
6	150	93.90	96.68	2.78	93.62	0.28	93.72	0.18
7	180	90.23	95.04	4.81	90.56	0.33	91.33	1.10
8	210	106.00	109.78	3.78	106.80	0.80	107.30	1.30
9	240	130.60	133.57	2.97	130.94	0.34	131.52	0.92
10	270	159.67	162.83	3.16	158.86	0.81	159.84	0.17
11	300	178.80	180.94	2.14	177.83	0.97	178.26	0.54
12	330	178.00	177.14	0.86	177.87	0.13	176.95	1.05
最优点:			(160.00, 44.95, 76.70,		(160.80, 45.54, 77.66,		(160.07, 45.60, 77.42,	
$\bar{x}^* = (h_0, h_1, h_3,$			100.99, 49.47, -44.15,		100.12, 47.88, -44.01,		100.71, 48.37, -44.01,	
$h_4, s_0, s_4, \theta_{2i},$			-25.39, 2.78, 2.57,		-23.15, 2.84, 2.61,		-24.15, 2.82, 2.60,	
$i=1, 2, \dots, 12)^T$			2.28, 1.83, 1.22, 0.48,		2.31, 1.86, 1.26, 0.52,		2.29, 1.85, 1.24, 0.50,	
$\theta_{2i} - rad$			-0.32, -1.15, -1.98,		-0.30, -1.16, -1.98,		-0.32, -1.17, -2.01,	
			-2.70, -3.08, -3.30) ^T		-2.67, -3.03, -3.25) ^T		-2.68, -3.05, -3.27) ^T	
最优值 Q^*			84.6838		15.7643		44.9933	
起作用约束 $R(8) = 1 - x(1)$			1.1683×10^{-5}		-4.9877×10^{-4}		-4.5013×10^{-4}	
搜索总射线数目			33		58		76	
净机时			33.56秒		49.92秒		75.07秒	

来求解。

引入运动参数 θ_{1i} , $i=1, 2, \dots, 9$ 为设计变量。假想机构在球面副 B 处被拆分, 以 $D'-X_3(Y_3)Z_3$ 为参考坐标系从运动链 $3-0-1$ 假想运动链 $3-1$ 建立 K 点坐标的几何等同关系式有:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s_3 \end{pmatrix} + [C_{30}] \left\{ \begin{pmatrix} h_0 \\ 0 \\ s_0 \end{pmatrix} + [C_{01}] \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} \quad (32)$$

从运动链 $3-0-1$ 和杆 2 建立 B 、 C 两点定长的几何等同关系式有:

$$(X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2 + (Z_B - Z_C)^2 = l^2 \quad (33)$$

于是一种目标函数的解析式可表述如下:

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}, \theta_{0i}) = \sum_{i=1}^9 \{ & [(h_1 \cos \theta_{1i} + h_0) \cos \theta_{0i} + (s_0 \sin \alpha_{30} \\ & - h_1 \cos \alpha_{30} \sin \theta_{1i}) \times \sin \theta_{0i} - h_3]^2 + [(h_1 \cos \theta_{1i} \\ & + h_0) \sin \theta_{0i} - (s_0 \sin \alpha_{30} - h_1 \cos \alpha_{30} \sin \theta_{1i}) \cos \theta_{0i}]^2 \\ & + (h_1 \sin \alpha_{30} \sin \theta_{1i} + s_0 \cos \alpha_{30} - s_3)^2 - l^2 \}^2 \\ & + \{ [(\xi \cos \theta_{1i} - \eta \sin \theta_{1i} + h_0) \cos \theta_{0i} - (\xi \sin \theta_{1i} \\ & + \eta \cos \theta_{1i}) \cos \alpha_{30} \sin \theta_{0i} + (\xi + s_0) \sin \alpha_{30} \sin \theta_{0i} \\ & - X_i]^2 + [(\xi \cos \theta_{1i} - \eta \sin \theta_{1i} + h_0) \sin \theta_{0i} + (\xi \sin \theta_{1i} \\ & + \eta \cos \theta_{1i}) \cos \alpha_{30} \cos \theta_{0i} - (\xi + s_0) \sin \alpha_{30} \cos \theta_{0i} \\ & - Y_i]^2 + [(\xi \sin \theta_{1i} + \eta \cos \theta_{1i}) \sin \alpha_{30} \\ & + (\xi + s_0) \cos \alpha_{30} - s_3 - Z_i]^2 \} \end{aligned} \quad (34)$$

其中: $\theta_{0i} = \theta_{00} + \phi_i$ 。 θ_{00} 为 θ_0 的初始输入角, ϕ_i 为 θ_0 的角位移。而

$$\bar{x} = (h_0, h_1, h_3, l, s_0, s_3, \alpha_{30}, \theta_{00}, \xi, \zeta, \eta, \theta_{1i}, i=1, 2, \dots, 9)^T$$

形式上是二十维设计空间。

此时数学模型不包括等约束条件。至于四十个边界不等约束条件和十八个保证机构可动性的不等约束条件则从略。

本算例由指定初始点开始搜索。最优解为:

$$\begin{aligned} \bar{x}^* = & (0.3848, 0.8838, 0.9620, 0.7340, -0.1361, -0.0216, 3.5249, \\ & 0.6427, -0.2444, -0.6737, -0.3841, 1.9084, 0.8535, -0.3318, \\ & -0.2686, 4.3264, 3.8193, 3.4126, 3.0303, 2.5762)^T, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \theta_{1i} = \text{rad} \quad Q^* = 0.00255$$

表 4 R R S S 机构连杆轨迹坐标

点 位 号	期 望 轨 迹			实 际 轨 迹			誤 差		
	X_i	Y_i	Z_i	X	Y	Z	$ \Delta X $	$ \Delta Y $	$ \Delta Z $
1	1.00	0.50	0.50	0.990	0.515	0.509	0.010	0.015	0.009
2	0.74	0.34	0.74	0.758	0.343	0.738	0.018	0.003	0.002
3	0.16	0.27	0.72	0.180	0.279	0.714	0.020	0.009	0.006
4	-0.25	0.30	0.50	-0.270	0.301	0.489	0.020	0.001	0.011
5	-0.44	0.48	0.33	-0.463	0.472	0.322	0.023	0.008	0.008
6	-0.38	0.75	0.25	-0.386	0.744	0.250	0.006	0.006	0.000
7	-0.08	0.97	0.23	-0.062	0.959	0.237	0.018	0.011	0.007
8	0.38	1.00	0.26	0.393	0.980	0.263	0.013	0.020	0.003
9	0.80	0.79	0.34	0.802	0.790	0.340	0.002	0.000	0.000

当然, 由于 $Q^* \neq 0$ 故此时 θ_{1i} 并不精确满足给定结构参数下 $\theta_1 - \theta_0$ 之间固有的函数关系。因而求解连杆真实轨迹前还应依据输入—输出位移方程算出 θ_{1i} 的精确值。真实运动轨迹见表4。

考虑到 θ_{1i} 并非独立设计变量, 可以借助等约束方程消去, 于是构造出另一表述形式的数学模型:

$$Q(\bar{x}, \theta_{0i}) = \sum_{i=1}^9 \{ [h_1 \cos \theta_{1i} + h_0] \cos \theta_{0i} + (s_0 \sin \alpha_{30} - h_1 \cos \alpha_{30} \sin \theta_{1i}) \sin \theta_{0i} - h_3]^2 + [(h_1 \cos \theta_{1i} + h_0) \sin \theta_{0i} - (s_0 \sin \alpha_{30} - h_1 \cos \alpha_{30} \sin \theta_{1i}) \cos \theta_{0i}]^2 + (h_1 \sin \alpha_{30} \sin \theta_{1i} + s_0 \cos \alpha_{30} - s_3)^2 - l^2 \}^2 \quad (35)$$

$$E_i(\bar{x}, \theta_{0i}) = [(\xi \cos \theta_{1i} - \eta \sin \theta_{1i} + h_0) \cos \theta_{0i} - (\xi \sin \theta_{1i} + \eta \cos \theta_{1i}) \cos \alpha_{30} \sin \theta_{0i} + (\xi + s_0) \sin \alpha_{30} \sin \theta_{0i} - X_i]^2 + [(\xi \cos \theta_{1i} - \eta \sin \theta_{1i} + h_0) \sin \theta_{0i} + (\xi \sin \theta_{1i} + \eta \cos \theta_{1i}) \cos \alpha_{30} \cos \theta_{0i} - (\xi + s_0) \sin \alpha_{30} \cos \theta_{0i} - Y_i]^2 + [(\xi \sin \theta_{1i} + \eta \cos \theta_{1i}) \sin \alpha_{30} + (\xi + s_0) \cos \alpha_{30} - s_3 - Z_i]^2 \quad i=1, 2, \dots, 9 \quad (36)$$

该优化问题的整体提法是: 选取一组设计变量 $\bar{x}^*$, 使得在强制开式机构3—0—1之K点按给定轨迹运动以及满足所有边界约束的条件下B、C两点距离的偏差最小。

还可构造其它形式的数学模型。如将式(35)、(36)互换等等。实践表明, 特定的优化算法用来求解某种数学模型不一定就有效。因此同一优化问题多样的数学表述形式有助于扩

大解题的途径。

根据空间机构综合理论,按连杆位置及姿态的综合问题常常是将空间闭式机构假想地拆分成几个开式机构处理。这样其最优综合就转化为按末动杆的若干给定位置、姿态对开式机构的优化设计了。有关闭式机构的一些综合方法当然可以推广到开式机构,但由于后者自由度较多,也出现某些新特点。下面举例说明。

[例4] R—P—S开式机构优化设计。

图7给出了R—P—S开式机构简图及坐标系的设置。其中末动杆 n 和固定杆 f 分别固结着坐标系 $N-X_n(Y_n)Z_n$ 、 $O-X_f(Y_f)Z_f$ 。设表示末动杆在固定坐标系中位置的原点 N 的坐标 X 、 Y 、 Z 以及表示其姿态的方向余弦矩阵:

$$C_{fn} = \begin{pmatrix} u & r & l \\ v & s & m \\ w & t & n \end{pmatrix} \quad (37)$$

均已给定。

例中与运动副有关的运动参数有五个: θ_1 、 s_1 、球面副 C 处的三个欧拉角 θ 、 α 、 δ 。欲避开所有运动参数是困难的,故引入中间运动参数 s_{1i} 为设计变量。

由运动链1—2和假想运动链0— n 看 A' 、 C 两点的距离应相等。写出几何等同关系式建立目标函数得:

$$Q(\bar{x}) = \sum_{i=1}^p \{ h_1^2 + h_2^2 + 2h_1h_2 \cos \theta_2 + s_{1i}^2 - [(h_0 \cos \theta_0 + s_0 \sin \theta_0 \sin \alpha_{f0}) - (X + au + br + cl)]^2 + [(h_0 \sin \theta_0 - s_0 \cos \theta_0 \sin \alpha_{f0}) - (Y + av + bs + cm)]^2 + [(s_f + s_0 \cos \alpha_{f0}) - (Z + aw + bt + cn)]^2 \}^2 \quad (38)$$

将假想封闭形 $OCB'BA'AO'O$ 向 Z_0 轴投影,建立消去 S_{1i} 的等约束方程,得

$$E_i(\bar{x}) = (X + au + br + cl) \sin \theta_0 \sin \alpha_{f0} - (Y + av + bs + cm) \cos \theta_0 \sin \alpha_{f0} + (Z + aw + bt + cn) \cos \alpha_{f0} - h_2 \sin \theta_2 \sin \alpha_{01} - s_{1i} \cos \alpha_{01} - s_0 - s_f \cos \alpha_{f0} \quad i=1, 2, \dots, p \quad (39)$$

上两式中, p 是给定位置、姿态数目。而 $\bar{x} = (s_f, s_0, h_0, h_1, h_2, a, b, c, \theta_0, \alpha_{f0}, \alpha_{01}, \theta_2, s_{1i}, i=1, 2, \dots, p)^T$ 。

边界约束从略。

小 结

1. 本文例举的数值例子表明OPTIGO优化程序解算机构最优综合问题有较高的成功率,值得推广。

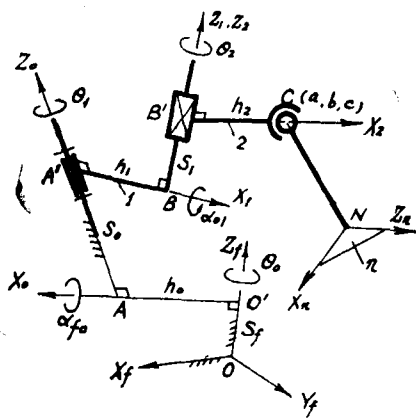


图 7

2. 由于等约束条件的引入, 使机构优化数学模型的表达形式大为丰富。因此能有效地处理等约束条件的非线性规划算法是机构(特别是空间机构)最优综合很值得研讨的课题。

3. 试算指出, 调用随机选择好始点子程序所花费的时间往往占整个运行机时的 $\frac{2}{3} \sim \frac{3}{4}$ 。对高维问题, 上述做法有时不现实。这种场合建议按文[1]、[2]介绍的线性迭加法对给定函数作插值逼近, 先找到初始点, 然后用最优化技术精化。本文作者有使用这种方法的成功算例。

4. 将中间运动参数作为形式上的设计变量引入数学模型给简化复杂多杆机构的最优综合带来明显的好处。但这样做会使计算耗用的机时增加。因此对简单机构并不排斥按照其它原则构造数学模型。

参 考 文 献

- [1] 张启先: “空间机构分析与综合” 华南工学院, 1980。
- [2] 张启先: “双动杆和三动杆开式机构的综合”, 上海海运学院, 1981。
- [3] R.C.Johnson: “Optimum Design fo Mechanical Elements”, second edition, 1980。
- [4] C.H.Suh、C.W.Radcliffe: “Kinematics and Mechanisms Design”, 1979。
- [5] 北京钢铁学院机械设计教研室: “机构最优化设计方法”, 北钢, 1979。
- [6] 汪萍: “机构综合最优化方法及程序设计”, 内蒙古工学院, 1979。

OPTIMUM SYNTHESIS OF MECHANISMS USING THE EXTERIOR PENALTY FUNCTION METHOD

Zong Guanghua Zhang Qixian

ABSTRACT

This paper at first describes briefly the main points of the exterior penalty function method and the features of the program OPTIGO. In using the exterior penalty function merhod in the optimum synthesis of mechanisms, special attention is paid to the establishment of mathematical models based upon identity conditions for motions of mechanisms. Through the illustration of several examples it is clear that the above method is worth applying to the optimal design of mechanisms.