

时变振动系统数值积分多步方法

高晓春 金芝英 张启先

(北京航空学院)

摘 要

本文利用加权残数法,首次获得了时变系统数值积分多步方法的一般形式,并进而推导出了可实际应用的二步方法。然后通过两例说明该方法在求解时变系统初值问题及周期时变系统稳态解方面的应用。

关键词: 时变振动系统; 加权残数法; 数值积分

1 前 言

在结构、系统的振动研究中,经常遇到如下形式的时变振动系统: (1)

$$M(t)\ddot{X} + C(t)\dot{X} + K(t)X = F(t)$$

$M(t)$ 、 $C(t)$ 和 $K(t)$ 分别称为系统的质量、阻尼及刚度矩阵; X 、 $\dot{X}$ 、 $\ddot{X}$ 和 $F(t)$ 分别为广义位移、速度、加速度及广义力向量。例如,高速弹性机构,在用有限元方法建立数学模型后,就是如式(1)所示的时变系统。[1,2]。一般说来,要获得方程(1)的分析解是不可能的,因此,研究如何用数值方法求解就显得十分必要并具有实际意义。

对时变系统(1)一般的处理方法是将它化成相应的分段常系数振动系统或其他可用形式,然后利用现有的数值积分方法求解。但这样不仅使问题复杂化,而且会给方程(1)的解带来固有误差。本文将直接从式(1)出发,推导求解时变振动系统初值问题的数值积分多步方法,并以两个例题说明所提出方法的应用。

2 多步数值积分方法

对常系数振动系统的初值问题,Zienkiewicz^[3]和Wood^[4]从另一角度出发,利用加权残差法获得了求解它们的多步方法。下面将这一思想推广应用到时变系统的情形,推导求解时变振动系统(1)初值问题的数值积分多步方法。为简便起见,将以二步方法为例说明这一推导过程。

在式(1)中,设

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= \sum_{i=n-1}^{n+1} N_i(t) \mathbf{X}_i \\
\mathbf{M}(t) &= \sum_{i=n-1}^{n+1} N_i(t) \mathbf{M}_i \\
\mathbf{C}(t) &= \sum_{i=n-1}^{n+1} N_i(t) \mathbf{C}_i \\
\mathbf{K}(t) &= \sum_{i=n-1}^{n+1} N_i(t) \mathbf{K}_i \\
\mathbf{F}(t) &= \sum_{i=n-1}^{n+1} N_i(t) \mathbf{F}_i
\end{aligned} \tag{2}$$

式中, $N_i(t)$ ($i=n-1, n, n+1$) 是拉格朗日插值函数, 具体表达式为:

$$\begin{aligned}
N_{n-1}(t) &= -\frac{t}{2h} \left(1 - \frac{t}{h} \right) \\
N_n(t) &= 1 - \frac{t^2}{h^2} \\
N_{n+1}(t) &= \frac{t}{2h} \left(1 + \frac{t}{h} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

h 为积分步长. 将式(2)及 $\mathbf{X}$ 对时间 t 的一、二阶导数代入式(1), 等式两边加权积分

$$\int_{-h}^h W \cdot [\sum N_i \mathbf{M}_i \cdot \sum \dot{N}_i \mathbf{X}_i + \sum N_i \mathbf{C}_i \cdot \sum \dot{N}_i \mathbf{X}_i + \sum N_i \mathbf{K}_i \cdot \sum N_i \mathbf{X}_i] dt = \int_{-h}^h W \cdot \sum N_i \mathbf{F}_i dt$$

式中 W 是加权函数. 将式(3)代入积分, 最后可得求解时变振动系统(1)初值问题二步方法的一般形式为:

$$\begin{aligned}
&\left\{ -\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{M}_{n-1} + (1 - \alpha_2) \mathbf{M}_n + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{M}_{n+1} + h \left[-\frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) \mathbf{C}_{n-1} \right. \right. \\
&+ \frac{1}{2}(1 + 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3) \mathbf{C}_n + \left. \frac{1}{4}(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3) \mathbf{C}_{n+1} \right] + h^2 \left[-\frac{1}{4}(\alpha_2 - \alpha_4) \mathbf{K}_{n-1} \right. \\
&+ \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \mathbf{K}_n + \left. \frac{1}{4}(\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4) \mathbf{K}_{n+1} \right] \Big\} \mathbf{X}_{n+1} + \left\{ (\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{M}_{n-1} \right. \\
&- 2(1 - \alpha_2) \mathbf{M}_n - (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{M}_{n+1} + h[(\alpha_2 - \alpha_3) \mathbf{C}_{n-1} - 2(\alpha_1 - \alpha_3) \mathbf{C}_n - (\alpha_2 + \alpha_3) \mathbf{C}_{n+1}] \\
&+ h^2 \left[-\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \mathbf{K}_{n-1} + (1 - 2\alpha_2 + \alpha_4) \mathbf{K}_n \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \mathbf{K}_{n+1} \right] \Big\} \mathbf{X}_n + \left\{ -\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{M}_{n-1} + (1 - \alpha_2) \mathbf{M}_n \right. \\
&+ \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{M}_{n+1} + h \left[\frac{1}{4}(\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3) \mathbf{C}_{n-1} - \frac{1}{2}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) \mathbf{C}_n \right. \\
&- \left. \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3) \mathbf{C}_{n+1} \right] + h^2 \left[\frac{1}{4}(\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4) \mathbf{K}_{n-1} - \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \mathbf{K}_n \right. \\
&- \left. \frac{1}{4}(\alpha_2 - \alpha_4) \mathbf{K}_{n+1} \right] \Big\} \mathbf{X}_{n-1} = h^2 \left[-\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{F}_{n-1} + (1 - \alpha_2) \mathbf{F}_n \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{F}_{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{4}$$

式中:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0} \int_{-1}^1 W \cdot \xi d\xi \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_0} \int_{-1}^1 W \cdot \xi^2 d\xi \\ \alpha_3 &= \frac{1}{\alpha_0} \int_{-1}^1 W \cdot \xi^3 d\xi \\ \alpha_4 &= \frac{1}{\alpha_0} \int_{-1}^1 W \cdot \xi^4 d\xi \\ \alpha_0 &= \int_{-1}^1 W d\xi \\ \xi &= \frac{t}{h}\end{aligned}$$

将上述二步方法推广就可得出, 时变振动系统(1)数值积分 k 步方法的一般形式可表示如下:

$$\begin{aligned}& \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k (\alpha_{ij}^m M_{n+1-j} + h\alpha_{ij}^c C_{n+1-j} + h^2\alpha_{ij}^k K_{n+1-j}) X_{n+1-i} \\ &= h^2 \sum_{i=0}^k \beta_i F_{n+1-i}\end{aligned}\quad (5)$$

式中, α_{ij}^m , α_{ij}^c , α_{ij}^k 和 β_i ($i, j=0 \sim k$) 为待定系数.

时变系统多步方法(4)和(5)看起来似乎冗长, 复杂, 但在计算机上执行是很容易、方便的.

3 系数的确定

在方程(1)的 k 步离散式(5)中, 各待定系数的值由它的截断误差及稳定性要求来确定. 同常系数振动方程类似, 时变系统 k 步方法(5)的截断误差列阵定义为:

$$\begin{aligned}L_k[X(t); h] &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k [\alpha_{ij}^m M(t + (1-j)h) + h\alpha_{ij}^c C(t + (1-j)h) \\ &\quad + h^2\alpha_{ij}^k K(t + (1-j)h)] X(t + (1-i)h) \\ &\quad - h^2 \sum_{i=0}^k \beta_i [M(t + (1-i)h) \ddot{X}(t + (1-i)h) \\ &\quad + C(t + (1-i)h) \dot{X}(t + (1-i)h) \\ &\quad - K(t + (1-i)h) X(t + (1-i)h)]\end{aligned}$$

将上式中质量、阻尼、刚度矩阵以及广义位移、速度、加速度向量分别在时刻 t 点展开成相应的矩阵幂级数, 然后按步长 h 的各级幂合并同类项, 最后可以将截断误差矩阵表示为步长 h 的矩阵幂级数. 其中, h 各次幂前的系数矩阵是质量、阻尼、刚度矩阵或它们的导数与广

义位移或其导数的乘积的线性组合, 线性组合的系数是式 (5) 中待定系数的线性表达式。如果令 $h^0 \sim h^{p+1}$ (p 为一正整数) 各次幂的系数矩阵中, 各矩阵乘积前的系数均为零, 则可获得一关于式 (5) 中待定系数的线性代数方程组, 再加上稳定性条件等就可确定这些系数的值。此时, 该 k 步方法截断误差列阵为 $O(h^{p+1})$, 我们称该方法为 p 阶的。

根据上述过程, 可得二步方法 (4) 的截断误差列阵为:

$$L_2[\mathbf{X}(t); h] = -\alpha_1 \ddot{\mathbf{M}}(t) \ddot{\mathbf{X}}(t) h^3 + \left[\frac{1}{12} (1 - 6\alpha_2) \ddot{\mathbf{M}}(t) \mathbf{X}^{(4)}(t) - \alpha_2 \dot{\mathbf{M}}(t) \ddot{\mathbf{X}}(t) + \frac{1}{6} (1 - 3\alpha_2) \mathbf{C}(t) \ddot{\mathbf{X}}(t) \right] h^4 + O(h^5)$$

所以, 为了使二步方法 (4) 是二阶的, 令 $\alpha_1 = 0$ 。

理论上, 要分析方法 (4) 的稳定性是很困难的。但我们可以看出, 如果时变系统 (1) 的系数矩阵均为常数阵 (实际上变成一常系数振动系统) 时, 该方法 (4) 就蜕化成众所周知的 Newmark- β 方法, 这时取 $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2\beta \geq \frac{1}{2}$ 是无条件稳定的, 而且, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ 时精度最好。另外, 在时变系数矩阵情况下, 当二步方法 (4) 中各系数按下式 (6) 取值时, 至少可以期望在系数矩阵变化不太剧烈的情况下仍保持稳定性和良好的精度。这从下节例题的分析计算中也可得到证实。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 &= \alpha_4 = 2\beta, \quad \beta \geq \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

4 应用及例题分析

初值问题一般预先给定初始位移和速度, 因此, 用多步方法 (5) 逐步积分时, 同样涉及到起始步骤。对二步方法 (4) 而言, 由式 (2) 的第一式求导并令 $n=0$ 可得:

$$\dot{\mathbf{X}}_0 = \frac{1}{2h} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_{-1}) \quad (7)$$

利用该式及式 (4) (令 $n=0$) 就可消去 $\mathbf{X}_{-1}$, 求出 $\mathbf{X}_1$ 。求出以后就可直接利用式 (4) 从 $n=1$ 开始逐步积分。

对周期时变振动系统的稳态解, 作者以数值积分多步方法为基础, 曾提出了一种有效的闭式算法^[2]。本文所提出的多步方法也可以应用于该闭式算法中。例如, 二步方法 (4) 的第 i 步积分式 (即在式 (4) 中令 $n=i$) 可简洁地表示为:

$$\mathbf{A}_{i+1,i}^{i+1} \mathbf{X}_{i+1} + \mathbf{A}_{i,i}^{i+1} \mathbf{X}_i + \mathbf{A}_{i-1,i}^{i+1} \mathbf{X}_{i-1} = \mathbf{Q}^{i+1} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{A}_{i+1,i}^{i+1}$, $\mathbf{A}_{i,i}^{i+1}$ 和 $\mathbf{A}_{i-1,i}^{i+1}$ 分别是式 (4) 中 $n=i$ 时 $\mathbf{X}_{i+1}$, $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{X}_{i-1}$ 前的系数矩阵, $\mathbf{Q}^{i+1}$ 表示此时等号右边的向量。而式 (8) 就是文 [2] 中闭式算法所要求的形式, 因此方法 (4) 可以直接应用到这一闭式算法中, 用来求周期时变系统的稳态解。

下面将以两个例题来说明本文所提出的二步方法 (4) 在上述两方面的应用。在下面的例题中, 方法 (4) 的系数按式 (6) 中前两式取值。

例1. 求解如下时变二阶微分方程初值问题:

$$\ddot{x} + 0.1(2 + \sin 10t)\dot{x} + (2 + \sin 10t)^2 x = 2 \sin 10t \quad (9)$$

$$x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0$$

计算结果如图1所示, 图中给出了四种情况下的计算曲线. 步长 $h=0.05$ ($\beta=0$ 和 0.25)时, 计算结果同 $h=0.005$ 时相差不大, 表示在图1中, 两者的差别几乎显不出来. 此外, 如果步长 $h=0.5$, 则当 $\beta=0$ 时计算数值不稳定, 但当 $\beta=0.25$ 时, 计算是稳定的, 但精度不能满足要求.

例2. 一平面四杆弹性机构, 曲柄以转速 $n=400$ 转/分顺时针匀速转动, 各构件材料均为铅. 构件长度及截面尺寸如下:

机架: $L_1=25.4$ 厘米

曲柄: $L_2=10.16$ 厘米, 2.54×0.42 厘米²

连杆: $L_3=27.94$ 厘米, 2.54×0.16 厘米²

摇杆: $L_4=26.67$ 厘米, 2.54×0.16 厘米²

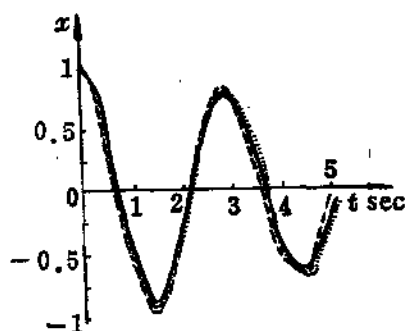


图1 初值问题(9)的解(例1)

曲柄和连杆及连杆和摇杆之间轴承的重量均为27.22克. 在用混合梁单元建立了该机构的数学模型^[1]后, 联合应用本文所提出的二步方法(4)和文[2]中的闭式算法来求该机构的稳态响应. 连杆和摇杆中点的稳态应变随曲柄输入角 θ :(按顺时针计算)变化的计算结果分别如图2, 3, 所示, 分析计算时, 曲柄作为一个单元, 连杆和摇杆均被等分成两个单元, 机构的一个运动循环划分为四十等分. 物理阻尼矩阵的取法与文[5]相同, 即:

$$C_{ii}^p = 2\xi_i \sqrt{k_{ii}/m_{ii}}$$

$$C_{ij}^p = 0, \quad i \neq j$$

式中阻尼比 ξ_i 均取为0.02.

在图2、3中, 为便于比较起见, 还给出了在闭式算法中采用梯形法则^[2]的计算结果以及Alexander^[6]的实验结果.

值得指出的是图2、3中所显示的是式(6)中 $\beta = \frac{1}{4}$ 时的计算结果, 当 $\beta < \frac{1}{4}$ 时, 计算数值是不稳定的. 从图中可以看出, 本文的计算结果与文[2]的结果相差不大, 均与实验结果符合得比较好, 但前者略优.

需要说明的是, 对文[2]中所采用的数值积分二步方法——梯形法则, 通过本文第三节所述的过程可以证明, 它的截断误差阵为:

$$L[X(t); h] = h^2 [2\dot{M}(t)\dot{X}(t) + \ddot{M}(t)X(t) + \dot{C}(t)X(t)] + O(h^3) \quad (10)$$

由此可知, 一般情况下其截断误差比本文的方法(4)低二阶, 所以后者精度高. 但在本例题中, 由于采用混合梁单元建立机构数学模型时的质量矩阵是一常数矩阵^[1], 式(10)中前两项

就不存在, 所以由于阻尼矩阵影响较小而出现了图 2, 3 中所示的两种方法计算结果相近的情况。

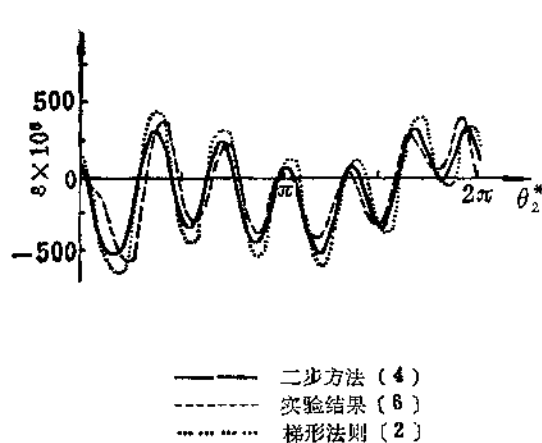


图 2 连杆中点的应变(例 2)

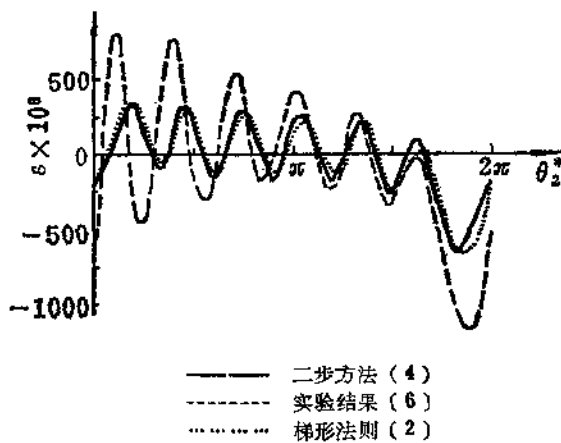


图 3 摇杆中点的应变(例 2)

5 结 束 语

本文对时变振动系统的数值积分求解问题第一次作了比较深入的研究, 将推导常系数振动系统数值积分多步方法的加权残数法推广应用到时变系统的情形, 获得了时变振动系统数值积分多步方法的一般形式, 并推导出一实用的二步方法. 该二步方法不但可以用来求解时变振动系统初值问题, 而且可以结合作者以前提出的闭式算法来求周期时变振动系统的稳态解。

参 考 文 献

- [1] 高晓春, 金芝英, 张启光, “建立高速平面弹性机构数学模型的一种高效方法”, 北京航空学院三十三周年校庆宣读论文, 1985, 10.
- [2] 高晓春, 金芝英, 张启先, “求解高速弹性机构稳态响应的闭式线性多步方法”, 北京航空学院学报, 1987年2期153~162页.
- [3] O. C. Zienkiewicz, “A New Look at the Newmark, Houbolt and Other Time stepping Formulae. A Weighted Residual Approach”, University of Wales, Swansea, Civil Engineering Dept. Report C/R/273/76.
- [4] W. L. Wood, “A Further Look at Newmark, Houbolt, etc., Time-Stepping Formulae”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp. 1009~1017 (1984).
- [5] K. M. Alexander and K. L. Lawrence, “An Experimental Investigation of the Dynamic Response of an Elastic Mechanism, ASME, Journal of Engineering for Industry, Feb. 1974, pp. 268~274.