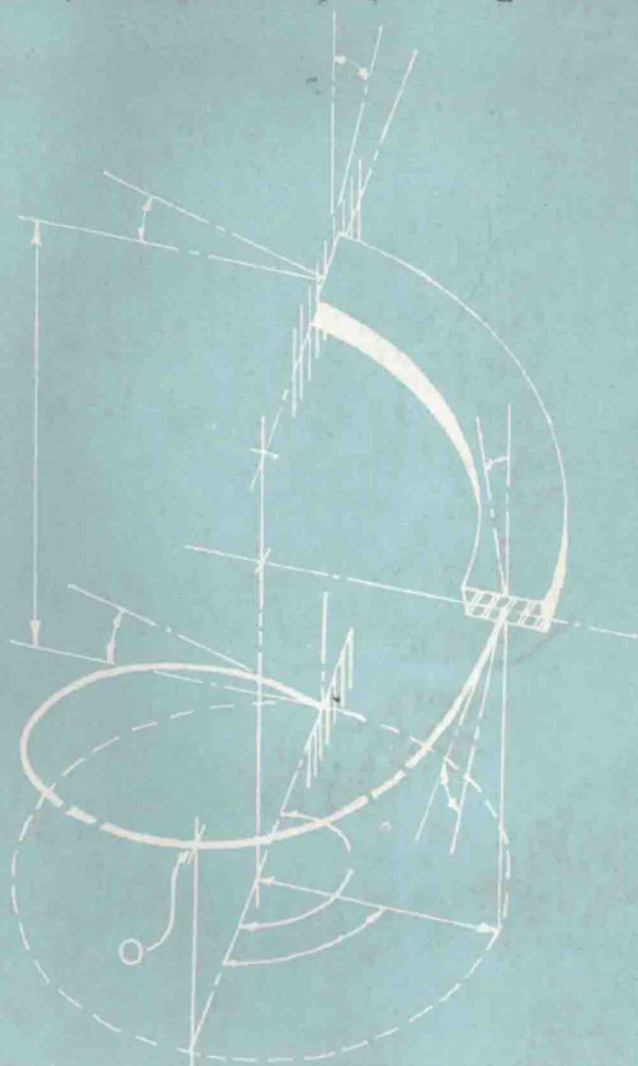


螺旋楼梯译文集



中国人民解放军空军工程设计研究局

螺旋楼梯译文集

高 厚 宽 译
曹 予 丰 校

空军工程设计研究局

译者前言

随着我国新建的大型公共建筑日益增多，螺旋楼梯的采用也逐渐普遍。这种建筑形式不仅造型优美而且也能节约空间，体现了美观实用的原则。

由于这种形式的结构为多次超静定空间结构，其内力分析十分复杂，不少结构设计人员希望能通过一些简便实用的方法来进行分析计算。我国现行有关螺旋楼梯的设计方法其算式大部引自本译文集中所收集的论文中。这些文献虽然发表的时间比较早，但因新的论著尚不多见，故至今在国内外有关螺旋楼梯分析的著作中将此奉为经典。

为便于结构专业设计人员熟悉和掌握现行的这些方法并作到心中有数，故将所收集文献的主要部分全文译出，对其中已发现的错误进行了改正。这些文献中不但有算式的简化假定、推导过程、适用情况、分析比较，而且有的还附有图表可供查找，或载有算例可供借鉴。一般来说都力求避免冗长繁琐的纯理论性推导，因而比较适用。

1987年10月

目 录

一、钢筋混凝土螺旋楼梯.....	伯 曼 (1)
提 要.....	(1)
设计步骤.....	(1)
扭转剪应力的计算.....	(4)
抗剪设计.....	(7)
纵向钢筋.....	(8)
支座设计.....	(8)
参考文献.....	(8)
二、螺旋楼梯的设计与施工.....	麦托克 (10)
三、螺旋梁在对称荷载作用下的分析.....	霍尔姆司 (16)
提 要.....	(16)
前 言.....	(16)
两端固定螺旋梁作用有均布荷载时的算式推导.....	(20)
一般方程的常数的解法.....	(26)
两端固定螺旋梁中点作用有一集中荷载时的算式推导.....	(28)
两端固定螺旋梁中点作用有均布荷载时的垂直位移表达式的推导.....	(30)
用于 $\alpha=\pi$ 时的特殊解.....	(33)
用于 $\alpha=3\pi/4$ 时的特殊解.....	(34)
用于 $\alpha=\pi/2$ 时的特殊解.....	(35)
图形及表格表明了.....	(38)
修正的极惯性矩在J中变化的影响.....	(39)
结束语.....	(40)
参考文献.....	(40)
四、螺旋楼梯设计.....	科 恩 (42)
平衡的一般微分方程.....	(42)
方程的应用.....	(46)
数字算例.....	(52)
静不定情况.....	(55)
变形及转角的一般微分方程.....	(56)
圆形螺旋一般方程的应用.....	(58)
应 用.....	(62)
两端固定的圆形螺旋梁.....	(63)
算 例.....	(70)
两端固定及两端简支楼梯的比较.....	(73)

一端固定及一端铰接的圆形螺旋梁	(75)
算 例	(81)
参考文献	(83)
五、螺旋楼梯分析的比较	摩 根 (85)
端部简支楼梯的分析	(85)
端部固定楼梯的分析	(88)
参考文献	(89)
六、对摩根《螺旋楼梯分析的比较》一文意见	库 森 斯 (90)
七、均布荷载作用下的螺旋梁中的内力	司考地立斯 (91)
分析解法	(92)
用于计算在跨中的赘余力的成果	(99)
最大弯矩及扭矩	(101)
小 结	(103)
参考文献	(103)
八、对司考地立斯《均布荷载作用下的螺旋梁中的内力》一文的讨论	伯 曼 等 (105)
伯 曼	(105)
基迪士立	(108)
哈 勃	(108)
原作者的结束语	(109)
补充参考文献	(113)
九、螺旋楼梯研究	库 森 斯
	塞派治 屈拉罗杰那 (114)
弹性分析比较	(114)
原型及模型楼梯的设计	(117)
模型楼梯的施工及试验	(121)
试验结果的分析与讨论	(121)
结 论	(125)
今后工作	(125)
参考文献	(126)
十、支座固定的螺旋楼梯设计图表	库 森 斯
	撒克达 圣塔萨达普 (127)
图表应用示例	(129)
参考文献	(135)

钢筋混凝土螺旋楼梯

伯 曼

(V.R. Bergman)

提 要

螺旋楼梯中关于扭矩、弯矩和剪力的计算，通常较直线楼梯困难得多。如果将螺旋楼梯转换成其水平投影，由于将楼梯分析成端部固定、作用荷载垂直于曲率平面的曲线形梁上，问题就变得容易处理。

本论文包括确定螺旋楼梯的弯矩、扭转剪应力、受剪钢筋、纵向钢筋以及支座设计等。

近年来已可看到建造仅支承在顶部及底部的钢筋混凝土曲线形楼梯。^{1, 2} 由于这些楼梯曲线的水平面投影通常表现为圆曲线，因此这类结构的专用名称为“螺旋楼梯”。

螺旋楼梯中关于扭矩、弯矩以及剪力的分析，通常较直线楼梯困难得多。然而，如果对曲线形楼梯的分析容许采用如同对直线形楼梯的相同对策时——将螺旋楼梯转换成其水平投影而计算——由于将楼梯分析成端部固定、作用荷载垂直于曲率平面的曲线形梁，问题就变得容易处理。

在梯段板的任一截面通常存在：一弯矩、一扭矩及一垂直剪力。然而，在整个跨度上作用有均布荷载的通常设计条件下，荷载及结构的对称决定了在跨中截面的扭矩及垂直剪力必须等于零。这样，就计算弯矩、扭矩和剪力而言，仅剩下要确定该截面的弯矩，用静定结构分析就可取得。

设计步骤

对端部固定、中心线半径不变为 R 的曲线形梁，可应用最小功法^{3, 4}导出其跨中弯矩 M 的表达式如下：

$$M_c = wR^2 \left[\frac{2(K+1)\sin\theta - 2K\theta\cos\theta}{(K+1)\theta - (K-1)\sin\theta\cos\theta} - 1 \right]$$

式中

θ = 全部弧心角的一半(图1)

$K = EI/GJ$ ，为抗弯刚度与抗扭刚度之比

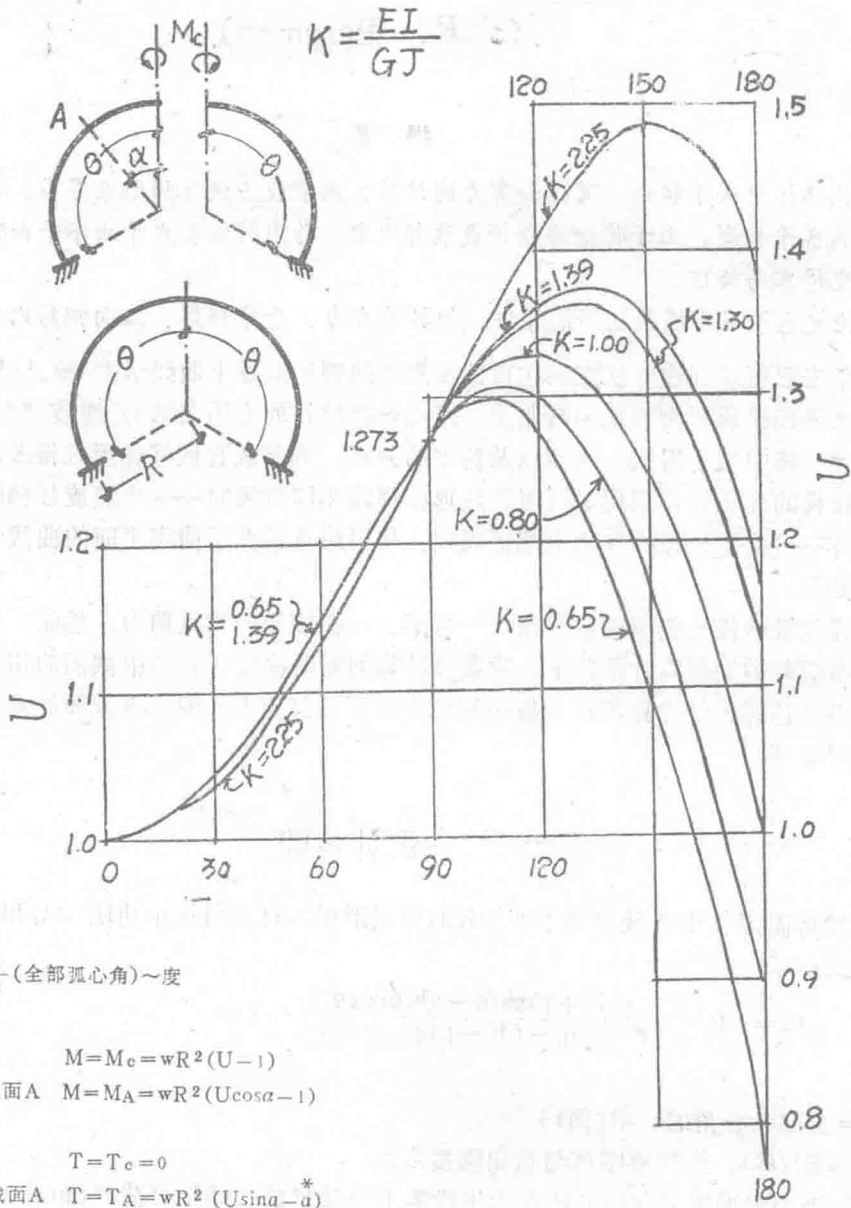
w = 沿曲线形梁纵向中心线在水平投影上每英尺跨长的全部荷载(恒载+活载)

M_c 的算式可以简写成：

$$M_c = wR^2(U-1)$$

式中U代表表达式括号内的小数部分。可以看出它仅是K及 θ 的函数。对于任一特定的梯段板截面，K可以从表1查得。与K值及给定的 θ 角相对应的U值，于是可以从图1的曲线中读出，也可以通过计算求得。

荷载：均匀分布在全跨。



$\theta = \frac{1}{2}$ (全部弧心角) ~ 度

弯矩M:

在跨中 $M = M_c = wR^2(U - 1)$
 在任意截面A $M = M_A = wR^2(U \cos \alpha - 1)$

扭矩T:

在跨中, $T = T_c = 0$
 在任意截面A $T = T_A = wR^2(U \sin \alpha - \alpha)$

竖向剪力 $V = wR\alpha$ (跨中=0)

注: α 以弧度计(1弧度=57.3°)

图1—与U和 θ 相对应的K值变化曲线

表1 宽度为b厚度为h的矩形截面的K值*

$b \geq h$		$h \geq b$	
b/h	K	h/b	K
1.0	1.39	1.0	1.39
1.2	1.18	1.2	1.70
1.5	1.00	1.5	2.25
2.0	0.86	2.0	3.42
2.5	0.79	2.5	4.92
3.0	0.75	3.0	6.70
4.0	0.70	4.0	11.15
5.0	0.68	5.0	16.85
7.0	0.65	...	...
10.0	0.63	...	...
∞	0.59	...	...

*假设: $E/G=2.35$

已知U值, 就能很快地求出 M_c 。同样, 通过图1给出的表达式很快可以求得位于从跨中算起、角度为 α 的任一截面A的弯矩 M_A 及扭矩 T_A 。

算例

为了说明设计步骤, 提供了下面的数字算例。

假设:

梯段板宽=6ft.

梯段板内径=6ft.

梯段板的平均法向厚度=10in.

水平投影上的全部荷载(恒载+活载)=275psf

全部弧心角= $2\theta=140^\circ$

解答:

$$w=6.0 \times 275=1650 \text{ lb./ft.}$$

$$\text{中心线半径}=R=6.0+6.0/2=9.0\text{ft.}$$

$$\text{梯段板宽与板厚比值}=b/h=6 \times 12/10=7.2$$

从表1读出: 当 $b/h=7.2$ 时, $K=0.65$

从图1, 当 $K=0.65$, $\theta=70^\circ$ 时, 查得 $U=1.20$

于是,

$$M_c=wR^2(U-1)=1650 \times 9^2(1.20-1)=26,700 \text{ ft.-lb.}$$

在支座, $\alpha=\theta=70^\circ=1.222 \text{ rad}$; $\sin \alpha=0.940$; $\cos \alpha=0.342$

$$M_s=wR^2(U \cos \alpha-1)=1650 \times 81(1.20 \times 0.342-1)=-78,900 \text{ ft.-lb.}$$

$$T_s=wR^2(U \sin \alpha-\alpha)=1650 \times 81(1.20 \times 0.940-1.222)=-12,600 \text{ ft.-lb.}$$

$$V_s=wR\alpha=1650 \times 9.0 \times 1.222=18,150 \text{ lb.}$$

这些M, T, 及V的值, 连同沿板跨的若干间隔点用同样方法计算所得的其它M, T及V值, 绘制出如图2所表示的曲线。

作者想要强调一下: 所提供的跨中弯矩 M_c 算式以及图1的曲线, 仅限于全跨作用有均布

荷载的一般情况。集中荷载以及均布荷载在圆弧上产生的弯矩及扭矩，可以直接由米克洛司 (Michalos) 的《曲线形大梁构架的数字分析》⁵ 的表3及4给出。

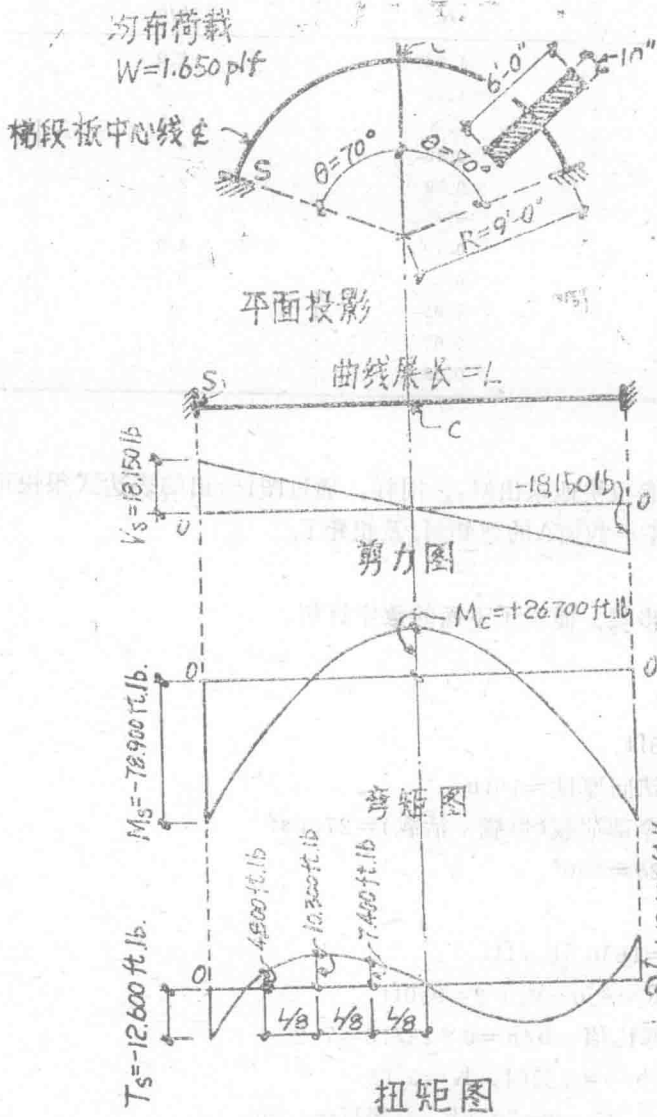
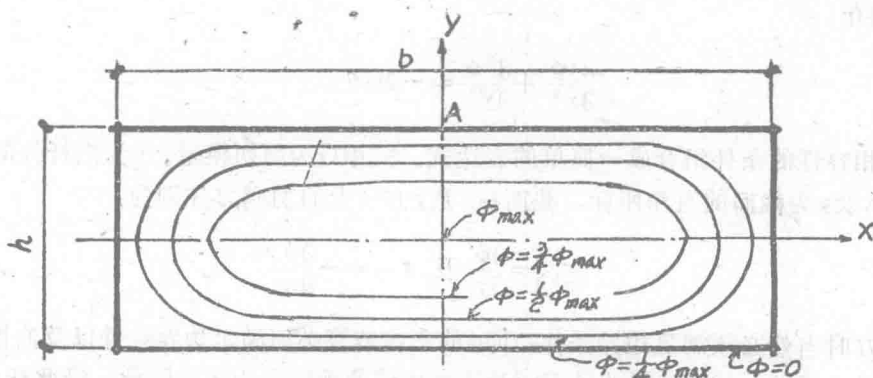


图2—算例中的V，M，及T特性曲线图

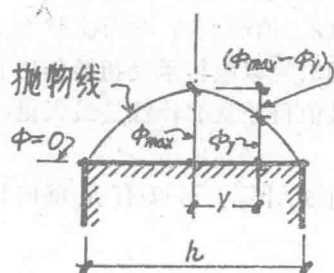
此外，没有必要假定楼梯与其水平投影是等同的。虽然作者认为此假定用于中等尺度的螺旋楼梯的实际分析比较方便和有足够的精确度。然而，在计算大型及宏伟的结构时，建议不用作者提出的简化方法。精确的分析方法见参考文献6及7。

扭转剪应力的计算

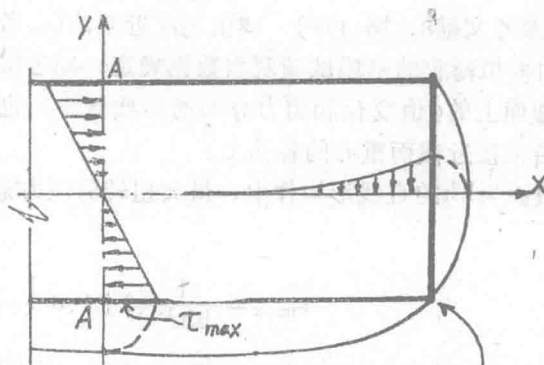
正确确定承受扭转矩的非圆形等截面杆件中的扭转剪应力的方法，首先是由圣维南 (Barré de St. Venant) 实现的，该方法由伯来特 (L. Prandtl) 在偏微分方程中引进一应力



ϕ - 等值线



截面 A-A



$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. 在角处

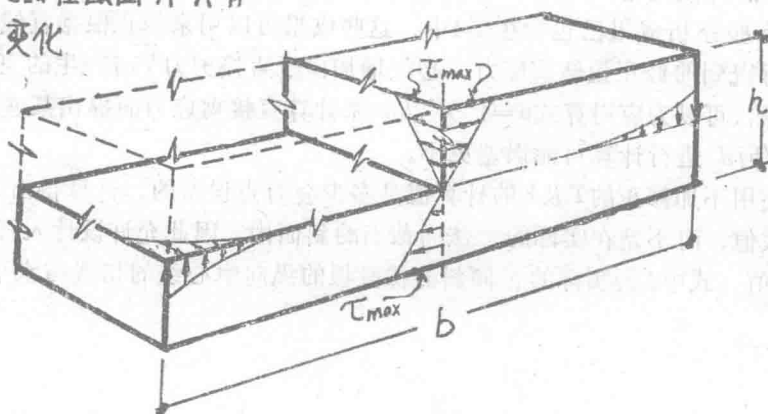
剪应力

$$\frac{\phi_{\max} - \phi_y}{\phi_{\max}} = \frac{y^2}{(\frac{h}{2})^2} = \frac{4y^2}{h^2}$$

$$\phi_y = \phi_{\max} (1 - 4y^2/h^2)$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(-\frac{8\phi_{\max}}{h^2} \right) y \quad \text{或} \quad \tau_{zx} \propto y$$

于是 τ_{zx} 在截面 A-A 有 - 直线变化



剖视图

图3—扭转剪应力

函数 ϕ 而加以简化。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

该式将平衡及相容性的条件组合成一简单的表达式。式中 G 为剪切模量， θ 为沿杆件的单位长度扭转角， x 及 y 为截面的直角坐标。截面在 x 及 y 方向上的剪应力分别为：

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{及} \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

因此，计算应力时当然必须满足边界条件；即 ϕ 的正确解答必须满足边界条件以及泊松(Poissonian)方程。通常，等截面杆的外露面及边界表面的剪应力为零；因此，沿此杆件截面周边的 ϕ 值将等于一任意常数，为方便起见该常数将取等于零(图3)。 ϕ 值可由弹性力学的经典计算方法(参考文献8，第11章)，或由逐次近似法(参考文献8，第468页；参考文献9，第5.6节)，或由模拟薄膜的皂膜试验观察数据确定。通过研究图3，可以取得承受扭转作用的直线形构件在截面上的 ϕ 值变化和剪力分布的某些概念。也许最值得注意的特性是最大扭转剪应力发生在沿最接近截面重心的各边上。

在矩形截面为 bh 的直线形构件中，最大扭转剪应力通过下式计算，可以有足够的精确度

$$\tau_{\max} = \frac{T}{bh^2} \left(3 + 1.8 \frac{h}{b} \right) \quad b \geq h$$

(式中 T 为扭转矩)，或应用参考文献8的第277~278页的数据可取得更高的精确度。此值是出现在截面长边的中心的 τ_{zx} 值。在截面的 b/h 比值 ≥ 3 的直线形构件中，平行于短边的最大扭转剪应力近似等于沿长边的75%。

对剪应力的讨论至此已只限于直线形构件。实际上，梯段板是急弯的曲线形构件，利用前面的直线形构件的算式来计算曲线形构件的剪应力，必然会有误差。曲率的主要影响是沿里侧垂直边缘增加、而沿外侧垂直边缘减少扭转剪应力。高纳(Göhner)¹⁰已分析了曲率对剪应力的影响；他的有些分析成果已包含在图4中，这些成果可以用来修正根据直线形构件算得的剪应力。为此而得到的修正扭转剪应力，必须增加由于直接剪力 V 而产生的垂直剪应力，取其代数和。虽然，可以为应用算式 $v = 1.5V/bh$ 来计算直接剪应力而提出某些理由，但应用常用算式 $v = V/bjd$ 进行计算可能误差更小。

应该注意到，使用不加修正的 T 及 V 的计算值是多少会有点误差的。计算得出的 T 及 V 值是在垂直平面内的数值，而不是在实际的、法向截面的斜面内。因此允许设计人可以通过乘以 $\cos \lambda$ 而减少 T 及 V 值，式中 λ 为实际的、倾斜的梯段板的纵向中心线的切线与水平线之间的垂直坡角。

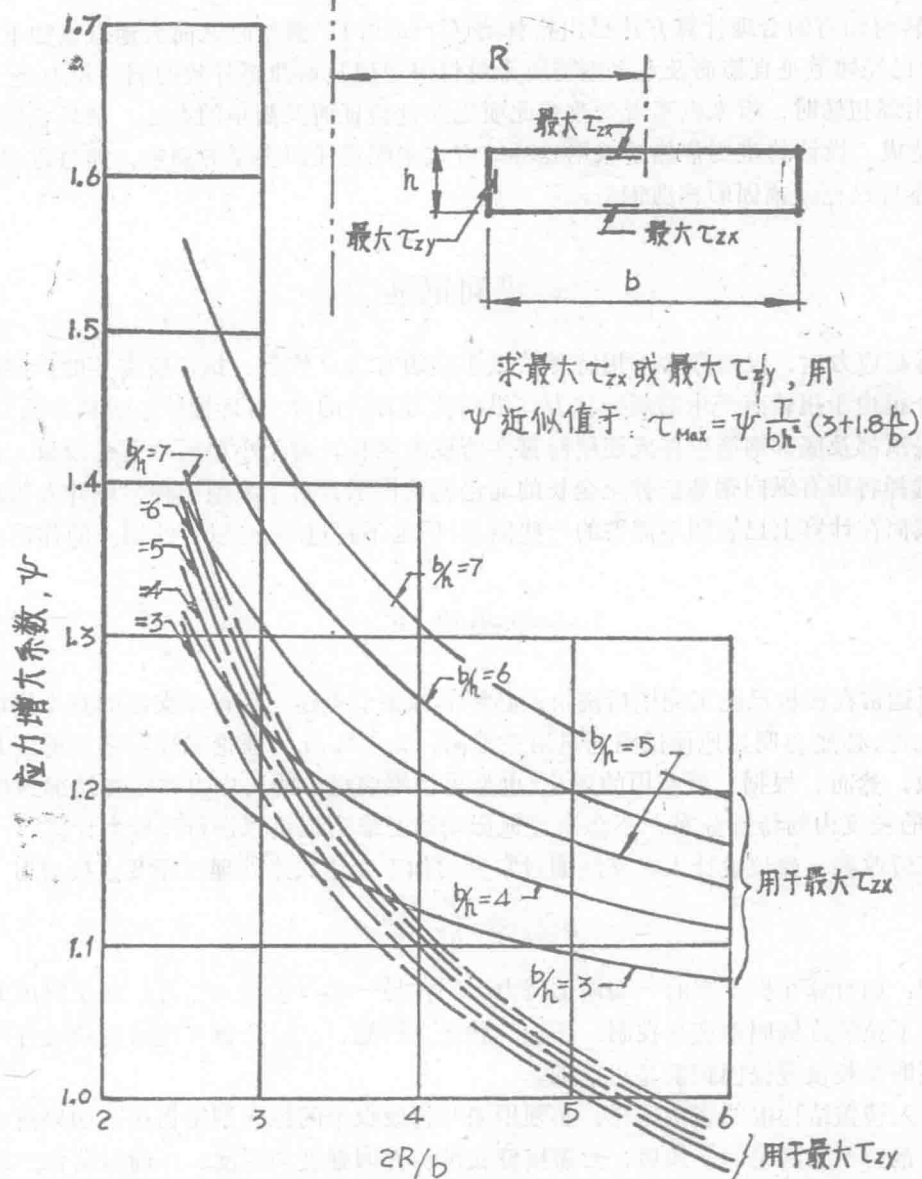


图4—由于曲率而发生的最大剪应力的增大

抗剪设计

在曲线形梁或板中提供足够的受剪钢筋是极为重要的。甚至在沿全长作用有均布荷载的梯段板的跨中，虽然计算剪力等于零，但也非常需要设置若干受剪钢筋，其数量假定是沿跨度任何一处计算所得的最大受剪钢筋量的一半。有些设计人设置的最大计算受剪钢筋遍及全跨而不予减少。

如果梯段板或其它矩形截面构件承受过大的扭矩，破坏很可能出现在靠近长边中间的斜

向裂缝的缝隙开始,与构件纵向轴线形成的夹角接近 45° 。与普通钢筋混凝土梁一样,这些裂缝均为斜向拉力所导致的结果。

抗扭转而加筋的合理计算方法已由格林特(Grinter)¹¹清楚而又简要地叙述如下:

“由于已经知道垂直箍筋及水平钢筋用来对付因剪切及弯曲而导致的斜向拉力是十分有效的;当出现扭转时,看来也不需要改变此项已经过验证而又简单的办法。破坏仍然由于斜向拉力所造成。设计的准则依然是采用这样的方式来配置任何类型的箍筋,即每道裂缝至少通过一根本身已充分锚固的抗剪钢筋。”

纵向钢筋

计算弯矩应力时,没有必要采用特殊的或非常的方法。然而,抗弯所需要的纵向受拉钢筋也必须分担由于扭转而产生的斜向拉力在纵向拉力方向的分力;环箍仅承受横向的分力。¹²

有一些顶部及底部钢筋应作成连续而贯穿跨度的全长。对于小型或中型梯段板,设计人可以适当选择将所有纵向钢筋延伸至全长的简化构造作法;对于大型楼梯,设计人可以选用切断某些截面在计算上已表明不需要的一些钢筋(假定不超过50%)以节约钢材的作法。

支座设计

梯段板通常在楼板已施工完毕后浇筑。必要的施工节点连同在每个支座的整个梯段板接建部分的急弯,必然会明显地使试图通过用圣维南(St. Venant)理论来计算端部剪应力的作法成为无效。然而,根据一项有用的理论(也是由圣维南提出的),应力在距离端部约等于梯段板宽度 b 的长度内的特殊分布,不会明显地影响用圣维南理论来进行的应力计算。

为了有所改善,建议设计人在支座通过常见的如下表达式来处理扭矩及直接剪力

$$p = \frac{V}{b} \pm \frac{6T}{b^2}$$

此算式表明:如打算在板支座的一端增加压力,则在另一端产生反向压力。此反向压力必须用外加的向下拉筋或锚固钢筋来控制。作为一种安全措施,在每个板支座的两端或者甚至沿每个板支座的全长设置锚固钢筋是可取的。

牢固锚入楼盖结构中的连接钢筋,必须用来与梯段板中的纵向钢筋搭接,如果简单地延长楼板中的钢筋不能满足时。最后,必需核算支承构件的强度和刚度,以确保结构实现设计分析所设想的端部固定程度。

参 考 文 献

1. Magnel, G., "Revolutionary Staircases Built of Prestressed Concrete," *Civil Engineering*, V. 21, No. 9, Sept. 1951, pp. 25-27, with discussions in No. 11, Nov. 1951, p. 56; V. 22, No. 2, Feb. 1952, p. 52, and No. 5, May 1952, P. 56.
2. Bourne, N. B., "Rapid Concrete Construction in Spain," *Concrete and Constructional Engineering* (London), V. 45, No. 10, Oct. 1950, pp. 357-362.
3. Oosterblom, I., "Bending and Torsion in Horizontally Curved Beams,"

ACI JOURNAL, May 1932, **Proc.** V.28, pp.597-606.

4. Bergman, Victor R., "Derivation of Formula for Midspan Bending Moment, "unpublished. Available from ACI headquarters at cost of reproduction.
5. Michalos, James P., "Numerical Analysis of Frames with Curved Girders, " **Proceedings**, ASCE, V.79, Separate No.250, Aug.1953.
6. Baron, Frank, and Michalos, James P., "Laterally Loaded Plane Structures and Structures Curved in Space, " **Transactions**, ASCE, V. 117, 1952, pp.279-316.
7. Michalos, James P., "Analysis of Skewed Rigid Frames and Arches, " **ACI JOURNAL**, Feb.1952, **Proc.** V.48, pp. 437-456.
8. Timoshenko, S., and Goodier, J.N., **Theory of Elasticity**, McGraw-Hill Book Co, Inc., New York, 2nd Edition, 1951.
9. Salvadori, M.G., and Baron, M, L, **Numerical Methods in Engineering**, Prentice-Hall, New York, 1952.
10. Göhner, O., "Die Berechnung Zylindrischer Schraubenfedern, " **Zeitschrift VDI**(Berlin), V.76, Mar.12.1932, pp269-272.
11. Grinter, L.E., Discussion of "Design of Reinforced Concrete in Torsion, "by Paul Andersen, **Transactions**, ASCE, V.103, 1938, p.1512.
12. Reynolds, C.E., **Reinforced Concrete Designers, Handbook**, Concrete Publications Ltd., London, 3rd Edition.1945. pp.284-285.

螺旋楼梯的设计与施工

麦托克

(A. H. Mattock)

伦敦一女帽及头饰批发有限公司在某大街上新建的一栋建筑中，建筑师设法在底层与二层之间建造一座造型令人喜爱的单跑螺旋楼梯作为上下两层陈列室之间的主要联系(图1)。该梯也用作时装模特儿的通道，螺旋楼梯的路线能使模特儿们以优美的姿态从上面的更衣室进入楼梯的下降坡道。



图 1

楼梯在上下层之间无中间支承, 其垂直距离为13ft., 旋转角为294°。梯段宽4ft. 8in., 中心直径正好也为4ft. 8in., 最小厚度为7in.。

螺旋楼梯起源处的地面板以及支承楼梯顶部的横梁的柔度使螺旋梯段板不能作为两端完全固定来设计。因此假定无论是顶部或底部支座均无绕水平轴线的约束弯矩, 并且楼梯作为螺旋梁来设计, 其中心线与楼梯中心线相重合。各作用力假定如图2所示, 该图为螺旋的平面。假定顶部及底部支座在垂直方向是刚性的, 每个支座承受的垂直荷载为楼梯全部重量 (W) 及作用荷载的一半。

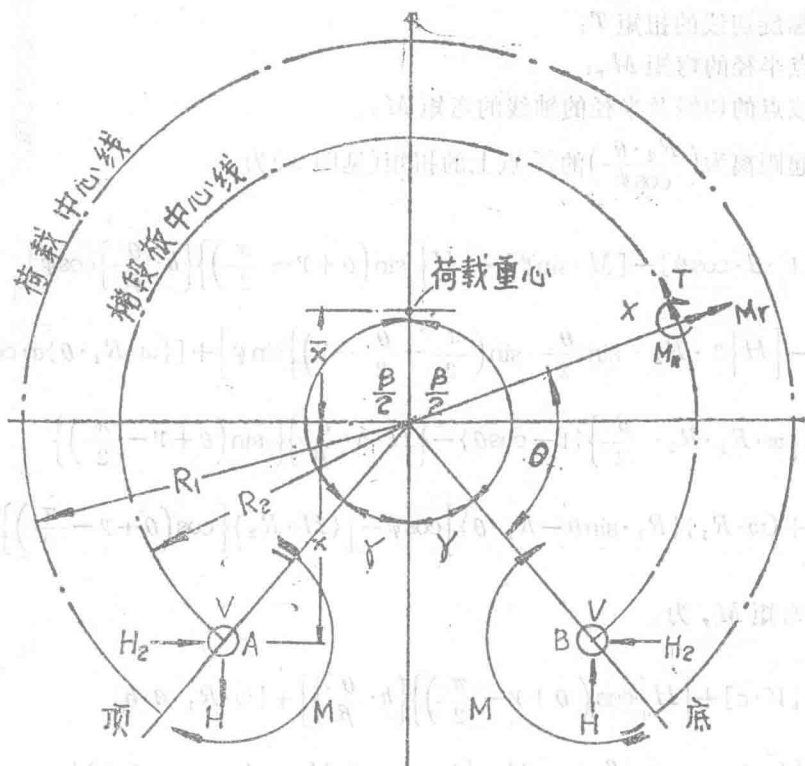


图 2

从螺旋中心至荷载重心的距离为 $\bar{x}$ 则

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot R_1}{\beta} \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

绕通过 A 点且平行于对称轴的水平轴线的弯矩为:

$$V(2 \cdot R_2 \sin \gamma) - H_2 \cdot h = W(R_2 \cdot \sin \gamma)$$

式中 h 为 A 至 B 点的垂直距离。因此, 由于 $V = \frac{W}{2}$, 故 H_2 为零。

绕通过 B 点且垂直于对称轴的水平轴线的弯矩为:

$$W(\bar{x} + x) = H \cdot h.$$

故

$$H = \frac{W}{h} \left[\left(\frac{2 \cdot R_1}{\beta} \right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + R_2 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

如果每单位长度荷载中心线水平投影的荷载为 w ，则 $W = w \cdot R_1 \cdot \beta$ 。故

$$H = \frac{w}{h} \cdot R_1 \left[2 \cdot R_1 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + R_2 \cdot \beta \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (1)$$

绕螺旋的垂直中心线的弯矩为：

$$2M = 2(H \cdot R_2 \cdot \sin \gamma)$$

故

$$M = H \cdot R_2 \cdot \sin \gamma \quad (2)$$

在螺旋上的任一点作用有下列力矩：

- (a) 绕该点的螺旋切线的扭矩 T ；
- (b) 绕通过该点半径的弯矩 M_r ；
- (c) 绕垂直于该点的切线及半径的轴线的弯矩 M_n 。

从底部算起距离为 $\left(\frac{R_2 \cdot \theta}{\cos \psi}\right)$ 的 X 点上的扭矩(见图 3)为：

$$\begin{aligned} T = & [V \cdot d \cdot \cos \psi] - [M \cdot \sin \psi] - \left[H \left\{ \sin\left(\theta + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \left\{ h \cdot \frac{\theta}{\beta} \right\} \cos \psi \right] \\ & - \left[H \left\{ 2 \cdot R_2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \gamma\right) \right\} \sin \psi \right] + [\{w \cdot R_1 \cdot \theta\} a \cdot \cos \psi] \\ = & \left[\left\{ w \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \frac{\beta}{2} \right\} \{1 - \cos \theta\} - \left\{ H \cdot h \cdot \frac{\theta}{\beta} \right\} \left\{ \sin\left(\theta + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right. \\ & \left. + (w \cdot R_1) \{R_1 \cdot \sin \theta - R_2 \cdot \theta\} \right] \cos \psi - \left[\{H \cdot R_2\} \left\{ \cos\left(\theta + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right] \sin \psi \quad (3) \end{aligned}$$

在 X 点的弯矩 M_r 为：

$$\begin{aligned} M_r = & -[V \cdot c] + \left[H \left\{ \cos\left(\theta + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \left\{ h \cdot \frac{\theta}{\beta} \right\} \right] + [w \cdot R_1 \cdot \theta \cdot b] \\ = & - \left[\left\{ w \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \frac{\beta}{2} \right\} \sin \theta \right] + \left[\left\{ H \cdot h \cdot \frac{\theta}{\beta} \right\} \left\{ \cos\left(\theta + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right] \\ & + [w \cdot R_1^2 (1 - \cos \theta)] \quad (4) \end{aligned}$$

在 X 点的弯矩 M_n 为：

$$\begin{aligned} M_n = & [V \cdot d \cdot \sin \psi] + [M \cdot \cos \psi] - \left[H \left\{ \sin\left(\theta + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \left\{ h \cdot \frac{\theta}{\beta} \right\} \sin \psi \right] \\ & + \left[H \left\{ 2 R_2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \gamma\right) \right\} \cos \psi \right] + [\{w \cdot R_1 \cdot \theta\} a \cdot \sin \psi] \\ = & \left[\left\{ w \cdot R_1 R_2 \cdot \frac{\beta}{2} \right\} \{1 - \cos \theta\} - \left\{ H \cdot h \cdot \frac{\theta}{\beta} \right\} \left\{ \sin\left(\theta + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right. \\ & \left. + \{w \cdot R_1\} \{R_1 \cdot \sin \theta - R_2 \cdot \theta\} \right] \sin \psi + \left[H \cdot R_2 \cdot \cos\left(\theta + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cos \psi \quad (5) \end{aligned}$$