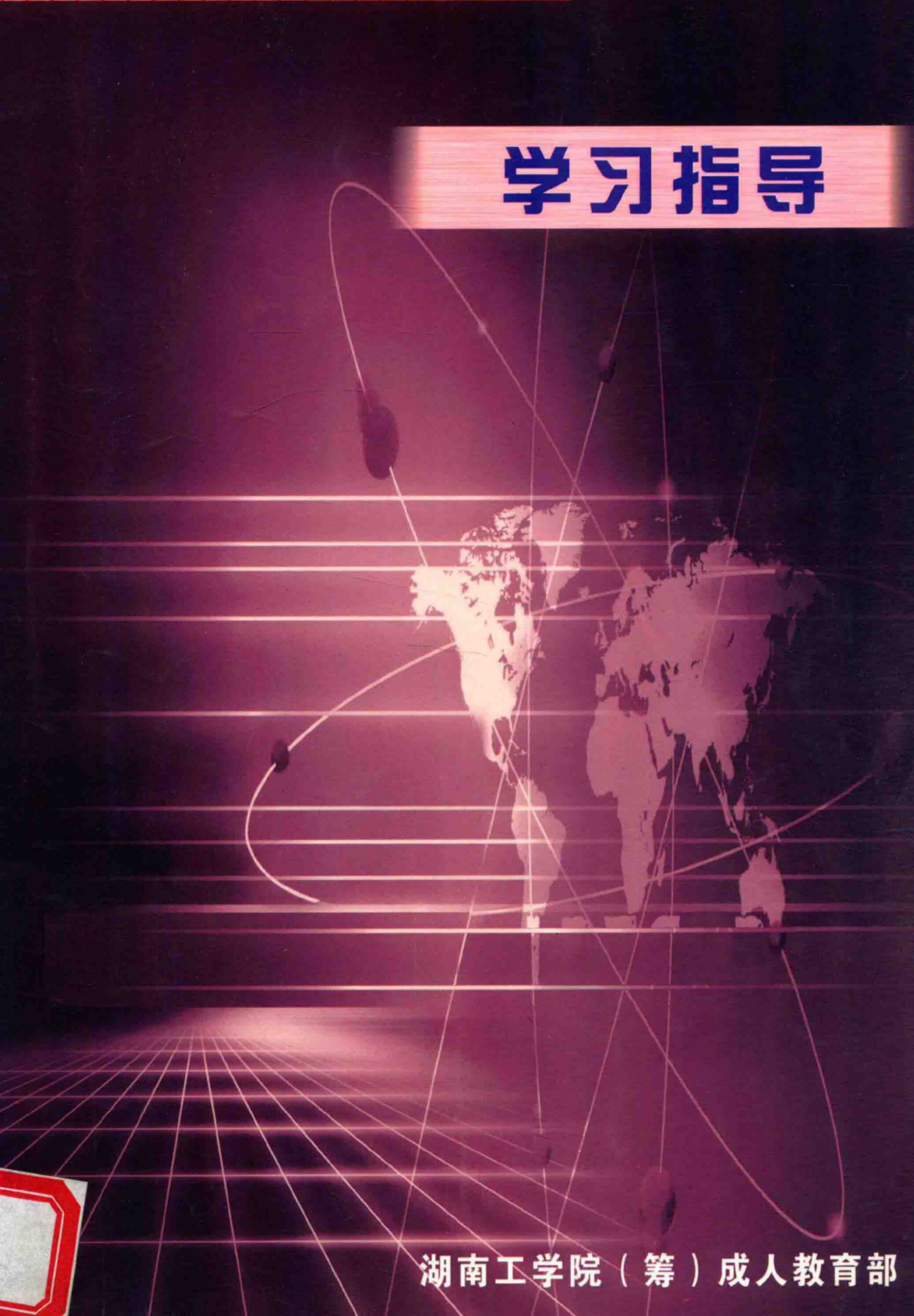
高等数学

学习指导



湖南工学院（筹）成人教育部

《高等数学》学习指导

湖南工学院（筹）成人教育部

目　录

第一单元　函数极限与连续

一、基本要求

1、理解函数的概念

2、了解函数的性质（周期性、单调性、有界性、奇偶性）

3、理解复合函数的概念，重点掌握复合函数的分解过程

4、了解函数极限的概念，重点掌握极限存在的充要条件

5、了解夹逼定理和单调有界极限的存在准则

6、熟练掌握两个重要极限及其推广形式

7、了解无穷小、无穷大的概念，并会对无穷小量进行比较

8、理解函数在某一点连续的充要条件，并会判断间断点类型

9、全面掌握求极限的各种方法并进行系统的归纳总结

10、了解在闭区间上连续函数的性质（介值定理和最值定理）

二、内容提要与学习方法

1、复合函数的分解

重点把握两个原则：

（1）坚持从外到内的分解方向

（2）坚持始终彻底分解的原则（即：所分解得到的简单函数要求为基本初等函数）

例：将 $y=\ln\sin(x^2+1)$ 分解

解：根据以上两原则可将 $y=\ln\sin(x^2+1)$ 分解为：

$$y=\ln U\ ,\quad U=\sin V\ ,\quad V=x^2+1$$

2、关于函数在某一点极限存在的充要条件

设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 极限存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

例：设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x},x>0\\ a+x^2,x<0\end{cases}$ 已知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，问 a 为何值，并求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

解：$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x^2)=a$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$（无穷小量乘有界变量仍为无穷小量）

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，$\therefore f(0-0)=f(0+0)$，即有 a=0，且此时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

3、两个重要极限

基本形式：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

推广形式：（1）$x\to 0$，$\alpha(x)\to 0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$

（2）$x\to 0$，$f(x)\to 0$　$g(x)\to\infty$ 则 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)}$

例：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ 的值

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

注：根据等价无穷小的概念 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\Leftrightarrow\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$

（2）求 $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{2x})^{4x}$ 的值

解：$\because x\to +\infty$　$\frac{1}{2x}\to 0$　$4x\to\infty$　由推广形式可知

$\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{2x})^{4x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}4x}=e^2$

4、关于等价无穷小

等价无穷小的概念：

设 α（x），$\beta(x)$ 都为无穷小量，若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价的无穷小量

✧ **等价无穷小量的归纳：**

（1）当 $x\to 0$ 时

$\sin x\sim tgx\sim\arcsin x\sim arctgx\sim x$

$e^x-1\sim\ln(1+x)\sim x$

$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$　　$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

注：常用于复合函数的等价无穷小形式。如 $\alpha(x)\to 0$，$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$

例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ 的值

解：$\because \sin 3x\sim 3x \quad \sin 2x\sim 2x$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

5、关于函数在某一点连续的充要条件

设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 上连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

例：设 $f(x)=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ x^2+ax+b & (-1\le x\le 1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 a , b 的值

解：$\because f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

$\therefore \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=-2$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+ax+b)=-2$

$\therefore 1-a+b=-2$ ①

同理 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$

$\therefore 1+a+b=2$ ②

由①②得 a=2，b=-1

6、求函数极限的方法

✧ **求函数极限步骤：**

（1）要考虑函数极限的类型

（2）根据不同的类型找到相对应的方法

✧ **函数极限的常用类型**

$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，$0\cdot\infty, 1^{\infty}$，0^0，∞^0

✧ **求极限的常用方法**

（1）$\dfrac{0}{0}$ **型的常用方法**

约去零因式法　　有理化法　　等价无穷小　　洛必达法则

例：①极限 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$

解：**此极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，因此极限为分式极限故可用约去零因子法。**

原式 $= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+3)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-2}{x+3} = -\dfrac{3}{2}$

②极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{2x}$

解：**此极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，因此极限为根式极限故可用有理化法。**

原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{2x(\sqrt{x+4} + 2)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2x(\sqrt{x+4} + 2)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2(\sqrt{x+4} + 2)}$

$= \dfrac{1}{8}$

③求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

解：（方法）利用无穷小量的等价代换法

当 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x^2 \sim \dfrac{1}{2} x^4 \quad \sin x^2 \sim x^2$

所以 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2} x^4}{x^2 x^2} = \dfrac{1}{2}$

④求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{\sin^3 x}$

解：（方法）**利用洛必达法则并结合等价无穷小**

原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\cos x \ \sin^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2} x^2}{x^2 \cos x} = \dfrac{1}{2}$

注：等价无穷小量代换只能在乘积和商中进行，不能在加减运算中代换。

（2）$\frac{\infty}{\infty}$ 型的常用方法

除以适当无穷大法（即转化形式为 $\frac{1}{\infty} \to 0$）

有理化法

洛必达法则

例：①求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{4x^3 + 3}$

解：**（方法）除以适当无穷大法，分子分母同除** x^3

$$原式 = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + 2\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{4 + \frac{3}{x^3}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

②求 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} + 2}{1 + x}$

解：**（方法）有理化法，分子配相应的共轭因式** $\sqrt{x + 4} - 2$

$$原式 = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + 2)(\sqrt{x^2 + 4} - 2)}{(1 + x)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(1 + x)(\sqrt{x^2 + 4} - 2)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(1 + x)(\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - \frac{2}{x})}$$

$=1$

③求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{xe^{x}}$

解：（方法）利用洛必达法则

原式= $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{e^{x}+xe^{x}}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{x}{2}}(1+x)}$

=0

（3）$\infty-\infty$型的常用方法

通分法　　　　　　　　　　有理化法

例　①求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{3}{1-x^{3}}-\dfrac{1}{1-x})$

解：（方法）通分法

原式= $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^{2})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{1+x+x^{2}}$

=1

②求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)$

解 ：（方法）有理化法

原式= $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(\sqrt{x^{2}+1}-x)(\sqrt{x^{2}+1}+x)}{\sqrt{x^{2}+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+1}+x}$

=0

注：$\infty-\infty$型一般利用通分法及有理化法转化 $0\cdot\infty$，$\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的形式。

（4）$0\cdot\infty$ 类型的常用方法

倒数法（即将 $0\cdot\infty$ 转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 及 $\frac{0}{0}$ 的形式）

例求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

令 $\frac{1}{x}=t$ 　　则 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}$

$=1$

（5）**幂指函数类型（1^{∞}，$0^{\infty},\infty^{0}$）的常用方法**

将幂指函数 $y=f(x)^{g(x)}$ 转化为 $y=e^{g(x)\ln f(x)}$,即使上述（$1^{\infty}.0^{0}.\infty^{0}$） 三种类型形式转化为 $0.\infty$ 然后参考（4）的解法。

例：求 $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$ 的值

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x.\ln x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=1$

此外 1^{∞} 类型可以考虑利用第二类重要极限求解

其一般步骤是： $\lim f(x)^{g(x)}=\lim[1+f(x)-1]^{g(x)}$

$=\lim[(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}]^{(f(x)-1).g(x)}$

$=e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$

$=e^{A}$

其中 $\lim[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}=e,\lim(f(x)-1)g(x)=A$ 读者可直接用这些公式计算，但必须注意仅适用“1^{∞}”型，对于其它情况如“0^{0}”“∞^{0}”并不适用

三典型习题

1 求函数 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域

2 将 $y=\ln\arctan(x^2+1)$ 分解为基本初等函数

3 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, x<0 \\ k, x=0 \\ \frac{1}{x}\sin x, x>0 \end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，则 k 的值

4 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, x>0 \\ 0, x=0 \\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, -1\le x<0 \end{cases}$ 研究 f(x)在点 x=0 处的连续性

5 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

6 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1})$

7 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1-x}{1+x})^{\frac{1}{x}}$

8 设 $f(x)=\begin{cases} 3x+2, x\le 0 \\ x^2+1, 0<x\le 1 \\ \frac{2}{x}, x>1 \end{cases}$ 分别讨论当 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时 f(x)的极限是否存在

9 找出下列函数的间断点，并判断属于何种类型，如果是可去间断点则补充或修改函数在该点的定义域使其成为连续函数

(1) $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$

(2) $f(x)=\begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x}, x\ne -1 \\ 0, x=-1 \end{cases}$

10 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(ax+b-\frac{x^3+1}{x^2+1})=0$ 求常数 a 与 b 的取值

四、参考答案

1、解：　$\therefore \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $\because$ 取函数的定义域是 $[-1,0) \cup (0,1]$

2、解：　函数可分解为三个基本初等函数 $y = \ln t$　　t=arctgu　　u=x^2+1

3、解：　$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ =1

而 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 的存在与在 x=0 处的函数值无关 $\therefore k \in R$

4、解：　$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$f(0) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \neq f(0)$

$\therefore$ 函数 f(x)在 x=0 处不连续即属于可去间断点

5、解：　$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \dfrac{1}{2}$

6、解：　$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}}$

$= \dfrac{1}{2}$

7、解：　$\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1+x-2x}{1+x})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} (1 - \dfrac{2x}{1+x})^{\frac{1+x}{2x} \bullet (-\frac{2x}{1+x}) \bullet \frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{2}{1+x}}$

$= e^2$

8、解： 当$x \to 0$ 时， $\lim\limits_{x \to 0^-} 3x+2=2$ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2+1=1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$f(x)$在$x \to 0$时极限不存在

当$x \to 1$ 时， $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2+1=2$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2}{x}=2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

$f(x)$当$x \to 1$时极限存在

9、解（1）对于有理分式函数，使分母为零的点是它的不连续点.

使$(x+2)^2=0$的点为$x=-2$，因为$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$

所以$x=-2$是$f(x)$的一个无穷不连续点,属于第二类间断点。

（2）因为 $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{1-x^2}{1+x} = \lim\limits_{x \to -1} (1-x)=2$

而$f(-1)=0$ $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$

所以$x=-1$是函数的第一类可去间断。

若将函数修改为$g(x)=\begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x} & x \neq -1 \\ 2 & x=-1 \end{cases}$ 则$f(x)$就为连续函数

10、解： $\lim\limits_{x \to \infty}(ax+b-\frac{x^3+1}{x^2+1})$

$=\lim\limits_{x \to \infty}(\frac{(ax+b)(x^2+1)-x^3-1}{x^2+1})$

$=\frac{\lim}{x \to \infty}(\frac{(a-1)x^3+bx^2+ax+(b-1)}{x^2+1})$

$=0$

$\Rightarrow a-1=0 \quad \Rightarrow a=1$

$b=0$

第二单元　一元函数微分学

一、基本要求

1、　理解导数与微分的概念

2、　了解导数的几何意义

3、　理解函数可导，可微和连续三者之间的关系

4、　掌握函数的求导法则与导数的基本公式

5、　熟练地掌握求导的基本方法（即复合函数求导法、隐函数求导法、对数求导法、以及由参数方程所确定的函数求导法）

6、　了解高阶导数的概念，能熟练地求初等函数的一、二阶导数

7、　理解函数的极值概念，掌握求函数的极值以及判断函数的单调性并求单调区间

8、　重点掌握利用洛必达法则求未定式的极限

9、　了解罗尔定理和拉格朗日中值定理以及柯西中值定理成立的条件

10、了解函数的凹凸区间及拐点的求法，以及曲线的渐近线

11、熟练掌握证明不等式的方法

二、内容提要与学习方法

1、导数的概念

导数的定义：

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

左右导数的定义：

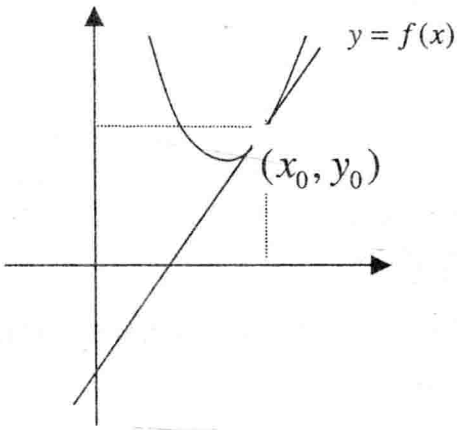
$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

函数在某一点可导的充要条件：$f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等。

即 $f'(x)$存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

2、导数的几何意义：



$K_{切}=f'(x_0)$

切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

3、求导方法

✧ **复合函数的求导方法**

设 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，$y=f(u)$ 在对应的 U 点处可导，则复合函数

$y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\bullet\dfrac{du}{dx}$ 或简记为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

复合函数的求导步骤：

①将复合函数分解成基本初等函数或者是基本初等函数的四则运算

②根据复合函数的复合次序由外向里逐层求导

③根据复合函数的链导法则求导

例：求复合函数的导数 $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$

解：$y=\sqrt{1+\ln^2 x}$ 可看作由 $y=\sqrt{u}$，$u=1+v^2$，$v=\ln x$ 复合而成的，

因此 $y'=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2v\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot\dfrac{1}{x}$

✧ **隐函数的求导方法（隐函数求导法适用由方程所确定的函数不能显化或者是显化较困难时）**

设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的可导函数，则其导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 可以由方程

$\dfrac{d}{dx}F(x,y)=0$ 求得。

隐函数求导步骤：

1、 将方程 $F(x,y)=0$ 两边对自变量 x 求导，视 y 为中间变量，得到一个关于 y' 的一次方程。

2、 解方程求出 y'

例：求由方程$e^y+\sin(xy)-e=0$所确定的函数的导数

解：同时对方程两边求关于 x 导得

$$e^y y'+\cos(xy)(y+xy')=0$$

$$y'[e^y+x.\cos(xy)]+y\cos(xy)=0$$

$$y'=-\frac{y\cos(xy)}{e^y+x\cos(xy)}$$

注：隐函数的求导实质上仍是复合函数的求导，即在求导过程中将方程中的y 视为$y(x)$函数

✧ **对数求导法（适用于幂函数或连乘式求导）**

对数求导法适用于对幂指函数$[\phi(x)]^{\varphi(x)}$或形如$y=\sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}}$ 或$y=\frac{f(x)g(x)}{h(x)}$等含乘、除、乘方、开方较多的求导，利用对数的求导方法，可把对幂指函数的求导转化为对隐函数的求导；可把对乘积的求导转化为和的求导；把对商的求导转化为差的求导。

例：设$y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+2)}{e^x+x}}$ ，试求y'

解：先对方程两边取对数即：$\ln y=\frac{1}{3}(\ln x+\ln(x^2+2)-\ln(e^x+x))$

再在两边对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数得：

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}[\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+2}-\frac{e^x+1}{e^x+x}]$$

$$y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+2)}{e^x+x}}(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+2}-\frac{e^x+1}{e^x+x})$$

✧ **由参数方程所确定的函数的导数**

设参数方程$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}t\in(\alpha,\beta)$可求得$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$

例：已知$\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$ 求$\frac{dy}{dx}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$

4、**导数的应用**

（1） 关于求函数 $y=f(x)$ 的极值点或极值的问题求解步骤：

①求 $f'(x)$（若 $f''(x)$ 存在，则可利用第二充分条件判断）

②求 $f(x)$ 的特殊点（即求驻点即 $f'(x)=0$ 以及 $f'(x)$ 不存在的点）

③考察 $f'(x)$ 的符号在每个驻点左右邻域的情形，以便确定驻点是否是极值点，若是极值点，根据极值点的第一充分条件，判断出对应的函数值是极大值还是极小值。

例：求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 极值

解法一：**（利用第一充分条件）** $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

令 $3(x+1)(x-3)=0$ 求得驻点 $x_1=-1 \quad x_2=3$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $f(-1)=10$	↘	极小值 $f(3)=-22$	↗

解法二：**（利用第二充分条件）**

$f(x)=3x^2-6x-9 \qquad f''(x)=6x-6$

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=3$

$f''(-1)=-12$ 〈$0\Rightarrow$ 一1 为极大值点 $f(-1)=10$

$f''(3)=12>0\Rightarrow 3$ 为极小值点 $f(3)=-22$

（2）判断函数的单调性并求单调区间

确定函数 $y=f(x)$ 的单调区间的步骤：

①确定函数 $y=f(x)$ 的定义域

②求 $f'(x)=0$ 及 $f'(x)$ 不存在的点

③分区（用第二步所求的特殊点对①所确定的定义域分区）

④讨论（在每个区间上讨论 $f'(x)$ 的符号，从而根据 $f'(x)$ 的符号确定函数的单调区间）