1982 研究生

入学数学试题汇解

YANJIUSHENG
RUXUESHUXUE
SHITIHUIJIE

安徽教育出版社

十六、陕西师范大学

1.高等数学

(超声学专业)

一、(15分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{2x}, & x>0\\ (1-x^2)^{\frac{4}{3}}+\cos(2x)-1, & x\leqslant 0,\end{cases}$

(1) 研究$f(x)$在$x=0$处是否连续，是否可导?

(2) 求 $f'(x)$.

解 (1) 由函数$f(x)$的定义，有

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin 2x}{2x}=1,$$

$$f(0^{-1})=\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}[(1-x^2)^{\frac{4}{3}}+\cos(2x)-1]=1,$$

$$f(0)=(1-0)^{\frac{4}{3}}+\cos 0-1=1,$$

故 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，所以，$f(x)$在$x=0$连续.

其次，由$f(x)$的定义，有

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{\sin 2h}{2h}-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2h}[2h-O(h^3)]-1\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{O(h^3)}{h}=\lim_{h\to 0+}O(h^2)=0.$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\left[(1-x^2)^{\frac{4}{3}}+\cos(2x)-1\right]'\Big|_{x=0}$$

$$=\left[\frac{4}{3}(1-x^2)^{\frac{4}{3}-1}(-2x)-2\sin 2x\right]_{x=0}$$

$$=0.$$

故极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

存在．所以，$f(x)$在 $x=0$ 可导．

（2）由（1）的讨论，有

$$f'(0)=0.$$

又$f(x)$在区间$(0,\ +\infty)$及$(-\infty,\ 0)$都是初等函数，由求导法则，有

当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\ \frac{\sin 2x}{2x}$$

$$=2\cos(2x)\cdot\frac{1}{2x}+\sin(2x)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

x≤0 时…

$$=x^{-1}\cos 2x-\frac{1}{2}x^{-2}\sin 2x.$$

二、解下列各题：

（1）（5分）

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2-x_3+4x_2=2\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda\end{cases}$$

中，λ取何值时，方程组有解，并求出解组.

解 将方程组排成矩阵形式，并对之施行关于行的初等变换(即用 *Gauss* 消去法)：

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\text{交换前两行}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(第三行)}-\text{(第一行)}]{\text{(第二行)}-(2\times\text{第一行})} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{(第三行)}+\text{(第二行)}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{array}\right)$$

从最后一行(即方程 $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=\lambda-5$) 可见，当且仅当 $\lambda=5$ 时，所给方程组有解. 解中含有两个任意常数，令

$$x_3=5c_1,\quad x_4=5c_2.$$

从第二行，即方程 $-5x_2+3x_3-7x_4=-3$，解得

$$x_2=3c_1-7c_2+\frac{3}{5}.$$

再从第一行，即方程 $x_1+2x_2-x_3+4x_4=2$，解得

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2+x_3-4x_4+2 \\ &= -c_1-6c_2+\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

将所求得的解，写成向量形式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}。$$

(2)（10分） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin(2x)}{1+\cos^2(2x)}dx = ?$

解 令 $u=2x$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}du\right]. \qquad (1)$$

在上式的第二个积分中，令 $u=\pi-t$，得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}(-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

代入(1)式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$= \frac{-\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\operatorname{arctg}\cos t) = -\frac{\pi}{4}\operatorname{arc\,tg}\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{16}.$$

(3)（10分）求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及和函数.

解 所给幂级数的收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

又当 $x=\pm 1$ 时，级数的一般项分别是 n 及 $(-1)^n n$，当 $n\to\infty$ 时，它们都不以 0 为极限，因而此幂级数只在 $(-1,\ 1)$ 内收敛.

利用逐项求导，可求得和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

三、(20分)已知 $u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$，

$f(\xi,\ \tau)$，$f'_\xi(\xi,\ \tau)$连续，a 为常数，求

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=?$$

解 记 $\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)d\xi=F(t,\ x,\ \tau)$，有

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_0^t F(t,\ x,\ \tau)d\tau,$$

由参变量积分的求导公式，有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2a}F(t,\ x,\ t)+\frac{1}{2a}\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}F(t,\ x,\tau)d\tau,$$

由 $F(t,\ x,\ t)=0$ 及

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,\ x,\ \tau)=f(x+a(t-\tau),\ \tau)$$

$$\cdot a+f(x-a(t-\tau)\tau)\cdot a,$$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\int_0^t [f(x+a(t-\tau),\ \tau)$$

$$+f(x-a(t-\tau),\ \tau)]d\tau,$$

再对 t 求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}[f(x+a(t-\tau),\ \tau)$$

$$+f(x-a(t-\tau),\ \tau)]_{\tau=t}$$

$$+\frac{a}{2}\int_0^t\left[f_\zeta(\zeta,\ \tau\Big|_{\zeta=x+a(t-\tau)}\right.$$

$$\left.-f_\eta(\eta,\ \tau)\Big|_{\eta=x-a(t-\tau)}\right]d\tau$$

$$=f(x,\ t)+\frac{a}{2}\int_0^t\left[f_\zeta(\zeta,\ \tau)\Big|_{\zeta=x+a(t-\tau)}\right.$$

$$\left.-f\eta(\eta,\ \tau)\Big|_{\eta=x-a(t-\tau)}\right]d\tau.$$

下面求 $u(x,\ t)$ 对 x 的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\frac{\partial}{\partial x}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\zeta,\ \tau)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t[f(x+a(t-\tau),\ \tau)$$

$$-f(x-a(t-\tau),\ \tau)]d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[f_\zeta(\zeta,\ \tau)\Big|_{\zeta=x+a(t-\tau)}\right.$$

$$\left.-f_\eta(\eta,\ \tau)\Big|_{\eta=x-a(t-\tau)}\right]d\tau,$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,\ t).$$

注 本题所给 $u(x,\ t)$ 的积分表示，是非齐次一维波动

方程的 *Cauchy* 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t), \\ u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0 \end{cases}$$

的解.

四. (15分)求

$$y''+4y=f(t)=\begin{cases} \sin\omega t, & 0<t\leqslant\dfrac{\pi}{\omega} \\ 0, & t\leqslant 0 \\ 0, & \dfrac{\pi}{\omega}<t \end{cases}$$

(ω 为常数)满足条件 $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 的解.

解 应用 *Laplace* 变换方法求解，设 $Y(p)=L[y(t)]$，则

$$\begin{aligned} L[y''(t)]&=p^2Y(p)-py(+0)-y'(+0) \\ &=p^2Y(p). \end{aligned}$$

记单位函数

$$h(t)=\begin{cases} 1; & t>0 \\ 0, & t\leqslant 0 \end{cases}$$

有

$$f(t)=h(t)\sin\omega t-h\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right).$$

由 $L(\sin\omega t)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ 及延迟定理，有

$$L[f(t)]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{-p\frac{\pi}{\omega}}.$$

所以，在原方程两边作*Laplace*变换，得

$$p^2Y+4Y=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{-p\frac{\pi}{\omega}}.$$

故

$$Y(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+4}-\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+4}e^{-p\frac{\pi}{\omega}}。$$

下面分两种情况：

1°. $\omega\neq\pm 2$． 有

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+4}$$

$$=\frac{\omega}{4-\omega^2}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{p^2+4}\right)$$

$$=\frac{\omega}{4-\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4}\right),$$

故

$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+4}\right]$$

$$=\frac{h(t)}{4-\omega^2}\left[\sin\omega t-\frac{\omega}{2}\sin 2t\right].$$

而

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+4}e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right]$$

$$=\frac{1}{4-\omega^2}h\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\left[\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)-\frac{\omega}{2}\sin 2\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right],$$

所以

$$y(t)=\frac{1}{4-\omega^2}\left[h(t)\sin\omega t-h\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right]$$

$$-\frac{\omega}{2(4-\omega^2)}\left[h(t)\sin 2t-h\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\sin 2\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4-\omega^2}\sin\omega t-\frac{\omega}{2(4-\omega^2)}\sin 2t, & 0<t\leqslant\frac{\pi}{\omega};\\ \frac{-\omega}{2(4-\omega^2)}\left[\sin 2t-\sin 2\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right], & t<\frac{\pi}{\omega};\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

2°. $\omega=\pm 2$. 有

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+4}=\frac{\omega}{(p^2+4^2)^2}$$

$$=-\frac{\omega}{2}\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\frac{1}{p^2+4},$$

而

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+4}\right]=\frac{1}{2}\sin 2t,$$

$$L^{-1}\left[\frac{d}{dp}\frac{1}{p^2+4}\right]=-\frac{t}{2}\sin 2t,$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\frac{1}{p^2+4}\right]=-\frac{1}{2}\int_0^t t\sin 2t\,dt,$$

所以

$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{(p^2+4)^2}\right]=\frac{\omega}{4}\int_0^t t\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{\omega}{16}(\sin 2t-2t\cos 2t).$$

$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2-\omega^2}e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right]=\frac{\omega}{16}h\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right).$$

$$\left[\sin 2\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)-2\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\cos 2\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right]$$

所以

$$y(t)=\frac{\omega}{16}\left[h(t)\sin 2t-h\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\sin 2\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right]$$

$$-\frac{\omega}{8}\left[h(t)\,t\cos 2t-h\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\cdot\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\cos 2\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\omega}{16}\sin 2t-\dfrac{\omega}{8}t\cos 2t, & 0<t\leqslant\dfrac{\pi}{\omega};\\[2ex] \dfrac{\omega}{16}\left[\sin 2t-\sin 2\left(t-\dfrac{\pi}{\omega}\right)\right] & \\ \quad-\dfrac{\omega}{8}\left[t\cos 2t-\left(t-\dfrac{\pi}{\omega}\right)\cos 2\left(t-\dfrac{\pi}{\omega}\right)\right], & \\ & t>\dfrac{\pi}{\omega};\\[2ex] 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

注 本题如果用经典方法求解，则计算很繁，而且步骤很多，略述如下：

(一). 易见 $t\leqslant 0$ 时，$y(t)\equiv 0$.

(二). $0<t\leqslant\frac{\pi}{\omega}$.

分 $\omega\neq\pm 2$ 及 $\omega=\pm 2$ 两种情况，求初始问题

$$\begin{cases}y''+4y=\sin\omega t,\\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$$

的解，而这又要先求出相应齐次方程的通解，并用待定系数法求非齐次方程一特解. 再从非齐次方程的通解，由初始条件求出初始问题的解.

(三). $t>\frac{\pi}{\omega}$.

也分 $\omega \neq \pm 2$ 及 $\omega = \pm 2$ 两种情况，先分别计算(二)中得到的解及其导数在 $t=\dfrac{\pi}{\omega}$ 的值．再以这两组值为初始条件，解方程

$$y''+4y=0$$

得到本题在 $t>\dfrac{\pi}{\omega}$ 的解．

五．(25分)解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,\ 0<t \\ u(0,t)=0 & u(l,t)=\sin\omega t, \qquad \omega \text{ 为常数} \\ u(x,0)=0 & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \end{cases}$$

解 因所给边界条件是非齐次的，必需先把它齐次化．为此，令

$$v(x,\ t)=X(x)\sin\omega t.$$

这里要求 v 能满足所给边界条件，因而 $X(0)=0$，$X(l)=1$，将 v 代入泛定方程，得

$$-\omega^2 X(x)\sin\omega t=X''\sin\omega t$$

即 $\quad X''+\omega^2 x=0$

故 $\quad X(x)=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x.$

由 $X(0)=0$，得 $c_1=0$，由 $X(l)=1$，得

$$c_2=\frac{1}{\sin\omega l} \qquad \left(设\ \omega\neq\frac{n\pi}{l},\ \ n=1,\ 2,\ \cdots\right),$$

故

$$X(x)=\frac{1}{\sin\omega l}\sin\omega x,$$

$$v(x,y)=\frac{1}{\sin\omega l}\sin\omega x\sin\omega t.$$

再令

$$u=\omega(x,t)+v(x,t),$$

代入原定解问题，得到关于 ω 的定解问题

$$\begin{cases} \omega_{tt}=\omega_{xx}; \\ \omega(0,\ t)=\omega(l,t)=0; \\ \omega(0,\ x)=u(0,x)-v(0,x)=0; \\ \omega'_t(0,\ x)=u'_t(0,x)-v'_t(0,x)=\dfrac{-\omega}{\sin\omega l}\sin\omega x. \end{cases}$$

下面用分离变量法，求它的解．令 $w=X(x)T(t)$，

代入泛定方程，得

$$XT''=X''T,\ X(0)=X(l)=0,$$

即

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=-\lambda. \tag{1}$$

1°．若 $\lambda<0$，记 $\lambda=-k^2$，得 $X''-k^2X=0$，其通解为

$$X(x)=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}.$$

由 $X(0)=X(l)=0$，有

$$\begin{cases} c_1+c_2=0, \\ c_1e^{kl}+c_2e^{-kl}=0. \end{cases}$$

这个方程组只有平凡解 $c_1=c_2=0$，因而 $X(x)\equiv0$，故 λ 不能为负．

2°．若 $\lambda=0$，由(1)得 $X(x)=c_1x+c_2$，由 $X(0)=0$，有 $c_2=0$，再由 $X(l)=0$，有 $c_1=0$，因而 λ 不为零．

3°．设 $\lambda>0$，令 $\lambda=k^2(k>0)$，由(1)得 $X''+k^2X=0$，其通解为

$$X(x)=A\cos kx+B\sin kx.$$

由 $X(0)=0$，得 $A=0$，由 $X(l)=0$，得

$$B\sin kl=0,$$

因B不能再为零，故

$$k=\frac{n\pi}{l},\qquad n=1,2,\cdots$$

因而特征函数是

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{lx},\qquad n=1,2,\cdots$$

再由（1），得

$$T''+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T=0,$$

故

$$T_n(t)=c_n\sin\frac{n\pi}{l}t+D_n\cos\frac{n\pi}{l}t.$$

因而求得满足泛定方程和边界条件的特解

$$\omega_n(x.t)=\left(c_n\sin\frac{n\pi}{l}t+D_n\cos\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

将各特解迭加，得

$$\omega(x.t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\sin\frac{n\pi}{l}t+D_n\cos\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

由 $\omega(x.0)=0$，得 $D_n=0$.

再由

$$\omega'_t(x,\ 0)=\frac{-\omega}{\sin\omega l}\sin\omega x,$$

得

$$-\frac{\omega}{\sin\omega l}\sin\omega x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{l}c'_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

所以

$$c_n=\frac{2}{l}\ \frac{l}{n\pi}\int_0^l\frac{-\omega}{\sin\omega l}\sin\omega x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2\omega}{l}\ \frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}.$$

综合以上讨论，求得

$$u(x,t)=\frac{1}{\sin\omega l}\sin\omega x\sin\omega t$$

$$+\frac{2\omega}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

2.高等数学

(近代光学专业)

一．(15分)与超声学专业相同。

二．计算下列各题

(1) (10分)设 $A=max\{a_1,\ a_2,\ \cdots a_m\}$，$a_k>0(k=1,2,\cdots,m)$，求

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a^n_m}.$$

解 不妨设 $a_1=max\{a_1,\ a_2\cdots a_m\}=A$.因 $a_1\geqslant a_k(k=2,3,\cdots m)$，且 $a_k>0$，故

$$A=\sqrt[n]{a_1{}^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m^n}$$

$$\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_1^n+\cdots+a_1^n}=\sqrt[n]{m}A.$$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{m}=1$， 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}A=A.$

所以，由两边夹定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}.$$

(2)(10分)与超声学专业相同.

(3)(5分) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}(\cos px+\sin mx)dx$.

解 $$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}(\cos px+\sin mx)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\cos px\,d\,x+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin mx}{1+x^2}dx.$$

先计算上式右端第一个积分，并记

$$f(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos px}{1+x^2}dx,\qquad p>0.$$

对 $f(p)$ 作 *Laplace* 变换，因 $L[\cos px]=\frac{q}{q^2+x^2}$,

故

$$F(q)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{q}{q^2+x^2}dx\qquad(q>0)$$

$$=\frac{q}{q^2-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{q^2+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{q}{q^2-1}\left[\arg\operatorname{tg}x\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{q}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{q}\Big|_{-\infty}^{\infty}\right]$$

$$=\frac{q\pi}{q^2-1}\left(1-\frac{1}{q}\right)=\frac{\pi}{q+1}.$$

所以 $f(p)=\pi e^{-p}$.

又

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin mx}{1+x^2}dx=-f'(m)=m\pi e^{-m}.$$

所以 $I=\pi e^{-p}+m\pi e^{-m}$.

(3)（15分）

求 $y'' + 4y = f(t)$

$$= \begin{cases} E\,(\text{常数}), & 0<t\leqslant\tau\,(\text{常数}) \\ 0\quad, & t\leqslant 0 \\ 0\quad, & \tau<t \end{cases}$$

满足条件，$y(0)=y'(0)$ 的解.

解法一 用经典方法求解.

（一）显然，$t\leqslant 0$ 时，$y(t)\equiv 0$

（二）当 $0<t\leqslant\tau$ 时，问题变成

$$\begin{cases} y''+4y=E, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases} \tag{1}$$

特征方程为 $k^2+4=0$，$k=\pm 2i$，因而相应齐次方程的通解为

$$\overline{y}(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t.$$

设非齐次方程（1）的一特解为 $y=A$（常数），代入(1)，得 $A=\dfrac{E}{4}$. 故（1）的通解是

$$y(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{E}{4}.$$

由 $y(0)=0$，得 $c_1=-\dfrac{E}{4}$；由 $y'(0)=0$，得 $c_2=0$.

故所求解为

$$y(t)=\frac{E}{4}(1-\cos 2t). \qquad (0<t\leqslant\tau) \tag{2}$$

（三）$t\geqslant\tau$. 解式（2）及其导数在 $t=\tau$ 的值为

$$y(\tau)=\frac{E}{4}(1-\cos 2\tau), \tag{3}$$