

1982

齿轮强度学术讨论会

论文选

中国航空学会齿轮减速器学组

前 言

中国航空学会齿轮减速器学组于1982年11月15日在株洲608所召开了“齿轮强度学术讨论会”。会上共发表了24篇论文。考虑到有的论文通过其他途径已发表过，加之篇幅有限，这里只选编（略加修改）了14篇。不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编 者

1983年11月

目 录

1. 用畸变等参元求取齿根裂纹的应力强度因子 -----
----- 上海交通大学 王统 潘建民 (1)
2. 开孔跨辐板斜齿轮的有限元应力分析 -----
----- 608所 任培正等 (26)
3. 67型圆弧齿轮齿根应力公式的研究 -----
----- 哈尔滨工业大学 陈荣增等 (51)
4. 67型圆弧齿轮齿形系数 -----
----- 黑龙江商学院 关多友 (61)
5. 用平面弹性理论的复变函数解法精确确定直齿轮的挠度
----- 东北工学院 程乃士 刘 温
----- 太原工学院 朱景梓 邵家辉 (79)
6. 圆柱齿轮的齿向载荷分布系数 -----
----- 华中工学院 唐增宝 (101)
7. 渐开线圆柱齿轮胶合强度计算 -----
----- 哈尔滨工业大学 英桂文等 (116)
8. 渐开线圆柱齿轮齿面温度分布 -----
----- 哈尔滨工业大学 王永浩 (136)
9. 在齿轮的抗胶合承载能力计算中用均衡温度曲线选择移
距系数 -----
----- 大连铁道学院 王松年 (161)
10. 航空圆锥齿轮接触强度计算新方法 -----
----- 300厂 方长德 (181)

11. 圆锥齿轮基本弯曲应力 -----
----- 300 厂 马侃楚 (208)

12. 关于航空圆锥齿轮强度规范中的动载系数问题 -----
----- 608 所 薛同博 (224)

13. 航空齿轮弯曲疲劳强度试验 -----
----- 南京航空学院 王良云等 (235)

14. 渐开线齿轮的弹流润滑膜厚的计算 -----
----- 608 所 周志烈 (250)

用畸变等参元求取齿根裂纹的应力强度因子

上海交通大学 王 统

进行轮齿断裂分析和计算的关键之一，在于求出齿根裂纹的应力强度因子。而求解这一问题的困难在于：齿轮几何形状及边界条件的复杂性；齿根裂纹一般为复合型裂纹以及裂纹尖端应力场的奇异性等。

本文根据线弹性断裂力学的基本理论，用有限元法对带裂纹与不带裂纹的齿根应力场和位移场进行了分析和计算，并着重介绍了用畸变等参元法对齿根裂纹进行分析并求取其应力强度因子的情况。计算表明：与常规等参元相比，采用畸变元更为优越，从而为齿轮抗断设计提供了必要的依据。

概 述

七十年代以来，动力齿轮明显地向高精度、硬齿面趋势发展。这类齿轮最主要的破坏形式是齿的弯曲疲劳折断。齿的弯曲折断主要是由于齿根部位应力过大，在运转中齿根受交变应力作用引起疲劳裂纹，裂纹逐渐扩展，最后在某一峰值载荷作用下突然断裂。这种损坏不仅使齿轮寿命大为降低，而且由于断裂是在工作中突然发生的，一般较难预测和防止。因此，如何评价带有裂纹齿轮的强度已成为各国工程技术人员所注意的问题，如Wallace(美)^[4]、本田博(日)^[3]等人都在这方面进行过研究。

(线弹性断裂力学使我们有可能定量地分析齿根裂纹对齿轮弯

曲强度的影响。如果对于由某种原因产生的齿根裂纹能够求得其尖端处的应力场强度因子等参数，那么就有可能进一步研究裂纹的扩展方向，判断裂纹是否会失稳扩展等等。因此，对轮齿断裂进行计算研究的前提是：正确地确定裂纹尖端区的压力场和位移场；并据此求取裂纹尖端的应力强度因子。

然而，线弹性断裂力学问题有限元解法的困难在于：裂纹尖端处应力场具有奇异性。故为了保证一定的计算精度，一般不得不在裂纹附近划分极为细密的网格。例如，文献〔3〕介绍了在齿根裂纹附近最多取到723个节点和928个单元，利用静态反力解析的SAP有限元程序进行求解的情况。但是目前SAP程序的平面单元库中只列入了四节点四边形等参元，用这种单元进行计算很难正确地反映出裂纹尖端的奇异性，这就不能不影响到计算的准确程度。

为探讨上述问题，并解决计算精度与计算机容量之间的矛盾，我们采用“畸变等参元”。在国产DJS-6小型计算机上，对带裂纹齿根部位的应力场和位移场进行了分析和计算，并进一步求取齿根裂纹尖端的应力强度因子 K_I 和 K_{II} ，所得结果尚令人满意，从而为齿根裂纹的研究和抗断设计提供了必要的依据。

二、关于计算模型

1. 关于齿轮计算模型

本计算是以一移距系数为零的标准齿轮作为对象来进行的。考虑到与实物试验的对比，所取齿轮的主要参数如下：

齿形：渐开线齿廓；模数 $m = 8 \text{ mm}$ ；齿数 $Z = 34$ ；

压力角 $\alpha = 20^\circ$ ；变位系数 $s = 0$ ；分度圆直径 $d =$

272 mm ；齿全高 $h = 18.45 \text{ mm}$ ；齿宽 $B = 160 \text{ mm}$ ；

螺旋角 $\beta = 0^\circ$ ；精度等级：级6—D。(JB179—60)。

图1所示为有限元法求解的计算模型及网格划分情况。齿廓上载荷作用位置及其大小如图1，表1所示，载荷作用方向垂直于齿廓工作表面。关于边界范围及边界节点处的约束情况，在文献〔5〕、〔9〕中已详细讨论这里不再重复。

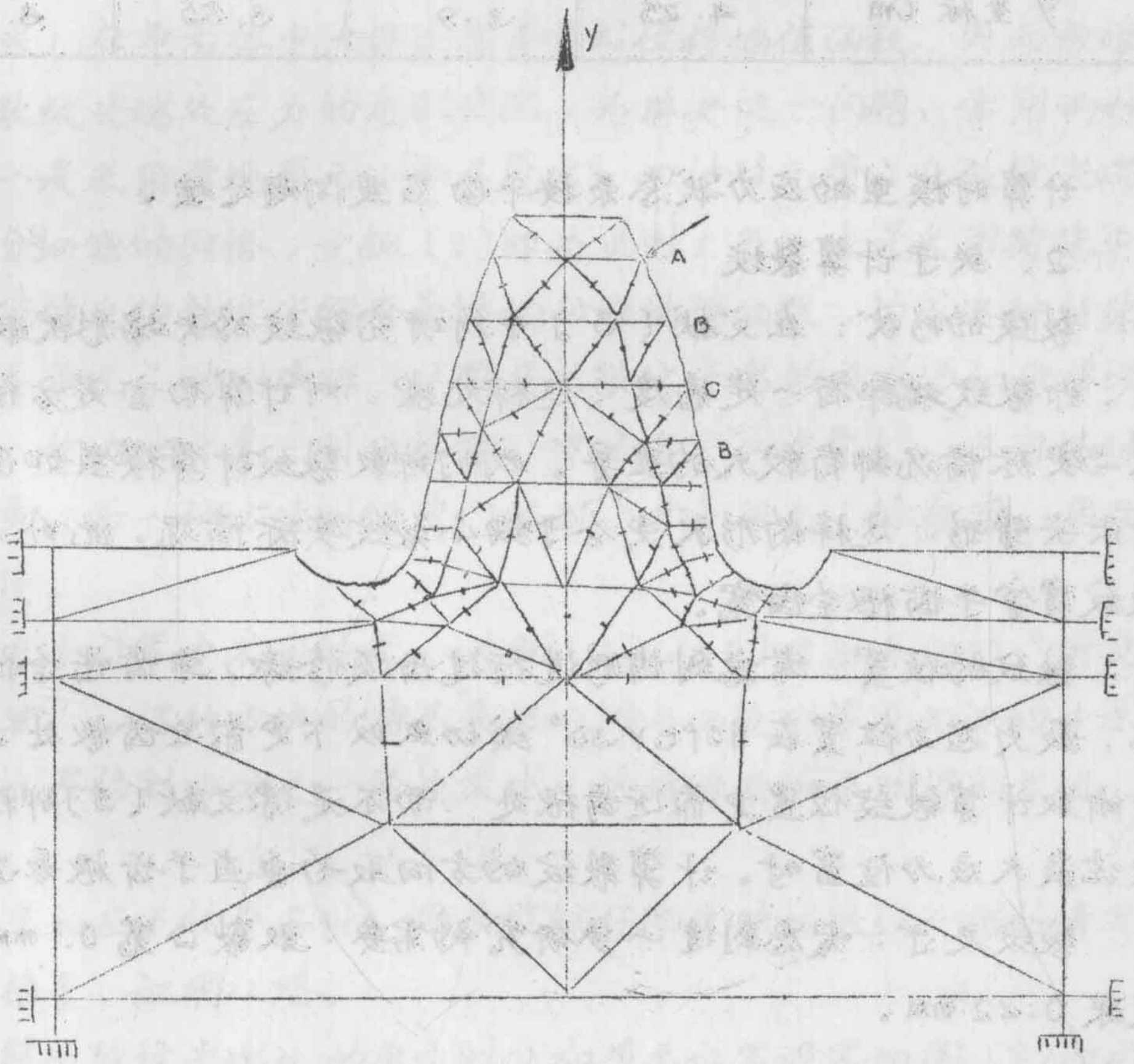


图1 进行齿形计算所划分的网格

表 1 载荷及其作用位置

载荷作用位置	A	B	C	D
单位齿宽作用载荷 $\frac{Kg}{cm}$	636.5 Kg/cm			
X 坐标 cm	0.37	0.517	0.64	0.72
Y 坐标 cm	4.25	3.9	3.55	3.25

计算时模型的应力状态系按平面应变问题处理。

2. 关于计算裂纹

裂纹的形状：在文献〔3〕中所研究裂纹的尖端形状取为矩形，即裂纹端部有一定宽度，这样处理，对计算而言是方便多了，但与实际情况却有较大的差异。我们所取裂纹计算模型如图(3)所示尖劈形，这样的形状更合于细小裂纹实际情况。此外，假设裂纹贯穿于齿根全齿宽。

裂纹的位置：考虑到齿形进行过齿顶修缘，单齿啮合位置偏低，最大应力位置在 $Hofey 30^\circ$ 线切点以下更靠近齿根处，故我们所取计算裂纹位置更靠近齿根处，而不是像文献〔3〕那样取于理论最大应力位置时。计算裂纹的方向取为垂直于齿根表面。

裂纹尺寸：考虑到进一步研究的需要，取裂口宽 0.1 mm；裂纹深 0.42 mm。

三、关于畸变等参元

根据弹性力学分析可知，裂纹前缘附近各点的应力和位移可用如下极坐标形式表达：

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta) \quad (1)$$

$$u_i = K\sqrt{r} f_i(\theta) \quad (2)$$

由上式可见，裂纹尖端附近各点的应力分量与 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 成正比，当趋于裂纹尖端即 $r \rightarrow 0$ 时，应力急剧增长，在裂纹尖端处 $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$ ，故应力场在裂纹尖端具有奇异性。通常的有限元法，（位移法），在单元体中大都采用多项式位移插值函数，因而很难反映出裂纹尖端处应力的急剧变化，为解决这一问题，常用两种办法，一是采用常规单元（如三角元、四边形元等）在裂纹尖端划分十分细密的网格，文献〔3〕即为此例；另一法是采用特殊单元，选择能够反映裂纹尖端奇异性的位移插值函数，构成这种特殊的“奇异单元”的刚度阵，从而来求裂纹尖端的应力场和位移场。用前一种方法计算，则网格密、节点多、工作量大、占用机时多、费用贵；后一种方法则须专门编制“奇异单元”的程序，因而极不方便。

在本计算中采用的是，文献〔2〕、〔6〕中所介绍的“畸变等参元法”。这种方法的特点是把八节点四边形等参元边的中点从正常位置移到四分之一的边长处，这样在角节点附近即出现 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 的应变和应力的奇异性，因而能较好地反映出裂纹尖端的情况，具体推导、证明从略。

譬如裂纹尖端处的单元划分和节点位置设置如图（2）所示，即可得到较好的效果。

根据我们进行齿根裂纹有限分析的大量计算，感到采用畸变等参元求解裂纹问题的主要优点是：（1）可以反映裂纹尖端区应力的奇异性，具有一定的精度；（2）可以用通常的四边形八节点等

单元计算程序来分析裂纹问题，无需另外编制特殊单元的程序；
 (3) 可避免划分过密的网格，因而占用机时、所需费用及计算者的
 工作量等均可减少；(4) 可用国产小型计算机来进行关于带裂
 纹体的应力场分析及断裂方面的研究。

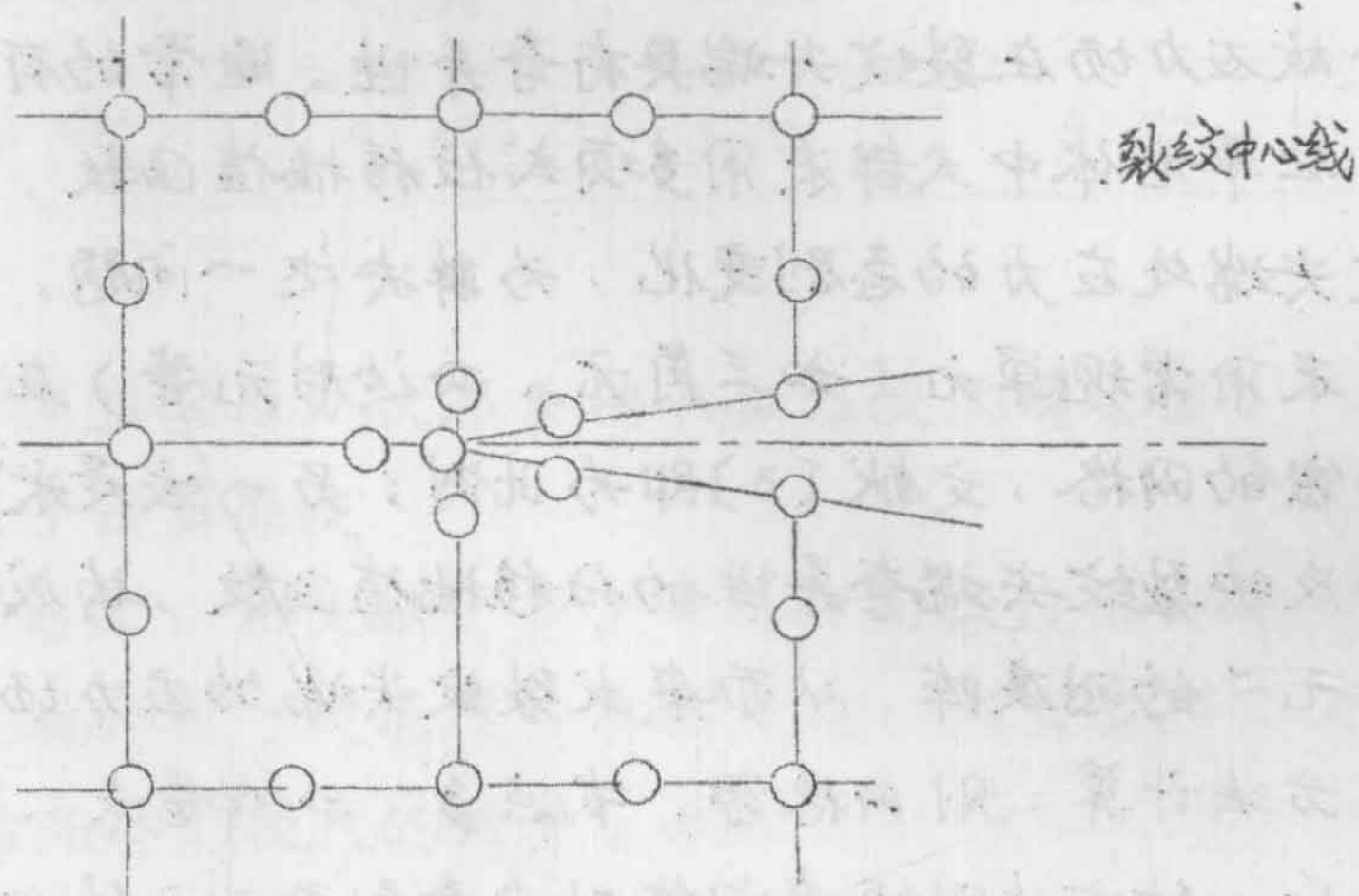


图2 裂纹尖端畸形单元节点设置情况

四、求取应力强度因子的方法

用线弹性断裂力学基本理论，可得到裂纹尖端区应力分量和
 位移分量的表达式：

对 I 型裂纹:

$$\text{应力分量} \begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right); \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right); \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{位移分量} \begin{cases} u = \frac{(1+\mu)}{2E} \cdot K_I \frac{r}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (2s-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right\}; \\ v = \frac{(1+\mu)}{2E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \end{cases} \quad (4)$$

对 II 型裂纹:

$$\text{应力分量} \begin{cases} \sigma_x = \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right); \\ \sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}; \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{位移分量} \begin{cases} u = \frac{(1+\mu)K_{II}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2s+3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right]; \\ v = \frac{-(1+\mu)K_{II}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2s-2) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right]. \end{cases} \quad (6)$$

在平面应变条件下，式中：($s=3-4\mu$)。

因此，用有限元法求取应力强度因子可分成二步进行：(1) 先用有限元法求取齿根裂纹尖端附近的位移分量或应力分量的数值解；

(2) 将所得结果代入裂纹尖端区的应力场或位移场的表达式

(3) — (6) 式并推算应力强度因子。

推算应力强度因子的具体方法有三，即：位移法、应力法及能量法，限于篇幅，仅介绍位移法和应力法。

位移法：该法主要是通过通过裂纹二侧成对节点间的相对张开位移 V^* 和相对滑开位移 u^* 来外推 I 型 II 型复合裂纹的应力强度因子 K_I 和 K_{II} 。

当把坐标原点置于裂纹尖端，并令 $\theta = \pi$ 时，对于平面应变问题则有

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot E \cdot u}{4(1-\mu^2)\sqrt{r}} = K_{II} \left(1 + a_1 \frac{r}{l} + \dots \right) \\ \frac{\sqrt{2\pi} \cdot E \cdot V}{4(1-\mu^2)\sqrt{r}} = K_I \left(1 + b_1 \frac{r}{l} + \dots \right) \end{cases} \quad (7)$$

上式取极限 $r \rightarrow 0$ ，则得到应力强度因子

$$\begin{cases}
 K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot E \cdot u}{4(1-\mu^2)\sqrt{r}} \\
 K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot E \cdot v}{4(1-\mu^2)\sqrt{r}}
 \end{cases}$$

由(8)式看出，若已知裂纹附近位移分量，便可求得 K_I 和 K_{II} 值。

图(3)为用有限元法求得加载前后齿根裂纹附近的位移情况

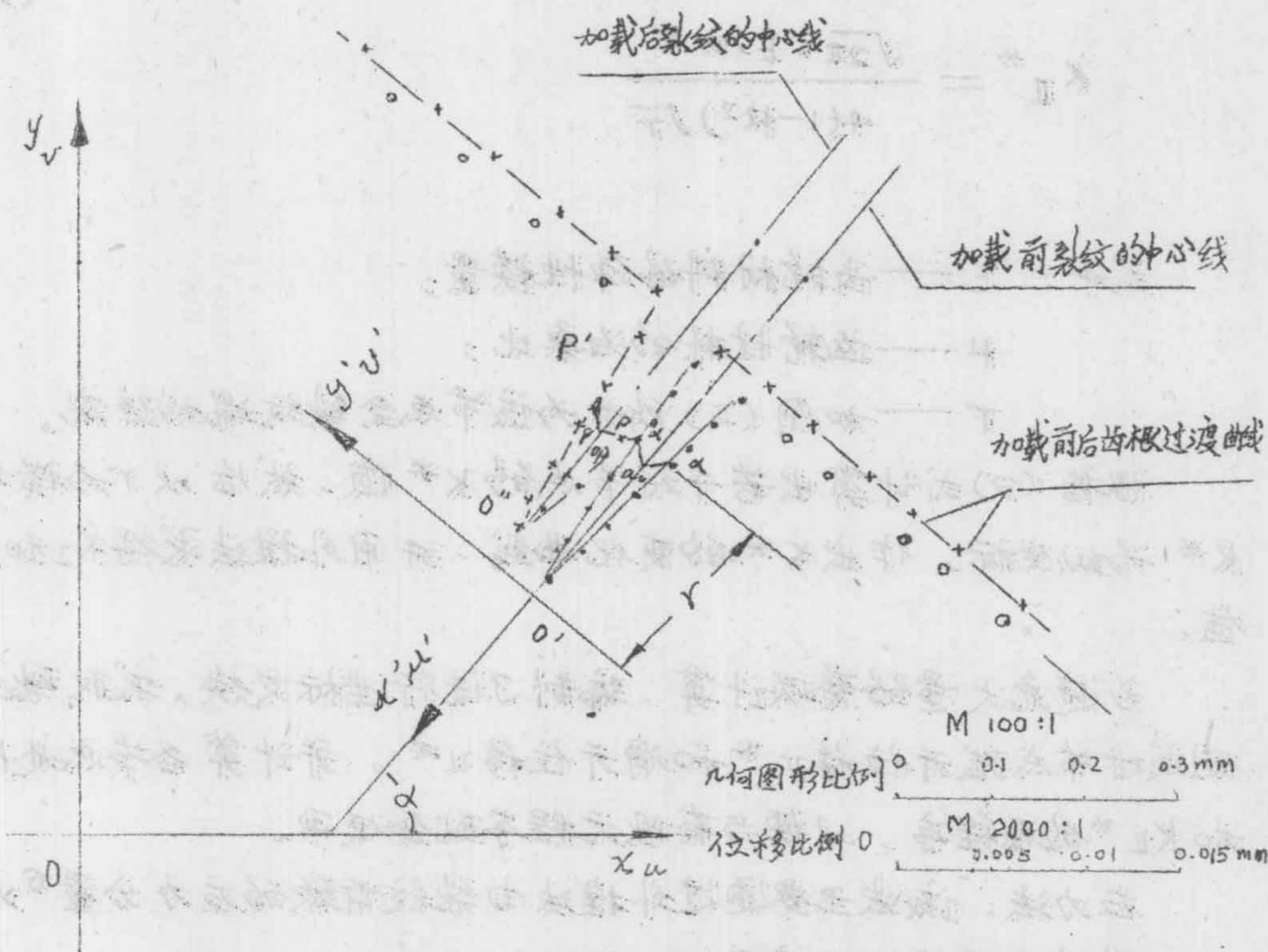


图3 有限元法求得加载前后齿根裂纹附近的位移情况

之一侧，首先，把用有限元法求得裂纹两侧各成对节点的位移值 u, v ，由原坐标系 xOy 变换成图中 $x'O'y'$ 坐标系中的位移分量 u' 和 v' ，然后再用 u' 和 v' 求取相应成对节点（如图中 P 点与 Q 点）间的相对张开位移 $v^* = (v'_p - v'_q) / 2$ ；和相对滑开位移 $u^* = (u'_p - u'_q) / 2$ 。由于裂纹尖端 $r = 0$ 处有限元解误差较大，同时为避免直接采用 (8) 式取极限的困难，可将 u^* 和 v^* 代入下式：

$$K_{I}^* = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot E \cdot v^*}{4(1-\mu^2)\sqrt{r}}$$

$$K_{II}^* = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot E \cdot u^*}{4(1-\mu^2)\sqrt{r}}$$

(9)

式中： E ——齿轮材料的弹性模量；

μ ——齿轮材料的泊桑比；

r ——如图 (3) 所示为该节点至裂纹端的距离。

根据 (9) 式计算出若干对节点的 K^* 值，然后以 r 为横坐标， K^* 为纵坐标，作出 K^* 的变化曲线，并用外推法求得 K_I 和 K_{II} 值。

为避免大量的繁项计算，编制了进行坐标变换、求取裂纹两侧成对节点张开位移 v^* 和滑开位移 u^* ，并计算各节点处 K_I^* 和 K_{II}^* 的源程序，以便与有限元程序配套使用。

应力法：该法主要通过外推法由裂纹前缘的应力分量 σ_y 求取 I 型裂纹的应力强度因子。

当把坐标原点置于裂纹尖端，并令 $r = 0$ 时，对于平面应变问题则有：

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (10)$$

根据位移法同样原理(推导从略), 可得

$$K_I^* = \sqrt{2\pi r} \sigma_y^* \quad (11)$$

算出若干节点处的 K_I^* 后, 以 r 为横坐标, K_I^* 为纵坐标把有关点绘出, 外推至 $r=0$ 处, 即可得到应力强度因子 K_I 值。

为进行上述计算, 同样我们也编制了由 σ_y 计算相应各点 K_I^* 的程序, 以便与有限元程序配合使用。

限于篇幅, 本文仅介绍用位移法进行推算的情况, 因为对比分析计算结果表明: 用“位移法”效果较好。

五. 不带裂纹齿根部位的应力分布情况

在文献〔5〕中已对齿根部位应力分布形态进行了详细的讨论, 这里不再重复。对于本算例我们按图 4(a)(b) 所示的网格划分法, 对齿根受拉侧与受压侧的应力分布情况反复进行了计算, 如图 5 所示为当载荷作用于不同位置时, 齿根受拉侧与受压侧的应力分布情况, 可见最大应力的位置都是在 Hofer 30° 线切点附近, 当载荷由齿顶 (A 位) 向下移动时最大应力位置也下移。

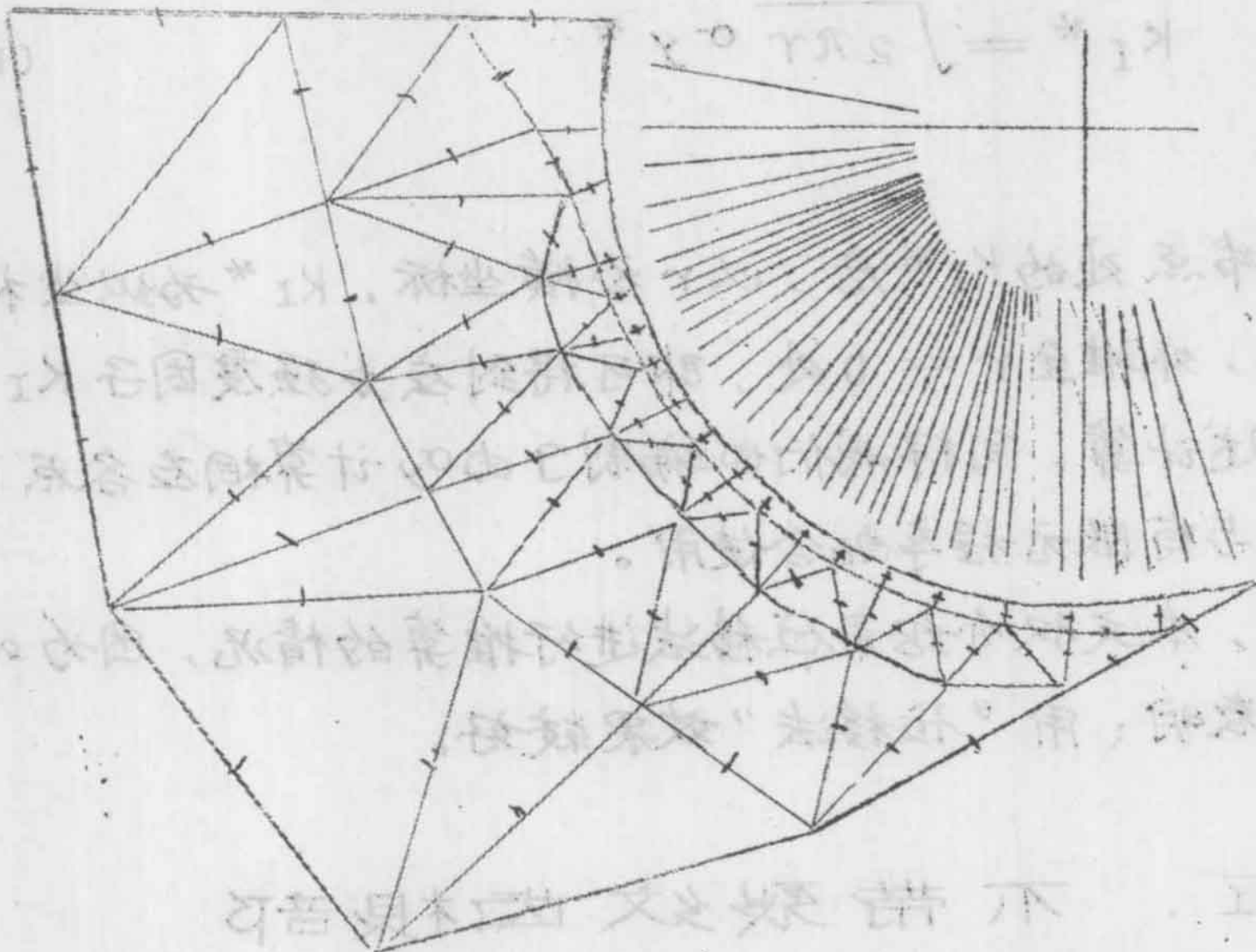
上述计算表明: 1) 齿根圆角区应力分布形态与文献〔5〕中所得结果是一致的。2) 当载荷作用于齿顶位置时, 最大应力的位置与 Hofer 30° 线切点十分接近, 故用 30° 切线法确定最大应力位置是相当准确的。3) 当载荷下移后, 最大应力值下降,

(9)

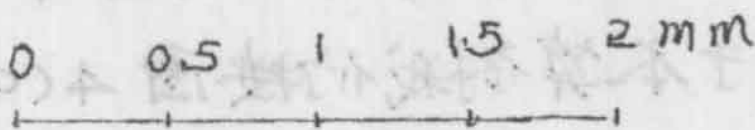
$$\frac{KI}{\sqrt{SRT}} = \gamma_0$$

图 4 (a) (b) (c) 齿根应力分布情况

(11)



图形比例 M 20:1

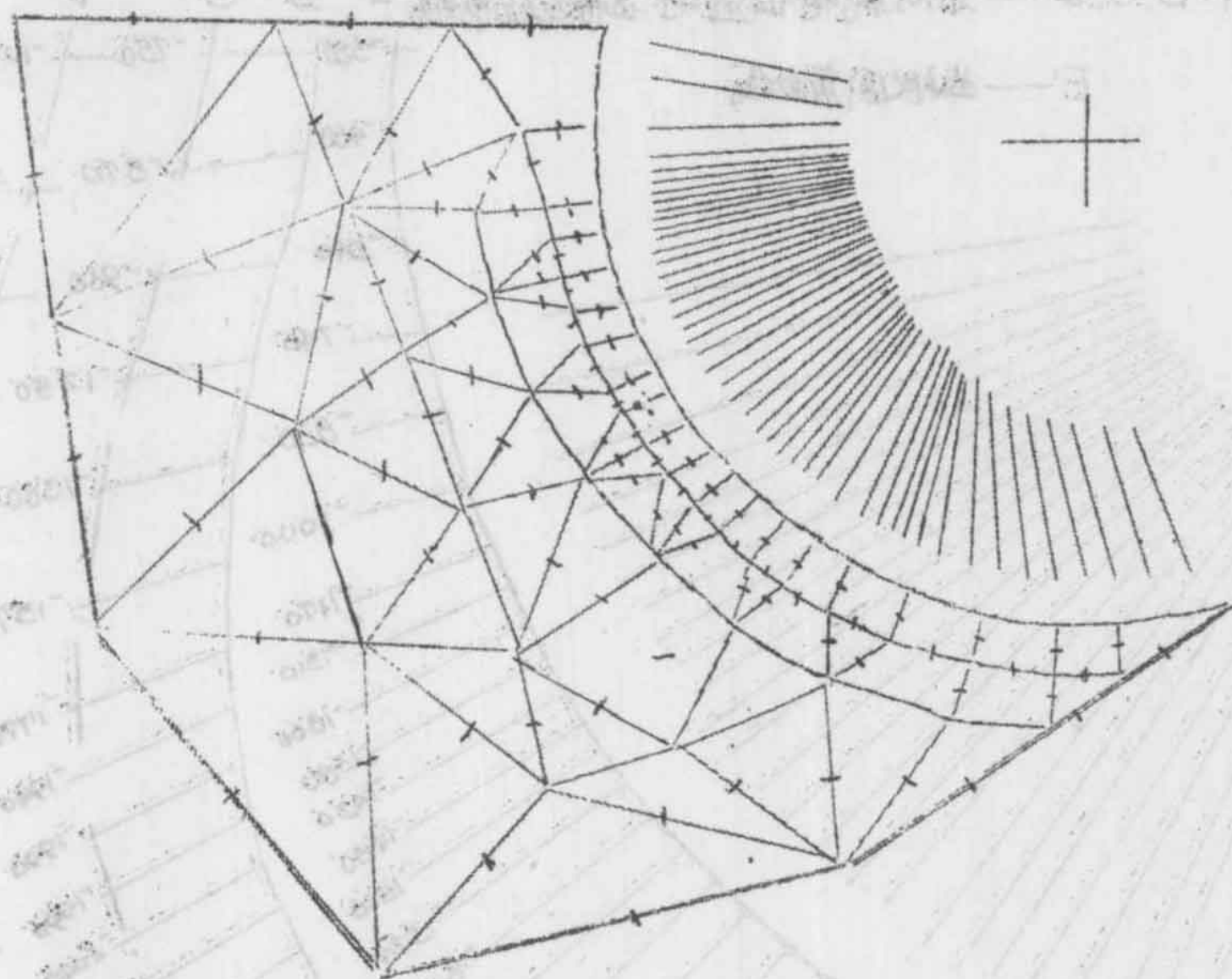


节点数 176

单元数 65

图 4 (a) 为进行齿根应力分布情况的计算而划分的网格。图 4 (b) 为齿根应力分布情况。图 4 (c) 为齿根应力分布情况。

图 4 (a) 为进行齿根应力分布情况的计算而划分的网格。图 4 (b) 为齿根应力分布情况。图 4 (c) 为齿根应力分布情况。



图形比例 M 20:1

0 0.5 1 1.5 2 mm

节点数 176

单元数 65

图 4 (b) 为进行齿根应力分布情况的计算而划分的网格