中国科学（A辑）
第24卷 第10期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1994年10月

无冲突存取系统的一类斜排方法

高庆狮 刘志勇
（中国科学院计算技术研究所，北京 100080）

摘 要

提出一种分段线性斜排方案，以解决具有 N 个存储模块的存储系统中的并行无冲突存取问题．在此基础上，提出一大类有效的分段线性斜排方案，含36种方案，它们中有些对 n 有不同的限制，而所能覆盖的数据模式也不尽相同．此方案把数据元素的逻辑地址分解为若干段，对各段进行线性组合而形成物理地址中的体号（即存储模块号），从而达到要求存储模块少而可并行存取的数据模式多的目的．

关键词 并行处理、并行体系结构、矩阵运算、无冲突存取、斜排方案

并行处理系统设计中的一个基本的问题是并行存储器系统的有效利用问题．在含多个存储体的并行存储系统中，如果在同一个存取周期产生对同一个存储体多于一个的存取要求，则称为发生了存取冲突．存取冲突会降低存储系统的有效频宽．20年来，人们对并行存储系统进行了大量的研究，提出了若干种斜排方案(skewing schemes)[1—15]．

设一个系统采用 M 个存储体，而有一个 $N\times N$ 的矩阵 $A[0: N-1, 0: N-1]$ 被处理．一个斜排方案 $F(i, j)=k$，$0<=i, j<=N-1$，$0<=k<=M-1$，是指矩阵 A 的元素 $A[i, j]$ 被存储于存储体 $F(i, j)=k$ 中．令 T 是一个矩阵中某些类子矩阵的集合，比如 $T=\{$行、列、主对角线、反对角线$\}$．如果一个斜排方案允许对集合 T 中的任一类子矩阵元素并行无冲突存取，则称该斜排方案对于 T 是有效的．比如 $T=\{$行，列，主对角线，反对角线$\}$，斜排方案 $F(i, j)$ 对 T 有效，则在 $F(i, j)$ 映象之下，对角线上的任何两个元素均不会存储于同一存储体中．

如果一个斜排方案可以表示为 $F(i, j)=(a*i+b*j)\bmod N$，其中 a 和 b 为常数，则这个斜排方案就称为线性斜排方案．Budnik 和 Kuck 提出了一个素数存储系统[4]．Lawrie 在文献[5]中提出一个斜排方案，这一方案要求 $M=2N$ 个存储体，N 是一个2的完全方次数，此方案可做到对行、列、对角线及子矩阵块进行并行无冲突存取．已经证明[4,5]，对于 $M=N=2^t$，$t=1, 2, 3, \cdots$，不存在一种线性斜排方案对 $T=\{$行、列、对角线、反对角线$\}$有效．Colbourn 和 Heinrich 提出一种斜排方案[11]，该方案可对 $N\times N$ 矩阵的 $r\times s$ 及 $s\times r$ 子矩阵无冲突存取，此处 $r\times s<N$．文献[8—10]及[12—15]提出了各种非线性斜排方案，研究了它们对各种数据模块的并行存取

1993-11-02收稿，1994-05-31收修改稿．

能力．

本文提出一种"分段的线性斜排方案"的概念，这与 Budnik 和 Kuch 提出的线性概念有所不同．该方案仅用 N 个存储体，而能对 $SN\times SN$ 矩阵的行、列、对角线与反对角线、分散块、连续块及以任意列为起始点的浮动块，进行无冲突存取(分散块、连续块及浮动块的定义见下节)，其中 $N=n*n$, $n>1$, S 是任意正整数．然后，基于上述思想，把上述方案推广为一大类斜排方案，并要求存储模块少，而所能覆盖的(可并行无冲突存取的)数据模式多．

1　一个分段的线性斜排方案

1.1　术语

定义 1　一个有效的线性斜排方案若满足下列条件，则称为有效的分段性方案．存在常数 $a_p\in\{1, 0, -1\}$, $p=0, 1, 2, 3$, 使得

$$F(in+j,\ kn+t)=((k+a_0i+a_1j)\bmod n)\times n+(t+a_2i+a_3j)\bmod n$$

或者

$$F(in+j,\ kn+t)=((t+a_0i+a_1j)\bmod n)\times n+(k+a_2i+a_3j)\bmod n,$$

其中　$$0<=i,\ j,\ k,\ t<=n-1,\ n*n=N.$$

定义 2(分散块)　矩阵 $A[0: N-1, 0: N-1]$ 的分散块 $D_{i,j}$ 是指如下集合:

$$D_{i,j}=\{A[i+rn,\ j+r'n]|0<=i,\ j,\ r,\ r'<=n-1\}.$$

定义 3(连续块)　矩阵 $A[0: N-1, 0: N-1]$ 的连续块 $C_{i,j}$ 是指如下集合:

$$C_{i,j}=\{A[in+r,\ jn+r']|0<=r,\ r'<=n-1\},$$

其中　$$0<=i,\ j<=n-1$$

定义 4(浮动的连续块)　矩阵 $A[0: N-1, 0: N-1]$ 的浮动的连续块 $C_{i,j}$ 是指如下集合:

$$C_{i,j}=\{A[in+r,\ j+r']|0<=r,\ r'<=n-1,\},$$

其中　$$0<=i<=n-1,\ 0<=j<N-n.$$

定义 5(扩展行与扩展列)　矩阵 $A[0: SN-1, 0: SN-1]$ 的扩展行是指行中的一串元素，其长度为 N，扩展列是指列中的一串元素，长度为 N.

定义 6(扩展的对角线与反对角线)　矩阵 $A[0: SN-1, 0: SN-1]$ 的扩展对角线(反对角线)是指其对角线(反对角线)上的 N 个元素．数学表达为

对角线:　$$\{A[i',\ rN+i']|0<=i'-i<N,\ 0<=rN+i<SN\},$$

其中　$$0<=i<=(S-1)N,\ 0<=rN+i<=(S-1)N.$$

反对角线:　$$\{A[i',\ rN-i'-1]|0<=i'-i<N,\ 0<=rN-i'-1<SN\},$$

其中　$$0<=i<=(s-1)N,\quad N<=rN-i-1<SN.$$

定义 7(扩展的连续块)　矩阵 $A[0: SN-1, 0: SN-1]$ 的扩展的连续块是指 $\{A[in+i', jn+j']|0<=i', j'<n\}$ 其中 $0<=i, j<SN$.

定义 8(扩展的浮动连续块)　矩阵 $A[0: SN-1, 0: SN-1]$ 的扩展的浮动连续块是指 $\{A[in+i', j+j']|0<=i', j'<n\}$, 其中 $0<=i<SN$, $0<=j<=SN-n$.

定义 9(扩展的分散块)　矩阵 $A[0: SN-1, 0: SN-1]$ 的扩展的分散块是指 $\{A[i+i'n, j+j'n]|0<=i', j'<n\}$, 其中 $0<=i, j<n$.

上述定义 5—9 中的扩展概念包含了通常情况下的概念，即，通常情况下的概念是上述扩

展了的概念当 $S=1$ 时的特例.

我们定义 EU 为如下模式的集合：$EU=\{$扩展行、扩展列、扩展对角线、扩展反对角线、扩展连续块、扩展分散块$\}$. 定义 EG 包含 EU 全部元素再加上扩展浮动连续块.

上述各种矩阵元素所构成的模式常用于数值分析、信号处理、图象处理及模式识别各种算法中.

1.2 一个对 *EG* 有效的分段线性斜排方案 VSLSS

在以下叙述中，假设 N 是系统中所具有的处理机的数目，也是系统中所具有的存储体的数目，且 $N=n\times n$. 设 A 是一个 $SN\times SN$ 的矩阵. 此处 S 和 n 是大于 1 的任意整数. 为了本方案易于以标准的电路实现，S 和 n 取为 2 的完全方次；$S=2^{l'}$, $l'>=0$, $n=2^l$, $l>=1$. 在上述约定下，矩阵 A 中任意一元素的地址可以用 L 位的二进制数表示，而 $L=2(2l+l')$.

用 d 表示用户地址，而 d' 表示经过斜排后的物理地址：

$$\begin{cases} d=(pN+in+j)SN+qN+kn+t, \\ d'=(pN+in+j)SN+qN+k'n+t'. \end{cases}$$

上述地址表达式的有效性在于，一个 $SN\times SN$ 矩阵的任意元素的两个下标可以表示为 $pN+in+j$ 和 $qN+kn+t$ 的形式.

在上述表达方式下，提出的斜排方案 VSLSS 表示为

$$t'=(t+i)\bmod n, \quad k'=(k+i+j)\bmod n.$$

即 $F(pN+in+j,\ qN+kn+t)=((t+i)\bmod n)n+(k+i+j)\bmod n$.

从以上可以看出，为实现这一斜排方案所需要的地址计算（体号计算）是很简单的. 它可以用通常的地址加法器实现，而不需要专门设计的硬件，就可以实现体号计算. 从下节可以看出，这一斜排方案的功能是非常强的，它可以保障上面定义的 EG 集合中任意模式的并行无冲突存取.

1.3 斜排方案 VSLSS 的有效性

下面证明采用这一斜排方案，对上面定义的 EG 集合中任意模式均可进行并行无冲突存取，即是说矩阵 A 的行中、列中、对角线中、连续块中、浮动的连续块中、分散块中的 N 个元素均分布在 N 个存储体中，从而保证具有 N 存储体的存储系统每个存取周期均可供出（或写回）N 个数.

设矩阵元素 $A[X, Y]$、$X=pN+in+j$, $Y=qN+kn+t$, 存储于体号为 $F(X, Y)=k'n+t'$ 的存储体中，其中 $0<=p$, $q<s$, $0<=X$, $Y<SN$, $0<=i, j, k, t, k', t'<n$.

定理 1　利用斜排方案 VSLSS，对矩阵的扩展行可以做到并行无冲突存取.

定理 2　利用斜排方案 VSLSS，对矩阵的扩展列可做到无冲突存取.

上述两定理的正确性非常明显，故略去证明.

定理 3　利用斜排方案 VSLSS，对矩阵的扩展对角线可做到无冲突存取.

证　为证明此定理，只需证明扩展对角线上的任意两个元素均不会存储于同一个存储体中.

任取扩展对角线上的两元素 $A[X_1, rN+X_1]$ 和 $A[X_2, rN+X_2]$，显然有（由定义 6）$0<|X_1-X_2|<N$, $0<=rN+X_1$, $rN+X_2<SN$, $0<=r<S$. 下面证明 $F(X_1, rN+X_1)\neq F(X_2, rN+X_2)$.

由于 $Y_1=rN+X_1$, $Y_2=rN+X_2$，所以 $k_1=i_1$, $k_2=i_2$, $t_1=j_1$, $t_2=j_2$. 假设 $F(X_1, rN+X_1)=F(X_2,$

$rN+X_2)$, 则会有 $(((k_1+i_1+j_1)\bmod n-(k_2+i_2+j_2)\bmod n))\times n+(((t_1+i_1)\bmod n)-((t_2+i_2)\bmod n))=0$ 从而有 $(((2i_1+j_1)\bmod n)-(2i_2+j_2)\bmod n)\times n((j_1+i_1)\bmod n-((j_2+i_2)\bmod n))=0$, 即有 $i_1=i_2$, 且 $j_1=j_2$.

但　　　　$0<|X_1-X_2|<N$. 从而 $i_1n+j_1\neq i_2n+j_2$.

所以　　　　$F(X_1,\ rN+X_1)\neq F(X_2,\ rN+X_2)$. 证毕.

定理 4　利用斜排方案 VSLSS, 对扩展反对角线可做到无冲突存取.

证　与定理 3 的证明相似, 故从略.

定理 5　利用斜排方案 VSLSS, 对扩展的浮动连续块可以无冲突存取.

证　任取扩展的浮动连续块中两元素 $A[X_1,\ Y_1]$, $A[X_2,\ Y_2]$, 其中 X_1, X_2, Y_1, Y_2 表示为

$$\begin{cases}X_1=P_1N+i_1n+j_1,\\ X_2=P_2N+i_2n+j_2,\end{cases}\qquad\begin{cases}Y_1=q_1N+K_1n+t_1,\\ Y_2=q_2N+K_2n+t_2.\end{cases}$$

由于 $A[X_1,\ Y_1]$, $A[X_2,\ Y_2]$ 在同一浮动连续块中, 由定义知一定有 $|Y_1-Y_2|<n$, 及 $\lfloor X_1/n\rfloor=\lfloor X_2/n\rfloor$. 因为 $\lfloor X_1/n\rfloor=\lfloor X_2/n\rfloor$, 所以有 $i_1=i_2$. 如果 $F(X_1,\ Y_1)=F(X_2,\ Y_2)$, 则将有

$$(((k_1+i_1+j_1)\bmod n-(k_2+i_2+j_2)\bmod n))\times n+(((t_1+i_1)\bmod n)-((t_2+i_2)\bmod n))=0,$$

从而要求 $(k_1+j_1)\bmod n=(k_2+j_2)\bmod n$, 且 $t_1=t_2$. 当 $Y_1\neq Y_2$ 时, 由于 $|Y_1-Y_2|<n$, 知必然有 $t_1\neq t_2$. 当 $Y_1=Y_2$ 时, 知此时必然有 $X_1\neq X_2$(否则这两个元素便成了同一个元素), 此时必然有 $k_1=k_2$ 且 $j_1\neq j_2$, 即必然有

$$(k_1+j_1)\bmod n\neq(k_2+j_2)\bmod n.$$

从而知一定有 $F(X_1,\ Y_1)\neq F(X_2,\ Y_2)$. 证毕.

从定义 7 和定义 8 知扩展的连续块是扩展的浮动连续块的特例(即列起始点不能浮动, 而必须在 n 的整数倍处), 从而有如下推论:

推论 1　利用斜排方案 VSLSS, 对扩展的连续块可以并行无冲突存取.

定理 6　利用斜排方案 VSLSS, 对扩展的分散块可以并行无冲突存取.

证　由扩展的分散块定义(定义 9)知, 若 $A[X_1,\ Y_1]$, $A[X_2,\ Y_2]$ 在同一分散块中, 则一定有

(1) $|X_1-X_2|<N$ 且 $|Y_1-Y_2|<N$,

(2) $|X_1-X_2|<0$ 或 $|Y_1-Y_2|>0$,

(3) $X_1\bmod n=X_2\bmod n$,

$Y_1\bmod n=Y_2\bmod n$.

同样, 以定理 5 中的形式表示 X_1, X_2, Y_1, Y_2. 从 2.3 节知 $j_1=j_2$, $t_1=t_2$. 如果 $F(X_1,Y_1)=F(X_2,Y_2)$, 则必然有

$$(((k_1+i_1+j_1)\bmod n)-((k_2+i_2+j_2)\bmod n))\times n((t_1+i_1)\bmod n-((t_2+i_2)\bmod n))=0,$$

从而得到 $i_1=i_2$ 及 $k_1=k_2$. 但由于 $|X_1-X_2|>0$ 或 $|Y_1-Y_2|>0$(否则这两个元素使实际上是同一个元素), 所以知必须有 $i_1\neq i_2$ 或 $k_1\neq k_2$. 因此 $F(X_1,X_2)\neq F(X_1,Y_2)$. 证毕.

由定理 1 至定理 6 及推论 1 可以看到斜排方案 VSLSS 的强大功能, 它可以使得矩阵被以 EG 中的任一种模式而并行无冲突存取, 做到了仅用 N 个存储体而每个存取周期供出(或存入) N 个元素, 保障了并行存储器的最大频宽.

图 1 是 VSLSS 的一个例子, 本例中 $S=1$, $n=4$, $N=n\times n=16$. 斜排方案表示为

$$F(in+j,\ kn+t)=k'n+t'.$$

图中行号以 ij 并列表示，比如 03 即表示 $i=0$, $j=3$. 列号以 kt 并列表示，比如 10 即表示 $k=1$, $t=0$. 行列交叉处的数字即是 $k't'$. 比如，03 行与 10 列交叉处的数字为 00, 即表示这一数据元素存储于 00 号存储体中，即 16×16 矩阵元素 $A[3, 4]$ 存储与 0 号存储体中.

ij \ kt	00	01	02	03	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33
00	00	01	02	03	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33
01	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33	00	01	02	03
02	20	21	22	23	30	31	32	33	00	01	02	03	10	11	12	13
03	30	31	32	33	00	01	02	03	10	11	12	13	20	21	22	23
10	11	12	13	10	21	22	23	20	31	32	33	30	01	02	03	00
11	21	22	23	20	31	32	33	30	01	02	03	00	11	12	13	10
12	31	32	33	30	01	02	03	00	11	12	13	10	21	22	23	20
13	01	02	03	00	11	12	13	10	21	22	23	20	31	32	33	30
20	22	23	20	21	32	33	30	31	02	03	00	01	12	13	10	11
21	32	33	30	31	02	03	00	01	12	13	10	11	22	23	20	21
22	02	03	00	01	12	13	10	11	22	23	20	21	32	33	30	31
23	12	13	10	11	22	23	20	21	32	33	30	31	02	03	00	01
30	33	30	31	32	03	00	01	02	13	10	11	12	23	20	21	22
31	03	00	01	02	13	10	11	12	23	20	21	22	33	30	31	32
32	13	10	11	12	23	20	21	22	33	30	31	32	03	00	01	02
33	23	20	21	22	33	30	31	32	03	00	01	02	13	10	11	12

图1　VSLSS 之一例 ($S=1$, $N=16$, $n=4$)

2　一类有效的分段线性斜排方案

本节将对上节的结果逐步推广，给出一大类有效的分段线性斜排方案的一般的表达方式.

2.1　一类有效的分段线性斜排方案 CVSLSS-1

这一类分段线性斜排方案可以表达为

$$\begin{cases} t'=(t+w_1 i+w_2 j) \bmod n, \\ k'=(k+w_3 i+w_4 j) \bmod n, \end{cases}$$

式中参数 w_1, w_2, w_3, w_4 的取值可以为 0, 1 或者 −1. 由于这 4 个参数每个都可以有 3 种不同的值，这一类分段线性斜排方案一共包含 3^4 种方案，但其中只有 18 种是有效的. 下面列出这 18 种不同的方案.

(1) $\begin{cases} t'=((t+i)\text{mod } n), \\ k'=((k+i+j)\text{mod } n), \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} t'=((t-i)\text{mod } n), \\ k'=((k-i-j)\text{mod } n), \end{cases}$

(3) $\begin{cases} t'=((t+i)\text{mod } n), \\ k'=((k-i+j)\text{mod } n), \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} t'=((t-i)\text{mod } n), \\ k'=((k+i-j)\text{mod } n), \end{cases}$

(5) $\begin{cases} t'=((t+i+j)\text{mod } n), \\ k'=((k+j)\text{mod } n), \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} t'=((t-i-j)\text{mod } n), \\ k'=((k-j)\text{mod } n), \end{cases}$

(7) $\begin{cases} t'=((t+i-j)\text{mod } n), \\ k'=((k+j)\text{mod } n), \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} t'=((t-i+j)\text{mod } n), \\ k'=((k-j)\text{mod } n), \end{cases}$

(9) $\begin{cases} t'=((t-i)\text{mod } n), \\ k'=((k-i+j)\text{mod } n), \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} t'=((t+i)\text{mod } n), \\ k'=((k-i-j)\text{mod } n), \end{cases}$

(11) $\begin{cases} t'=((t-i)\text{mod } n), \\ k'=((k+i+j)\text{mod } n), \end{cases}$　　(12) $\begin{cases} t'=((t+i)\text{mod } n), \\ k'=((k+i-j)\text{mod } n), \end{cases}$

(13) $\begin{cases} t'=((t+i+j)\text{mod } n), \\ k'=((k-j)\text{mod } n), \end{cases}$　　(14) $\begin{cases} t'=((t-i+j)\text{mod } n), \\ k'=((k-j)\text{mod } n), \end{cases}$

(15) $\begin{cases} t'=((t+i-j)\text{mod } n), \\ k'=((k-j)\text{mod } n), \end{cases}$　　(16) $\begin{cases} t'=((t-i-j)\text{mod } n), \\ k'=((k+j)\text{mod } n), \end{cases}$

(17) $\begin{cases} t'=((t+i)\text{mod } n), \\ k'=((k-j)\text{mod } n), \end{cases}$　　(18) $\begin{cases} t'=((t-i)\text{mod } n), \\ k'=((k+j)\text{mod } n). \end{cases}$

在上述表达式中，对 n 有不同的限制：在方案(1)—(8)中 n 可以为任意正整数，在(9)—(16)中 n 为 3 的整数倍，在(17)和(18)中 n 只能取奇数值．

下面讨论上述 18 种有效方案的有效性．概括地讲，方案(1)—(4)，(7)—(12)以及方案(17)和(18)对 EG 中所有数据模式有效，而其余方案则对 EU 中所有数据模式有效．下面小节将证明上述结论．

2.2　关于 CVSLSS-1 中各种方案有效性的证明

由于所要证明的方案有 18 个，逐一证明它们具有某种性质将非常繁琐．本小节列出证明中会用到的一些引理，然后给出一个表格指出为某种方案的有效性而要用到的引理．

我们仍设 $X=pN+in+j$，$Y=qN+kn+t$，$F(X, Y)=k'n+t'$，其中 $0<=p, q<S$，$0<=X, Y<SN$，$0<=i, j, k, t, k', t'<n$．当然，这里的 t' 和 k' 为

$$t'=(t+w_1i+w_2j)\text{ mod} n,\qquad k'=(k+w_3i+w_4j)\text{ mod } n,$$

而 w_1, w_2, w_3, w_4 取值可以为 0, 1和 -1．

引理 1　如果 $0<|Y_1-Y_2|<N$，则 $F(X, Y_1)\neq F(X, Y_2)$．

证　假设 $F(X, Y_1)=F(X, Y_2)$，

则

$$(((k_1+w_3i+w_4j)\text{ mod } n)-((k_2+w_3i+w_4j)\text{ mod } n))\times n+(((t_1+w_1i+w_2j)\text{ mod } n)$$
$$-((t_2+w_1i+w_1j)\text{ mod } n))=0,$$

由此可推得 $t_1=t_2$ 及 $k_1=k_2$．但 $0<|Y_1-Y_2|<N$，所以必须有 $k_1n+t_1\neq k_2n+t_2$．从而引理得证．证毕．

引理 2　如果 $0<|X_1-X_2|<N$，$w_1w_4-w_2w_3\neq 0$，并且 w_1, w_2, w_3, w_4 中有一个且仅一个为 0,

则 $F(X, Y) \neq F(X_2, Y)$.

证 与引理 1 类似，从略.

引理 3 若如下条件满足，则 $F(X_1, rN+X_1) \neq F(X_2, rN+X_2)$.

(1) $0 <= |X_1 - X_2| < N$, (2) $0 <= rN+X_1, rN+X_2 < SN$, (3) $\{w_1, 1+w_2, 1+w_3, w_4\}$ 中有且仅有一个取值为 0, 其余取为 1 或 −1, 或 w_2 和 w_3 中有一个取值为 1 而另一个取值为 −1. 而 $w_1 = w_4$ 取值为 1 或 −1.

证 由于 $Y_1 = rN+X_1$ 及 $Y_2 = rN+X_2$, 从而知 $k_1 = i_1$, $k_2 = i_2$, $t_1 = j_1$ 及 $t_2 = j_2$.

假设 $F(X_1, rN+X_1) = F(X_2, rN+X_2)$ 与引理 1 中推导类似，可以得到

$$((1+w_3)i_1 + w_4 j_1) \bmod n = ((1+w_3)i_2 + w_4 j_2) \bmod n$$

及

$$(w_1 i_1 + (1+w_2)j_1) \bmod n = (w_1 i_2 + (1+w_2)j_2) \bmod n$$

再应用条件 (3) 可得到 $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$. 但 $0 < |X_1 - X_2| < N$, 即 $i_1 n + j_1 \neq i_2 n + j_2$. 从而知 $F(X_1, rN+X_1) \neq F(X_2, rN+X_2)$. 证毕.

引理 4 当下述条件满足时，$F(X_1, rN-X_1-1) \neq F(X_2, rN-X_2-1)$.

(1) $0 < |X_1 - X_2| < N$,

(2) $0 <= rN - X_1 - 1$, $rN - X_2 - 1 < SN$,

(3) $\{w_1, w_2-1, w_3-1, w_4\}$ 中有一个且仅有一个为 0, 其余为 1 或 −1, 或 w_3, w_4 中有一个为 0 另一个为 −1, 而 $w_1 = w_4$ 为 1 或 −1.

证 与引理 3 类似，故略去.

引理 5 当下述条件满足时，$F(X_1, Y_1) \neq F(X_2, Y_2)$.

(1) $|Y_1 - Y_2| < n$, (2) $Y_1 \neq Y_2$ 或者 $X_1 \neq X_2$ 但 $Y_1 = Y_2$, (3) $\lfloor X_1/n = X_2/n \rfloor$, (4) $w_3 = 0$ 而 $w_4 \neq 0$.

证 与引理 1 类似，从略.

引理 6 当下述条件满足时，$F(X_1, Y_1) \neq F(X_2, Y_2)$.

(1) $|X_1 - X_2| < N$ 且 $|Y_1 - Y_2| < N$, (2) $|X_1 - X_2| > 0$ 或 $|Y_1 - Y_2| > 0$, (3) $X_1 \bmod n = X_2 \bmod n = C_1$, $Y_1 \bmod n = Y_2 \bmod n = C_2$, 其中 C_1, C_2 为常数, (4) $w_1 \neq 0$.

证 与引理 1 类似，从略.

引理 7 若下述条件成立，则 $F(X_1, Y_1) \neq F(X_2, Y_2)$.

(1) $Y_1 \neq Y_2$ 或 $X_1 \neq X_2$.

(2) $\lfloor X_1/n \rfloor = \lfloor X_2/n \rfloor$ 且 $\lfloor Y_1/n \rfloor = \lfloor Y_2/n \rfloor$,

(3) $w_4 \neq 0$.

证 由条件 (2) 知，$i_1 = i_2$ 且 $k_1 = k_2$.

若 $F(X_1, Y_1) = F(X_2, Y_2)$, 则能推导出

$$j_1 \bmod n = j_2 \bmod n \text{ 及 } (t_1 + w_2 j_1) \bmod n = (t_2 + w_2 j_2) \bmod n,$$

即 $t_1 = t_2$ 及 $k_1 = k_2$. 但由于条件 (1), 要求 $i_1 \neq i_2$ 或 $k_1 \neq k_2$. 从而 $F(X_1, Y_1) \neq F(X_2, Y_1)$. 证毕.

引理 8 若下述条件满足，则 $F(X_1, rN+X_1) = F(X_2, rN+X_2)$.

(1) n 不能被 3 整除,

(2) $0 < |X_1 - X_2| < N$, $0 <= rN+X_1$, $rN+X_2 < SN$,

(3) w_2 和 w_3 中有一个为 1, 另一个为 0,

(4) $w_1 = -w_4 = 1$ 或 $w_1 = -w_4 = -1$.

证 与引理 3 类似，从略.

引理 9 若下述条件成立，则 $F(X_1, rN-X_1-1)\neq F(X_2, rN-X_2-1)$.

(1) n 不能被 3 整除，

(2) $0<|X_1-X_2|<N$, $0\le rN-X_1-1$, $rN-X_2-1<SN$,

(3) w_2 和 w_3 其中之一为 -1，而另一为 0,

(4) $w_1=-w_4=1$ 或 $w_1=-w_4=-1$.

证 由于 $Y_1=rN-X_1-1$, $Y_2=rN-X_2-1$, 可以导出 $t_1=n-1-j_1$, $t_2=n-1-j_2$ 以及 $k_1=n-1-i_1$, $k_2=n-1-i_2$. 如果 $F(X_1, rN-X_1-1)=F(X_2, rN-X_2-1)$, 则将导致 $((w_3-1)i_1+w_4j_1) \bmod n=((w_3-1)i_2+w_4j_2) \bmod n$ 及 $(w_1i_1+(w_2-1)j_1) \bmod n=(w_1i_2+(w_2-1)j_2) \bmod n$.

由条件 (3)、(4) 又可导致 $j_1=j_2$ 及 $i_1=i_2$. 但由条件 (2) 知 $i_1n+j_1\neq i_2n+j_2$, 故不能有 $i_1=i_2$ 或 $j_1=j_2$. 所以 $F(X_1, rN-X_1-1)\neq F(X_2, rN-X_2-1)$. 证毕.

引理 10 当下述条件满足时，$F(X_1, rN+X_1)\neq F(X_2, rN+X_2)$.

(1) $0<|X_1-X_2|<N$, $0\le rN+X_1, rN+X_2<SN$,

(2) n 是奇数，(3) $w_2=w_3=0$, (4) $w_1=-w_4=1$ 或 $w_1=-w_4=-1$.

证 与引理 3 类似，从略.

引理 11 当下述条件满足时，$F(X_1, rN-X_1-1)\neq F(X_2, rN-X_2-1)$.

(1) $0<|X_1-X_2|<N$, $0\le rN-X_1-1$, $rN-X_2-1<SN$,

(2) n 为奇数，(3) $w_2=w_3=0$. (4) $w_1=-w_4=1$ 或 $w_1=-w_4=-1$.

证 由于 $Y_1=rN-X_1-1$, $Y_2=rN-X_2-1$, 可得到

$$t_1=n-1-j_1,\ t_2=n-1-j_2,\ k_1=n-1-i_1 \text{ 及 } k_2=n-1-i_2.$$

若 $F(X_1, rN-X_1-1)=F(X_2, rN-X_2-1)$, 则将导致

$$(-i_1+w_4j_1) \bmod n=(-i_2+w_4j_2) \bmod n \text{ 及 } (w_1i_1-j_1) \bmod n=(w_1i_2-j_2) \bmod n,$$

再由条件 (2) 及条件 (4) 可导致 $j_1=j_2$ 及 $i_1=i_2$. 但由条件 (1) 知不可能有 $i_1=j_2$ 及 $i_1=i_2$. 所以 $F(X_1, rN-X_1-1)\neq F(X_2, rN-X_2-1)$. 证毕.

定理 2 方案 (1)—(4) (对 n 无限制), 方案 (9)—(12) (当 n 不能被 3 整除时) 及方案 (17)—(18) (当 n 为奇数时) 对于集合 EG 是有效的; 方案 (5)—(8) (当 n 无限制), 方案(13)—(16) (当 n 不能被 3 整除时) 对于集合 EU 是有效的.

表 1

方案号	对 n 的限制	有效性	所用引理号
1—4	无限制	EG	1, 2, 3, 4, 5, 6
5—8	无限制	EU	1, 2, 3, 4, 6, 7
9—10	n 不能被 3 整除	EG	1, 2, 3, 5, 6, 9
11—12	n 不能被 3 整除	EG	1, 2, 4, 5, 6, 8
13—14	n 不能被 3 整除	EU	1, 2, 4, 6, 7, 8
15—16	n 不能被 3 整除	EU	1, 2, 3, 6, 7, 9
17—18	n 为奇数	EG	1, 2, 5, 6, 10, 11

这一定理可以应用引理 1 至引理 11 而得到. 表 1 给出各种方案具备的性质及证明中要用的引理号码.

2.3 CVSLSS-1 的进一步推广

下述定理可把 CVSLSS-1 进一步推广为一类分段的线性斜排方案.

定理 3 如果 $t'=F(t, i, j)$, $k'=G(k, i, j)$

对集合 EG(或 EU) 是一个有效的分段线性斜排方案，则

$$t' = G(k,\ i,\ j),\quad k' = F(t,\ i,\ j)$$

对集合 EG(或 EU)也是一个有效的分段线性斜排方案.

此定理的成立是显然的,故此处略去其证明. 根据定理 3, CVSLSS-1 这一类有效的分段线性斜排方案可以扩展为 36 种斜排方案,统称为 CVSLSS.

3 结　论

本文给出了一种斜排方案 VSLSS 方案. VSLSS 方案使我们可以采用最小数目的存储体,实现极强的并行存取功能. 这种方案优越性在于它可以仅仅采用 N 个存储体,而对 $SN \times SN$ 矩阵的多种模式的、含有 N 个元素的子矩阵进行并行无冲突存取,从而可以使多体存储器系统充分发挥它的最高存取速率. 此方案的基本思想是按一定规则把矩阵元素下标地址划分不同的段,通过对各段进行相应的线性运算而产生矩阵元素的存储体号,从而实现了上述的极强的并行存取功能. 在此基础上,推广了这一方案而成为一大类斜排方案,称之为分段的线性斜排方案. 通过对这类方案的一般表达式中参数取不同值的方式,给出了这一方案中不同方案的实例(即各具体方案),论证它们的适应性(对 n 的限制)和有效性. 本文所提的方案既可做为并行(以及基于流水线技术的向量机)体系统结构研制人员设计并行存储器系统的理论工具,亦可作为程序设计者进行并行任务及数据分配的理论工具. 本文所提出的存储方案可应用于以矩阵运算为特征的工程与科学计算、数据处理、图象处理与模式识别等领域.

参　考　文　献

[1] Kuck, D. J., Stokes, R., *IEEE Trans. Comput.*, 1982, C-31 363—376

[2] Lawrie, D. H., Vora, C. R., *IEEE Trans. Comput.*, 1982, C-31 435—442

[3] Gao, Q. S., in *Proceedings of the 20th International Symposium on Computer Architecture*, San Diego, 1993

[4] Budnik, P., Kuck, D. J., *IEEE Trans. Comput.*, 1971, C-20 1566—1569

[5] Lawrie, D. H., *IEEE Trans. Comput.*, 1985, C-24 1145—1155

[6] Shapiro, H. D., *IEEE Trans. Comput.*, 1978, C-27 421—428

[7] Balakrishnan, M., Jain, R., Raghavendra, C. S., *Proc. 17th International Conference on Parallel Processing*, 1988, CRC Press Inc., Boca Raton, FL, USA, 103—107.

[8] Kim, K., Kumar, V. K. P., *Proc. 16th Annual International Symposium on Computer Architecture*. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 1989, 372—379

[9] Lee, D-L., *Information Processing Letters*, 1989, 33(1) 11—14

[10] Lee, D-L., *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 1990, 11(2) 163—169

[11] Colbourn, C. J., Heinrich, K., *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 1992, 14: 193—200

[12] Frailong, J. M., Jalby, W., Lenfant, J., *Proc. of the 1985 International Conference on Parallel Processing*, St Charles, IL, USA, 1985, 276—283.

[13] Liu, Z., You, J., Li, X., *Proc. of the International Parallel Processing Symposium*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 1992, 550—557.

[14] Liu, Z., Li, X., You, J., *Proc. ACM Supercomputing*, 1992 Washington, USA, 282—291.

[15] Boppana, B. V., Raghavendra, C. S., *Proc. of the International Conference on Parallel Processing*, Vol. I, CRC Press Inc. Boca Raton, FL, USA, 1991, 365—368