

最新實用
大學用書

數學手冊

MATHEMATICAL HANDBOOK

of FORMULAS and TABLES

MURRAY R. SPIEGEL 著

楊 維 哲 編 譯

正 中 書 局 印 行

0 1-62
S 771

大 學 用 書
數 學 手 冊

原著者 Murray R. Spiegel

編譯者 楊 維 哲

6722/67

正 中 書 局 印 行

706610

序 言

這本手冊是根據 M. R. Spiegel 所著 *Mathematical Hand Book* (Schaum's Outline Series, McGraw Hill 公司) 編譯的，對象是理、工、農、醫、商諸學科的大專學生，收集的內容僅限於常用的公式與表，太偏的就不收了：這包含了高中的代數、幾何、三角、解析幾何、微積分以及微分方程、向量分析、Fourier級數、 Γ 及 β 函數、Bessel及Legendre函數、Fourier Laplace 變換、橢圓函數，所敘述之結果，力求簡明(concise)精確(précise)，使用起來才能方便(with ease)且有把握(with confidence)。

公式及函數表，外文出版者甚多，最為豐富齊全者，例如M. Abramowitz-I. A. Stegun 編的 *Handbook of math. functions with formulas, graphs and math. tables* (美國國家標準局)，國內有盜版，但那是為專家而編的。若論簡明方便，則本書實有特色。因命蔡聰明君，譯其大半，並加以如下之修改及增補：

- 一、關於誤差函數 erf 及補餘誤差函數 erfc , (p. 183) 我們採取不同的定義，理由是這才與最有用的正規(常態)分布函數有較佳的配合！
- 二、39 機率論是完全增寫！同時也增加了二項分布，Poisson 分布及熵之附表等四個表。
- 三、增加了 13.63 以及 18.13—18.21, 41 線性算術。

第 1 部分

公 式

希臘字母表

	字 母			字 母	
	小	大		小	大
Alpha	α	A	Nu	ν	N
Beta	β	B	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omicron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Epsilon	ϵ	E	Rho	ρ	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Theta	θ	Θ	Upsilon	υ	Υ
Iota	ι	I	Phi	ϕ	Φ
Kappa	κ	K	Chi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
Mu	μ	M	Omega	ω	Ω

目 次

第1部分	公 式
------	-----

	頁
1. 一些常用的常數.....	1
2. 常用的乘法公式與因式分解公式.....	2
3. 二項公式與二項係數.....	3
4. 幾何公式.....	5
5. 三角函數.....	11
6. 複數.....	21
7. 指數與對數函數.....	23
8. 雙曲函數.....	26
9. 代數方程式的解.....	32
10. 平面解析幾何的公式.....	34
11. 平面上一些特殊的曲線.....	40
12. 立體解析幾何.....	46
13. 導函數.....	53
14. 不定積分.....	57
15. 定積分.....	94
16. Gamma 函數.....	101
17. Beta 函數.....	103
18. 基本的微分方程式及其解差分法.....	104
19. 常數項的級數.....	107
20. Taylor 級數.....	110
21. Bernoulli 與 Euler 數.....	114

	頁
22. 向量分析的公式	116
23. Fourier 級數	131
24. Bessel 函數	136
25. Legendre 函數	146
26. 伴隨的 Legendre 函數	149
27. Hermite 多項式	151
28. Laguerre 多項式	153
29. 伴隨的 Laguerre 多項式	155
30. Chebyshev 多項式	157
31. 超幾何函數	160
32. Laplace 變換	161
33. Fourier 變換	174
34. 橢圓函數	179
35. 特殊函數雜題	183
36. 不等式	185
37. 部分分式展開	187
38. 無限乘積	188
39. 機率論	189
40. 特殊的慣性矩	199
41. 線性算術	201

第 2 部分

表

1. 四位常用對數	208
2. 四位常用反對數	210
3. $\sin x$ (x 的單位為度與分)	212
4. $\cos x$ (x 的單位為度與分)	213
5. $\tan x$ (x 的單位為度與分)	214

	頁
6. $\cot x$ (x 的單位爲度與分)	215
7. $\sec x$ (x 的單位爲度與分)	216
8. $\csc x$ (x 的單位爲度與分)	217
9. 自然三角函數 (弧度制)	218
10. $\log \sin x$ (x 的單位爲度與分)	222
11. $\log \cos x$ (x 的單位爲度與分)	224
12. $\log \tan x$ (x 的單位爲度與分)	226
13. 弧度換算爲度分秒	228
14. 度分秒換算爲弧度	229
15. 自然對數	230
16. 指數函數 e^x	232
17. 指數函數 e^{-x}	233
18a. 雙曲正弦 $\sinh x$	234
18b. 雙曲餘弦 $\cosh x$	236
18c. 雙曲正切 $\tanh x$	238
19. 階乘 n	240
20. Gamma 函數	241
21. 二項係數	242
22. 初等的冪函數 (平方、立方、根、逆數)	244
23. 複利 $(1+r)^n$	246
24. 現值 $(1+r)^{-n}$	247
25. 年金 $\frac{(1+r)^n - 1}{r}$	248
26. 年金現值 $\frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$	249
27. Bessel 函數 $J_0(x)$	250
28. Bessel 函數 $J_1(x)$	250
29. Bessel 函數 $Y_0(x)$	251
30. Bessel 函數 $Y_1(x)$	251
31. Bessel 函數 $I_0(x)$	252

	頁
32. Bessel 函數 $I_1(x)$	252
33. Bessel 函數 $K_0(x)$	253
34. Bessel 函數 $K_1(x)$	253
35. Bessel 函數 $Ber(x)$	254
36. Bessel 函數 $Bei(x)$	254
37. Bessel 函數 $Ker(x)$	255
38. Bessel 函數 $Kei(x)$	255
39. Bessel 函數之根	256
40. 指數積分, 正弦積分及餘弦積分.....	257
41. Legendre 多項式 $P_n(x)$	258
42. Legendre 多項式 $P_n(\cos \theta)$	259
43. 完全的橢圓積分.....	260
44. 不完全橢圓積分 I	261
45. 不完全橢圓積分 II	261
46. 標準常態分布密度.....	262
47. 標準常態分布 (累積) 函數.....	263
48. 學徒氏 t 分布之臨界值 t_α , (自由度 n)	264
49. χ^2 分布之臨界值 χ^2_α , (自由度 n).....	265
50. F 分布之臨界值 (0.95 置信), $F_{0.95}$ 自由度 (n_1, n_2)	266
51. F 分布之臨界值 (0.99 置信), $F_{0.99}$ 自由度 (n_1, n_2)	267
52. 隨機數.....	268
53. 二項分布之機率.....	269
54. Poisson 分布函數	270
55. 簡便常態分布.....	275
56. 熵函數.....	276
57. 度量衡的換算.....	281

索引

1. 中文索引
2. 英文索引

1

一些常用的常數 (special constants)

- 1.1 $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 2643\dots$
- 1.2 $e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 0287\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
= 自然對數的底。
- 1.3 $\sqrt{2} = 1.41421\ 35623\ 73095\ 0488\dots$
- 1.4 $\sqrt{3} = 1.73205\ 08075\ 68877\ 2935\dots$
- 1.5 $\sqrt{5} = 2.23606\ 79774\ 99789\ 6964\dots$
- 1.6 $\sqrt[3]{2} = 1.25992\ 1050\dots$
- 1.7 $\sqrt[3]{3} = 1.44224\ 9570\dots$
- 1.8 $\sqrt[5]{2} = 1.14869\ 8355\dots$
- 1.9 $\sqrt[5]{3} = 1.24573\ 0940\dots$
- 1.10 $e^\pi = 23.14069\ 26327\ 79269\ 006\dots$
- 1.11 $\pi^e = 22.45915\ 77183\ 61045\ 47342\ 715\dots$
- 1.12 $e^e = 15.15426\ 22414\ 79264\ 190\dots$
- 1.13 $\log_{10} 2 = 0.30102\ 99956\ 63981\ 19521\ 37389\dots$
- 1.14 $\log_{10} 3 = 0.47712\ 12547\ 19662\ 43729\ 50279\dots$
- 1.15 $\log_{10} e = 0.43429\ 44819\ 03251\ 82765\dots$
- 1.16 $\log_{10} \pi = 0.49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 12683\dots$
- 1.17 $\log_e 10 = \ln 10 = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 7991\dots$
- 1.18 $\log_e 2 = \ln 2 = 0.69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 7232\dots$
- 1.19 $\log_e 3 = \ln 3 = 1.09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 5245\dots$
- 1.20 $\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 6512\dots = \text{Euler 常數}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$
- 1.21 $e^\gamma = 1.78107\ 24179\ 90197\ 9852\dots$ [參見 (1.20)]
- 1.22 $\sqrt{e} = 1.64872\ 12707\ 00128\ 1468\dots$
- 1.23 $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2}) = 1.77245\ 38509\ 05516\ 02729\ 8167\dots$
其中 Γ 表伽瑪 (Gamma) 函數 [參見 p. 101-102]。
- 1.24 $\Gamma(\frac{1}{3}) = 2.67893\ 85347\ 07748\dots$
- 1.25 $\Gamma(\frac{1}{4}) = 3.62560\ 99082\ 21908\dots$
- 1.26 1 弧度 (radian) $= 180^\circ/\pi = 57.29577\ 95130\ 8232\dots$ 。
- 1.27 $1^\circ = \pi/180$ 弧度 $= 0.01745\ 32925\ 19943\ 2957\dots$ 弧度。

- 2.1 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
 2.2 $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
 2.3 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
 2.4 $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
 2.5 $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
 2.6 $(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$
 2.7 $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
 2.8 $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$
 2.9 $(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
 2.10 $(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

上面 (2.1) 至 (2.10) 的公式都是二項 (binomial) 公式的特例 [參見 p. 3]。

- 2.11 $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
 2.12 $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
 2.13 $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
 2.14 $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$
 2.15 $x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$
 2.16 $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
 2.17 $x^6 - y^6 = (x-y)(x+y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
 2.18 $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
 2.19 $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$

上述公式有一些如下的推廣，其中 n 為正整數。

- 2.20 $x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x-y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \cdots + y^{2n})$

$$= (x-y) \left(x^2 - 2xy \cos \frac{2\pi}{2n+1} + y^2 \right) \left(x^2 - 2xy \cos \frac{4\pi}{2n+1} + y^2 \right) \cdots \left(x^2 - 2xy \cos \frac{2n\pi}{2n+1} + y^2 \right)$$

 2.21 $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \cdots + y^{2n})$

$$= (x+y) \left(x^2 + 2xy \cos \frac{2\pi}{2n+1} + y^2 \right) \left(x^2 + 2xy \cos \frac{4\pi}{2n+1} + y^2 \right) \cdots \left(x^2 + 2xy \cos \frac{2n\pi}{2n+1} + y^2 \right)$$

 2.22 $x^{2n} - y^{2n} = (x-y)(x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots)$

$$= (x-y)(x+y) \left(x^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{n} + y^2 \right) \left(x^2 - 2xy \cos \frac{2\pi}{n} + y^2 \right) \cdots \left(x^2 - 2xy \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + y^2 \right)$$

 2.23 $x^{2n} + y^{2n} = \left(x^2 + 2xy \cos \frac{\pi}{2n} + y^2 \right) \left(x^2 + 2xy \cos \frac{3\pi}{2n} + y^2 \right) \cdots \left(x^2 + 2xy \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} + y^2 \right)$

3

二項公式與二項係數 (the binomial formula and binomial coefficients)

n 的階乘 (factorial)

假設 $n = 1, 2, 3, \dots$, 我們定義 n 的階乘為

$$3.1 \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

我們也定義 0 的階乘為

$$3.2 \quad 0! = 1$$

當 n 為正整數之二項公式

假設 $n = 1, 2, 3, \dots$, 則

$$3.3 \quad (x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \dots + y^n$$

這叫做二項公式。它可以推廣成當 n 不是正整數的情形，不過此時 (3.3) 式變成無窮級數。
[參見二項級數，p. 110]。

二項係數 (binomial coefficients)

公式 (3.3) 也可寫成：

$$3.4 \quad (x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

其中各項的係數叫做二項係數，如下：

$$3.5 \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

二項係數的性質

$$3.6 \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

由此公式，我們可以作出楊輝巴斯卡 (Pascal) 三角形 [參見 p. 236]。

$$3.7 \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$3.8 \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$3.9 \quad \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

$$3.10 \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$$

$$3.11 \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$$

$$3.12 \quad \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$3.13 \quad \binom{m}{0} \binom{n}{p} + \binom{m}{1} \binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$$

$$3.14 \quad (1) \binom{n}{1} + (2) \binom{n}{2} + (3) \binom{n}{3} + \cdots + (n) \binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

$$3.15 \quad (1) \binom{n}{1} - (2) \binom{n}{2} + (3) \binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} (n) \binom{n}{n} = 0$$

多項 (multinomial) 公式

$$3.16 \quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p}$$

其中的 Σ 是對所有非負整數 $n_1, n_2, \dots, n_p$, 滿足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$, 來求和。

4

幾何公式 (geometric formulas)

長 (length) 爲 b , 寬爲 a 的矩形 (rectangle)

4.1 面積 (area) $= ab$

4.2 周界 (perimeter) $= 2a + 2b$

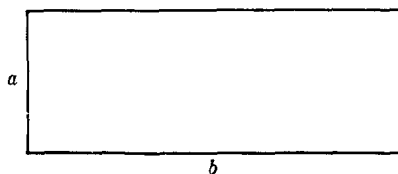


圖. 4-1

底 (base) 爲 b , 高 (altitude) 爲 h 之平行四邊形 (parallelogram)

4.3 面積 $= bh = ab \sin \theta$

4.4 周界 $= 2a + 2b$

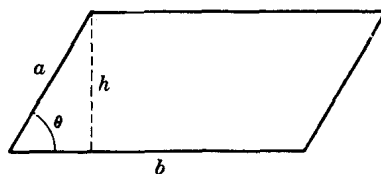


圖. 4-2

底爲 b , 高爲 h 之三角形 (triangle)

4.5 面積 $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab \sin \theta$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ = 周界半長

4.6 周界 $= a + b + c$

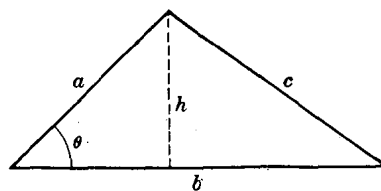


圖. 4-3

上底爲 a , 下底爲 b , 高爲 h 之梯形 (trapezoid)

4.7 面積 $= \frac{1}{2}h(a+b)$

4.8 周界 $= a + b + h \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \phi} \right)$

$= a + b + h(\csc \theta + \csc \phi)$

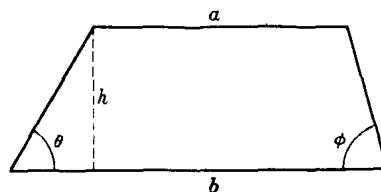


圖. 4-4

邊長為 b 之 n 邊正多邊形 (regular polygon)

4.9 面積 $= \frac{1}{4}nb^2 \cot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}nb^2 \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$

4.10 周界 $= nb$

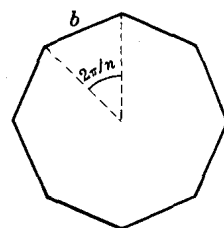


圖. 4-5

半徑 (radius) 為 r 之圓 (circle)

4.11 面積 $= \pi r^2$

4.12 周界 $= 2\pi r$

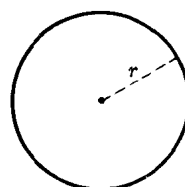


圖. 4-6

半徑為 r 之圓的扇形 (sector of circle)

4.13 面積 $= \frac{1}{2}r^2\theta$ [θ 的單位是弧度]

4.14 弧長 (arc length) $S = r\theta$

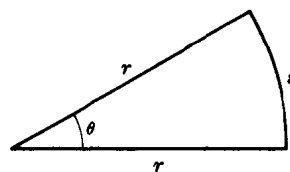


圖. 4-7

三角形 (邊長為 a, b, c) 之內接圓 (circle inscribed) 的半徑

4.15
$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

其中 $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$ = 三角形周界半長

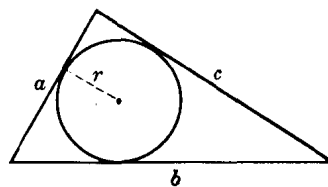


圖. 4-8

三角形 (邊長為 a, b, c) 之外切圓 (circle circumscribing) 的半徑

4.16
$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

其中 $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$ = 三角形周界半長

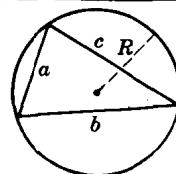


圖. 4-9

圓 (半徑為 r) 之內接正 n 邊形

$$4.17 \quad \text{面積} = \frac{1}{2}nr^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}nr^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

$$4.18 \quad \text{周界} = 2nr \sin \frac{\pi}{n} = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$$

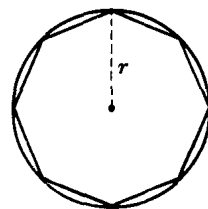


圖. 4-10

圓 (半徑為 r) 之外接正 n 邊形

$$4.19 \quad \text{面積} = nr^2 \tan \frac{\pi}{n} = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n}$$

$$4.20 \quad \text{周界} = 2nr \tan \frac{\pi}{n} = 2nr \tan \frac{180^\circ}{n}$$

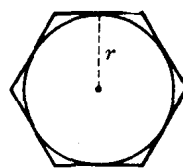


圖. 4-11

弓形 [圓與弦 (segment of circle) 圍成] 的面積

$$4.21 \quad \text{陰影部分的面積} = \frac{1}{2}r^2 (\theta - \sin \theta)$$

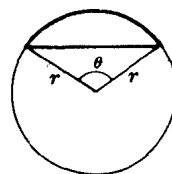


圖. 4-12

長軸 (semimajor) 與短軸 (semiminor) 分別為 a , b 之橢圓 (ellipse)

$$4.22 \quad \text{面積} = \pi ab$$

$$4.23 \quad \text{周界} = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \quad [\text{大約}]$$

其中 $k = \sqrt{a^2 - b^2} / a$ 參見 p. 254 之數值表。

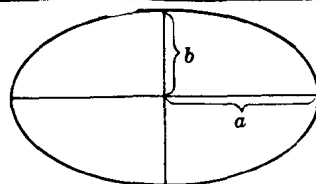


圖. 4-13

拋物線之截線 (segment of a parabola)

$$4.24 \quad \text{面積} = \frac{2}{3}ab$$

$$4.25 \quad \text{ABC之弧長} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 16a^2} + \frac{b^2}{8a} \ln \left(\frac{4a + \sqrt{b^2 + 16a^2}}{b} \right)$$

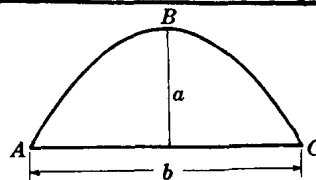


圖. 4-14

長為 a ，高為 b ，寬為 c 之長方體 (rectangular parallelepiped)

4.26 體積 (volume) $= abc$

4.27 表面積 (surface area) $= 2(ab + ac + bc)$

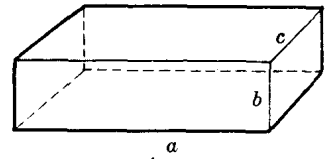


圖. 4-15

底面積 (cross-sectional) 為 A ，高為 h 之平行體 (parallelepiped)

4.28 體積 $= Ah = abc \sin \theta$

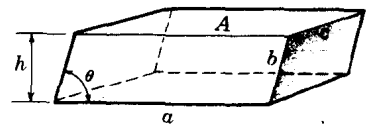


圖. 4-16

半徑為 r 之球體 (ball 或 sphere)

4.29 體積 $= \frac{4}{3} \pi r^3$

4.30 表面積 $= 4\pi r^2$

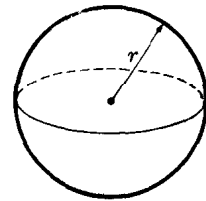


圖. 4-17

底半徑為 r ，高為 h 之正圓柱體 (right circular)

4.31 體積 $= \pi r^2 h$

4.32 側表面積 (lateral surface area) $= 2\pi r h$

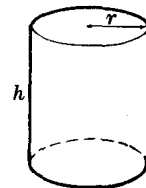


圖. 4-18

底半徑為 r ，斜邊 (slant) 為 l 之 (斜) 圓柱體

4.33 體積 $= \pi r^2 l = \frac{\pi r^2 h}{\sin \theta} = \pi r^2 h \csc \theta$

4.34 側表面積 $= 2\pi r l = \frac{2\pi r h}{\sin \theta} = 2\pi r h \csc \theta$

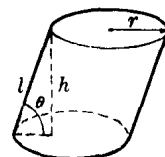


圖. 4-19