矿压短训班教材之十

优化设计讲座

李之蜀

湘潭矿业学院采煤系

目　录

前　　言

一.

我们在做一切工作时，总希望所选用的方案是一切可能方案中的最优方案，例如：

(1). 安排生产计划方面，如何在现有人力、物力条件下，合理安排产品生产，使总产值最高。

(2). 确定工艺规程方面，如何在保证产品质量的前提下，选择合理的操作方式，使操作费用最省。

(3). 产品设计方面，例如，设计一个机械零件时，如何在保证强度的前提下使重量最轻，或加工工时最短。

(4). 配方(料)方面，如何合理配方(料)，在保证质量要求的前提下使成本最低。

(5) 工厂布局，物质调配方面，例如，工厂如何合理布局，物质如何合理调配，使运输费用最省。

(6). 交通运输方面，例如，火车由甲站开往乙站，如何保证安全行驶条件下，使时间最省。又如，汽车运输问题，如何选择合理的路线，使运输费用最省。

(7). 农业方面，例如，利用温室生产蔬菜，应如何合理调节室内的温度、湿度、使蔬菜生产周期最短或产量最高。

(8) 林业方面，例如、应如何建造防护林带，使既能阻挡风沙，而又最经济。又如应如何合理砍伐森林，使成材的木料

最多。

(9)、 商业方面，例如，在如何组织货流，既能满足顾客的需求，而又使资金周转最快。

从上述例子中可以看出：在各个生产、科研领域中普遍存在着最优化问题。处理最优化问题的数学方法叫最优化方法。它所研究的问题是如何把自然界和社会现象用数学语言来表达，（数学模型），然后从研究它的众多的方案中选出最优方案。

廿世纪三十年代以前的最优化方法，主要是古典的微分法和变分法，第二次世界大战中由于军事上的需要产生了运筹学，提出了大量不能用上述古典方法解决的最优化问题。从而产生了如线性规划，非线性规划，动态规划，图论等新的方法。此后，最优化的理论和方法逐渐得到了丰富和发展。特别从六十年代以来，最优化技术发展迅速，成为一门新兴的学科，而且得到广泛的应用。

二、（二）

我们把过去的设计方法称为传统设计。在传统设计中主要沿用方案比较法——根据已知条件和工程所约束的条件作出几个不同设计方案，然后做详细的比较，从其中选定较好的方案。用这种方法所决定的设计方案和主要参数虽然比较实用，但作为系统设计中的最优决策缺乏充分依据。因为在设计过程中，一个设计参数的变化，需要重新对几个或更多与其相关的参数进行大量的

计标工作，对方案探讨的次数是有限的，一般只能在很少的几个主要参数间做些调整。这样做出来的设计方案，通常只是一个满足设计技术指标的"可行"方案，而不是对所有可行方案中的最优设计方案。

最优设计是分析设计对象的各个因素（可变因素、不变因素、和约束条件）并经过数学整理之后，用不同的计标方法求得最合理、最经济的设计方案。

优化设计最主要的是建立数学模型。通过抽象和近似的要素把自然现象、工程技术和技术经济问题化为数学形式。数学模型就是求一组非负数的设计变量和状态变量的方程，在一定约束条件之下列出目标函数为最小（或最大）。

优化设计用数学模型描述：

目标函数 ： $F(x)min$ （或 $F(x)max$ ）

约束条件 ： $g_i(x) \geq 0 \quad i=1,2,3,\ldots\ldots p$

$$h_j(x) \geq 0 \quad j=1,2,3,\ldots\ldots m$$

其中， $F(x)$ 为目标函数， x （$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$）为设计变量， $g_i(x)$ ， $h_j(x)$ 为约束方程。优化设计就是在设计变量允许的范围内，找出一组参数 X ，使 $F(x)min$ （或 $F(x)max$ ）成立。我们称X为最优设计方案，优选最优设计方案的设计过程称为最优化设计。

优化设计的几何意义是，如果有两个设计变量（x_1，x_2）时，那么目标函数$F(x)$是一个三维空间的曲面；如果有n个设计变量（x_1，x_2，……；x_n）时，那么目标函数$F(x)$是一个$n+1$维空间里的"超曲面"。n维空间的图形，虽然从几何学意义上难以想象，但是它可以模仿三维空间的图形来类比。

优化设计的特点：

1、　设计的思想是最优设计：传统人工设计，虽然想达到最优设计，但由于受到设计手段的限制，往往以达到设计指标要求为目的，而最优设计以达到最佳要求为目的。

2、　设计的手段是计算机系统：最优设计是以电子计算机为设计手段，搞对一个设计方案只需要用很短的时间，从而可以从大量的设计方案中，选出最优设计方案。

3.　设计方法是用最优方法，最优设计的方法是最优化方法，一个设计方案变量的调整是计算机根据最优化方法，沿着改善设计的方向自动进行。在设计中可能要计算上千个方案，并不需要设计者去实际做这样多的方案，而是电子计算机自动组成新的设计方案。

4、　优化设计是以理论分析为主，试验为辅：实际的设计工作需要通过试验证实设计。由于试验的成本高、周期长，所以设计时先用电子计算机进行优化设计，选用最优方案，再选择有希望的几种方案用试验证实。如果试验测试的结果与最优设计的

理论分析结果相符合，就说明理论的数学模型是准确的，从而其它设计方案就可以不必做试验了。应用电子计算机进行最优化设计，可以缩短周期，提高设计质量，节省人力。

矿井优化设计是采矿工程近十几年来发展起来的一门新的学科。它所要解决的主要问题是：

1. 矿井开采主要参数的最优化，如合理确定井田划分，井型和服务年限，井田尺寸，开采水平高度，矿井合理的分区数等。

2、矿井开采技术工艺系统与参数的最优化，如最优井田开拓和准备方式的选择，水平延深和矿井改造，矿井运输和参数、通风系统和参数、采区巷道布置系统和参数、回采工艺方式和参数的最优化等。

3、矿井单项（位）工程的最优设计，如最优的煤仓容量，巷道网的断面优化，最优的井底车场、采区车场、矿井地面生产系统和设计等。

4. 矿井工程建设和生产管理的最优化，如矿井工程建设、采区准备巷道施工的最优安排，开采顺序和采掘计划的最优化，运输调度的最优化等。

三、

矿井优化设计的研究在我国才刚刚起步，本讲义只作为矿区工程师短训班的新科学技术的科普讲座，由于矿井优化设计要解决问题很多，其内容、性质、范围不尽相同，因而要解决的程序、

方法和所用的理论方法也不相同。讲义中仅简单地介绍了几种常用的最优化计算方法，尽可能选用通俗易懂的计算方法和例题。而对矿井技术系统及矿井主要设计决策（如井型、水平高度等）的优化问题未作一一介绍。

由于编者水平不高，加以时间紧促，缺点错误在所不免，敬希批评指正。

第一章、用微分法研究目标函数极值的最优化方法

最优设计中最简单的问题就用到用古典微分法求极大值或极小值（简称极值）的问题。在生产中常々要求在一定条件下解决"多快好省"、"用料最少"、"成本最低"和"功率最大"等々问题。这一类问题在数学上称为求函数极值问题。

这种计算，首先分析实际问题，建立函数关系，确定函数的增减区间，然后求解一个变数、二个变数、n个变数的极限和求解有约束条件的极限值的方法。

§1. 一元函数的极值

一个变数的连续函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 任一点 x_0 处可微分，并且 $f'(x)=0$，且 $f'(x)$ 通过 x_0 时变符号，则 $f(x_0)$ 为极限；如果 $f(x)$ 不变符号，则在 $f(x_0)$ 无极限。

在 $f'(x)$ 中，当 x 渐增通过 x_0 时，由 (+) 变 (−) 号，则 $f(x_0)$ 为极大值；

而在 $f'(x)$ 中，当 x 渐增通过 x_0 时，由 (−) 变 (+) 号，则 $f'(x_0)$ 为极小值；

因此，一元函数极值的必要条件及充分条件为：

$$f'(x_0)=0 \qquad 且 \qquad f''(x_0)\neq 0 \tag{1-1}$$

则

$f'(x_0)$ 为极值.

$f''(x_0) < 0$ 时，则 $f(x_0)$ 为极大值
$f''(x_0) > 0$ 时，则 $f(x_0)$ 为极小值 (1-2)

例(一)、已知立井井筒直径D，井筒直径最大可利用部分W＝0.9×D，从立井中下放材料长为L（钢轨或管材），试求马头门的最小高度H？

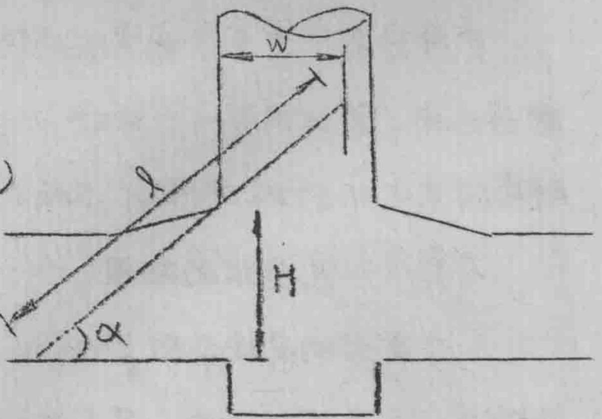

图 1-1

$$H = L\cdot\sin\alpha - W\cdot tg\alpha$$

$$\frac{dH}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(L\cdot\sin\alpha - W\cdot tg\alpha)$$

$$= L\cos\alpha - \frac{W}{\cos^2\alpha}$$

令 $\frac{dH}{d\alpha} = 0$

$\therefore \cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{W}{L}}$

取 $L = 12M$. $D = 5M$

$W = 0.9D = 4.5M$

$\alpha = 43°52'$

$\therefore H = L\sin\alpha - W\cdot tg\alpha = 3.9M \doteq 4M$

§2. 多元函数的极值

一、二元函数的极值

在开区间R，Z为两个独立变数x，y的函数时，即二元函数 $Z = f(x, y)$ 时，则其极值的必要条件如下：

如果$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处有微分且有极限值，则必有各个一阶偏导数为零（偏导数是只对所论变量求导数，其余变量都看成常数）。

即：$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$ (1-3)

极值的充分条件为：

若各个一阶偏导数为零，

$$f'_x(x_0,y_0)=0 \qquad f'_y(x_0,y_0)=0$$

令各个二阶偏导数为

$$f''_{xx}(x_0,y_0)=A$$

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=B$$

$$f''_{yy}(x_0,y_0)=C$$

(1) 当$B^2-AC<0$

则$f(x_0,y_0)$是极值；

且当 $A<0$ $(C<0)$时为极大值；

$A>0$ $(C>0)$时为极小值。

(2). 当$B^2-AC>0$

则$f(x_0,y_0)$不是极值。

(3) 当 $B^2-AC=0$

则 $f(x_0, y_0)$ 是否极值不当定。 (1-4)

二、多元函数的极值

若有几个独立变数的函数 $f(p)=f(x,y,z\cdots\cdots,t)$ 在点 P_0 $(x_0, y_0, z_0, \cdots\cdots, t_0)$ 上的情形。

极值的必要条件：若 $f(x_0、y_0、z_0, \cdots\cdots t_0)$ 为极值，且各一阶偏导数均存在，则必有：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{p=p_0}=0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{p=p_0}=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{p=p_0}=0\ ; \quad \cdots\cdots, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{p=p_0}=0 \qquad (1-5)$$

极值的充分条件：

$$D=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}+h_3\frac{\partial}{\partial z}+\cdots\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 f$$

当 $\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2+\cdots\cdots+h_n^2}$ 甚小时，

若 D 恒为正，则 $f(p_0)$ 为极小；

若 D 恒为负，则 $f(p_0)$ 为极大。 (1-6)

在实际计算中，根据问题本身的特性来判断所需要的最优解，不一定计算极值的充分条件。

§3 有约束条件的极值

上面讨论的极值问题，对于函数的自变量，除了限制在函数的定义区域内以外，无其它条件，称为无条件极值。但往往，

在求某一函数的极值时，受某些条件的限制，这种问题称为有约束条件的极值问题。有时约束条件也可代入函数中，求得极值，这种问题就成为不受限制的极值问题，并且可按前述方法求解。但是这种方法常不切实用，尤其是在变数较多的情况下。求解有约束条件的极值常用条件极值的待定乘数法 —— 拉格朗日（Lagrange）乘数法。

n个非独立变数的N个约束函数的极值问题为：

约束函数 $\varphi_K(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n) = 0$

$$K = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$$

并且 $n > N$

求目标函数 $z = f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n)$ 的极值。

N个未知函数只能解N个未知数，因此引进辅变量作为辅助函数，把有约束极值问题化为无约束极值问题，而后再求解。

1. 求两个约束条件三个变数的极限

约束条件： $\varphi_1(x, y, z) = 0$

$$\varphi_2(x, y, z) = 0$$

求目标函数$f(x, y, z)$的极值。

若$f(x, y, z)$的各偏导数存在并连续，使之全微分等于零。

即 $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$

约束条件的各偏导数存在并连续，使之等于零，则

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}dz = 0$$

上式中导入任意常数λ_1，λ_2，线性结合得下式：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)dy$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)dz = 0$$

上式中，dx. dy. dz 不能为零，因此，括弧内的部分为零。

则

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \\[2ex]
(2) & \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\[2ex]
(3) & \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \\[2ex]
 & \text{另外两个约束条件} \\[2ex]
(4) & \varphi_1(x, y, z) = 0 \\
(5) & \varphi_2(x, y, z) = 0
\end{array}\right\} \quad (1-7)$$

上述(1)—(5)式为未知数x，y，z，λ_1，λ_2 的五个元联立方程式。求解联立方程式得满足约束条件的极值点x，y 及z。其中导入的λ_1、λ_2 称为拉格朗日（Lagrange）乘数，或称待定

定乘数，所得 x，y，z 极值点即为两个约束条件三个变数极值的解。

2、一个约束两个变数的极限

约束条件： $\varphi(x, y)=0$

求目标函数 $z=f(x, y)$ 的极值。

简化公式（1－7）可得求解极值的三个方程式：

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\
&(2)\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\
&(3)\quad \varphi(x, y)=0
\end{aligned}\right\}\qquad (1-8)$$

从上面①－③式中消去λ，求解极值点 x，y 的值。此值即为一个约束二个未知变数极值的解。

3、一个约束条件三个变数的极值

约束条件： $\varphi(x, y, z)=0$

求目标函数 $z=f(x, y, z)=0$ 的极值。

简化（1－7）式可得求解极值的四个方程式：

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0\\
&(2)\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0
\end{aligned}\right\}\qquad (1-9)$$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}=0$

(4) $\varphi(x, y, z)=0$

从上①—④式中消去λ，求解极值点x，y，z的值。此值即为一个约束条件三个未知变数极值的。

例1-2：已知约束条件为：$\varphi(x,y)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}-1=0$，目标函数：$z=f(x,y)=x^2+y^2$，求z为最小的x和y值。x和y为正数。

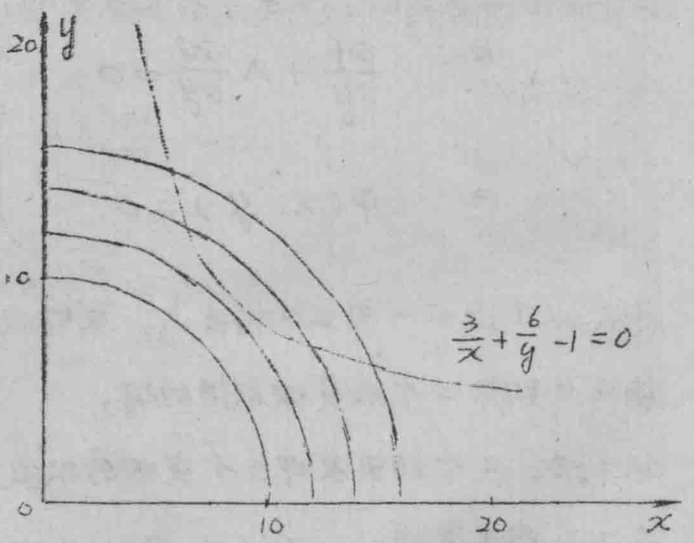

图 1-1

解：

根据(1-8式)求解，用拉格朗日乘数λ，对x、y求偏导数并令其为零，得：

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\equiv 2x+\lambda\left(-\frac{3}{x^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\equiv 2y+\lambda\left(-\frac{6}{y^2}\right)=0$$

上两式中消去λ得：

$x=0.792y$