北京市数学会第一届学术年会

# （函数论专业组）

# 论文摘要

1964年8月

# 解析函数正規族論中的新圈属綜合报告

熊　庆　来

中国科学院数学研究所

内容概要：略述近三十年函数论工作者在这方面（限於複变范围）取得的成果、於有机会时並求指出尚存在的缺陷和还值致研的问题、最后就个人意見略言这理论今后可发展的方向及宜事发掘的园地。

（另有打印的单行本）

# 关於代数体函数的唯一性定理（摘要）

何　育　贊

（中国科学院　数学研究所）

本文在计及重值的影响下讨论了代数体函数的唯一性问题，主要结果如下：

1° 命 $u=u(x)$ 为具 $\nu$ 个分支的代数体函数，以 $\bar{E}_\gamma(a)$ 表 $u(x)$ 的 $a$ 值集，仅计其重级 $\le\gamma$ 者，且每一值点计算一次，则 $u(x)$ 由 $p=4\nu+1+\left[\frac{2\nu}{\gamma}\right]$ 个值集 $\bar{E}_\gamma(a_i)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ 所唯一确定。$\left[\frac{2\nu}{\gamma}\right]$ 表 $\frac{2\nu}{\gamma}$ 的整数部分。特别地当 $\gamma=1,2,2\nu+1$ 时 $p=6\nu+1$，$5\nu+1$，$4\nu+1$。

2° 命 $u(x)$ 如上，且满足次三条件

$$N(r,u)+N\left(r,\frac{1}{u}\right)+N_Y(r,u)=o\left[T(r,u)\right]$$

又以 $\bar{E}_1'(b)$ 表相对於 $u'(x)$ 的值点集，则 $u(x)$ 由 $\bar{E}_1(a_i)$ 和 $\bar{E}_1'(b_j)$ $(i,j=1,\cdots,4\nu)$ 中任意 $4\nu+1$ 个值集所唯一确定。

## 参　考　文　献

[1] 熊庆来, Un problème d'unicité relatif aux fonctions méromorphes 中国科学 12（1963）。

[2] 何育贊, 关于代数体函数及其导数（待发表）。

# 园内亚纯函数与代数体函数的幅角分布（摘要）

杨　　乐

（数学所）

本文是借助于共形映照的方法，将园内亚纯函数与代数体函数关于幅角分布的若干问题化为模分布的情况，从而导致了这些问题的解决。主要结果可叙述如下：

I. 命函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 于园 $|z|<1$ 内全纯，其系数 $c_n$ 皆含于一开度为 $2\varphi_0$（$\varphi_0<\frac{\pi}{2}$）的角域内。若有正数 $\varepsilon_0$，在区域 $|z|<1 \cap |z-1|<\varepsilon_0$ 内，$f(z)$ 不取二有穷且互为判别的复数 $a$，$b$，则，

$$\log M(r,f)<\frac{C(\varepsilon_0,a,b)}{1-r}\left\{\log^+|f(z_{\varepsilon_0})|+1\right\}+\log\frac{1}{\cos\varphi_0}\quad(r_{\varepsilon_0}<r<1)$$

由本命题出发，我们建立了关于园内全纯函数 Picard 点与 Borel 点的若干定理，这些定理和幂级数在其收敛园周上奇点的分布间有着紧密的类似，从而将 A. Bloch 的一个猜想推证到有限区域的情形。

II. 若 $u(z)$ 为 $|z|<1$ 内具有 $\nu$ 个分支的亚纯代数体函数，级等于 $\rho$（$0<\rho<\infty$），则 $u(z)$ 以园周上点 $z_0$（$=e^{i\varphi_0}$）为 $\alpha$（$>1$）级 Borel 点的充要条件是：对于任意正数 $\varepsilon$，积分

$$\iint\limits_{\substack{|z|<m\\|\arg z-\varphi_0|<\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{\nu}\sum_{\mu=1}^{\nu} \log^+|u_\mu(z)| + n(|t|\le r\cap|\arg t-\varphi_0|<\varepsilon, u)(1-r)\right\}(1-r)^{\tau+2}\, d\sigma_z$$

当$\tau>\alpha$时收敛，而当$1<\tau<\alpha$时发散。

特别地，$u(z)$至少有一个$\rho+1$级Borel点。

本文还获得关于幅角分布类型的唯一性定理，较通常的相应定理精密。

# 関於亚純函数与其各級紀数的公共Borel方向(摘要)

张廣厚

(数学研究所)

1928年Valiron曾经提出一个十分重要的问题：函数与其纪数是否存在一条公共Borel方向？在历史上曾有Rauch和庄圻泰教授在附加较强条件下的结果，直到1951年Milloux发表

了重要论文；对整函数他证明了凡级数的 Borel 方向。一定是函数的 Borel 方向。其证明非常繁琐。我用不同于 Milloux 的办法，建立了一个辅助定理和四个定理，据此在一些条件下，可以通过 $f(z)$ 取三值 $\alpha$、$\beta$、$\infty$ 的次数去界囿 $f'(z)$ 取任何值的次数。由此，我不仅简单地证明了 Milloux 的结果，而且克服了存在除外圆的困难，将结果推广到具有 $\infty$ 作为精减 Borel 例外值的亚纯函数。对零级亦得扩广，但不够理想。我还克服了 Milloux 要求充满域必得含有一个单位圆的困难，将开平面的结果推广到单位圆内之直接 Borel 点。用本文给出的方法，我简单地建立了一个定理，她和 Milloux 于1952年得到一个重要定理在研究充满圆时有同等作用，而且在我给出的形式下，解决了 Milloux 提出的一个问题，即如果 $f(z)$ 取 $\alpha, \beta, \gamma$ 三值次数有上界 $N$，又 $f'(z)$ 取某一值 $\gamma$ 至少 $N'$ 次，则或者有 $f(z)$ 取任何值的次数可通过 $N$ 的线性函数来界囿，或有对除外圆外的任意两点有

$$\left| f(z')-\gamma z', f(z'')-\gamma z'' \right| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = e^{-\frac{(1+\gamma)}{40} N'}$$

最后顺便指出，我用完全不同之法，证明了若 $f(z)$ 只有一个有穷值作为精减 Borel 例外值，则 $f(z)$ 的 Borel 方向一定是 $f'(z)$ 的 Borel 方向。

# 用黎曼求和法（R,2）求和时的基卜斯现（摘要）

李　　经　　熙

（北京铁道学院）

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 满足下面两个条件：

（甲）在原点的某邻域内，对于 $h(\neq 0)$ 的一切值级数

$$u_0+\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$ 收敛；

（乙）极限 $\lim\limits_{h\to 0}\left[u_0+\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right]=S$ 存在。

那么，我们就说级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 可用黎曼求和法（R.2）求和，并且把 $S$ 叫做这个级数的和。

设

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

是勒贝格可积函数 $f(x)$ 的傅立叶级数。令

$$R_h^2(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2.$$

我们定义函数系 $\{R_h(x)\}$ 在 $x_0$ 点的黎曼一基卜斯集是极限值

$\lambda=\lim\limits_{h\to 0} R_h(x_0+\alpha(h))$ 的全体，这里 $h\to 0$ 时 $\alpha(h)\to 0$，

$\frac{\alpha(h)}{h}\to\beta$，而 $-\infty\leq\beta\leq+\infty$，

本文所获得的结果如下：

定理1．关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$，函数系 $\{R_n^2\infty\}$ 在原点的聚点——基卜斯集是闭区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。

定理2．假设级数（1）是有界变差函数 $f(x)$ 的傅立叶级数，那么，在 $f(x)$ 的每一个跳跃点 $\xi$，$\{R_n^2(x)\}$ 的聚点——基卜斯集是以 $\frac{1}{2}\{f(\xi+0)+f(\xi-0)\}$ 为中心 $|f(\xi+0)-f(\xi-0)|$ 为长的闭区间。

定理3．设 $f(x)$ 的傅立叶系数

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad b_n=O\left(\frac{1}{n}\right); \qquad (2)$$

又设 $\xi$ 是 $f(x)$ 的一个跳跃点，并且在 $\xi$ 点的邻近当有间断点时至多有可列个跳跃点。那么，$\{R_n^2(x)\}$ 在 $\xi$ 点的聚点—基卜斯集是以 $\frac{1}{2}\{f(\xi+0)+f(\xi-0)\}$ 为中心、$|f(\xi+0)-f(\xi-0)|$ 为长的闭区间。

在建立定理2和定理3时，需要先证明下面两个引理：

引理1．假设级数（1）是有界变差函数 $f(x)$ 的傅立叶级数，那么，$\{R_n^2(x)\}$ 在 $f(x)$ 的连续点 $x_0$ 必一致收敛。

引理2．假设 $f(x)$ 的傅立叶系数满足条件（2）；又设 $f(x)$ 在 $x_0$ 点连续，并且在 $x_0$ 点的邻近当有间断点时至多有可列个跳跃点。那么，$\{R_n^2(x)\}$ 在 $x_0$ 点必一致收敛。

因为 $\{R_n^2(x)\}$ 在跳跃点 $\xi$ 处的聚点—基卜斯集，没有超出以 $f(\xi+0)$、$f(\xi-0)$ 为端点的闭区间，所以用（R.2）求和时没有基卜斯现象。在1947年B.Kuttner曾指出这一点，但本文所用的方法和他的方法不同。

# 用綫性方法逼近周期連續函数（摘要）

李　經　熙

（北京铁道学院）

設 $f(x)\in C_{2\pi}$，$E_n(f)$ 是最佳逼近，$\omega(\delta,f)$ 是 $f(x)$ 的連續模，$\|f\|=\max|f(x)|$，利用三角矩陣

$$\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}\ (k=0,1,\cdots,n+1;\ n=0,1,\cdots;\ \lambda_0^{(n)}=1,\ \lambda_{n+1}^{(n)}=0)$$

做三角多项式

$$U_n(f,x,\Lambda)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

这里 $a_k$ 和 $b_k$ 是 $f(x)$ 的傅立叶系数。本文获得的结果如下：

定理1、設 $f(x)\in C_{2\pi}$，则

$$\rho_{U_n}(f)=\|f(x)-U_n(f,x,\Lambda)\|\le B_1\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\sum_{\nu=0}^{k}E_\nu(f)+|\lambda_n^{(n)}|\sum_{\nu=0}^{n}E_\nu(f).$$

定理2．設 $f(x)\in C_{2\pi}$，又設 $\Delta^2\lambda_n^{(n)}\geqslant 0$，则

$$\rho_{U_n}(f)=\|f(x)-U_n(f,x,\Lambda)\|\le B_1\sum_{k=0}^{n}(|\lambda_n^{(n)}|-\lambda_n^{(n)}+\Delta\lambda_k^{(n)})E_k(f).$$

定理3．設 $f(x)\in C_{2\pi}$，又設 $\Delta^2\lambda_k^{(n)}\leqslant 0$，则

$$\rho_{U_n}(f)=\|f(x)-U_n(f,x,\Lambda)\|\le B_1\sum_{k=0}^{n}(|\lambda_n^{(n)}|+\lambda_n^{(n)}-\Delta\lambda_k^{(n)})E_k(f).$$

設 $F=\{F_n\}\ (n=0,1,\cdots)$，这里 $F_n\downarrow 0$，我们用記号 $C(F)$

表示这样一类周期为 $2\pi$ 的连续函数 $f(x)$：$E_n(f)\leq F_n$，令

$$\rho_{U_n}[C(F)]=\sup_{f\in C(F)}\rho_{U_n}(f)$$

定理4，设 $\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，$\Delta^2\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，则对于每一个函数类 $C(F)$，有

$$\rho_{U_n}[C(F)]\sim\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}F_k .$$

更确切地说，

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}F_k\leq\rho_{U_n}[C(F)]\leq B_1\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}F_k$$

定理5 设 $\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，$\Delta\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，$\Delta^2\lambda_k^{(n)}\leq 0$，则

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}F_k\leq\rho_{U_n}[C(F)]\leq\sum_{k=0}^{n}(2\lambda_n^{(n)}-\Delta\lambda_k^{(n)})F_k ,$$

定理6 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，$\tilde{f}(x)\in C_{2\pi}$，则

$$\rho_{U_n}(\tilde{f})=\|\hat{f}(x)-U_n(\tilde{f},x,\Lambda)\|\leq B_2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\left[\omega\left(\frac{1}{k+1},f\right)+E_{k+1}(\tilde{f})\right]+\right.$$

$$\left.+(n+1)|\lambda_n^{(n)}|\left[\omega\left(\frac{1}{n+1},f\right)+E_{n+1}(\tilde{f})\right]\right\}.$$

定理7 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，$\tilde{f}(x)\in C_{2\pi}$，又设 $\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，$\Delta^3\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，则

$$\rho_{U_n}(\tilde{f})\leq B_2\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta^2\lambda_k^{(n)}\left[\omega\left(\frac{1}{k+1},f\right)+E_{k+1}(\tilde{f})\right]\ (\lambda_{n+2}^{(n)}=0),$$

定理8 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，$\tilde{f}(x)\in C_{2\pi}$，又设 $\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，$\Delta^2\lambda_k^{(n)}\leq 0$，

则

$$\rho_{V_n}(\tilde{f}) \leq B_2\Big\{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(\Delta\lambda_{k+1}^{(n)}-\Delta\lambda_k^{(n)})\Big[\omega(\tfrac{1}{k+1},f)+E_{k+1}(\tilde{f})\Big]+$$

$$+(n+1)\lambda_n^{(n)}\Big[\omega(\tfrac{1}{n+1},f)+E_{n+1}(\tilde{f})\Big]\Big\}.$$

定理9，设 $f(x)\in C_{2\pi}$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\omega(\frac{1}{n+1},f)$ 收敛，又设 $\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，$\Delta^2\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，则 $\rho_{V_n}(\tilde{f})\leqslant B_3\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta^2\lambda_k^{(n)}\sum_{\nu=k+2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\omega(\frac{1}{\nu},f)$ $(\lambda_{n+2}^{(n)}=0)$.

定理10 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\omega(\frac{1}{n+1},f)$ 收敛，又设 $\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，$\Delta^2\lambda_k^{(n)}\leqslant 0$，则

$$\rho_{V_n}(\tilde{f})\leqslant B_3\Big\{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(\Delta\lambda_{k+1}^{(n)}-\Delta\lambda_k^{(n)})\sum_{\nu=k+2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\omega(\frac{1}{\nu},f)+$$

$$+(n+1)\lambda_n^{(n)}\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\omega(\frac{1}{\nu},f)\Big\}.$$

设 $\omega(\delta)$ $(0<\delta\leqslant\pi)$ 是一个正值函数，用记号 $H[\omega]$ 表示这样一类周期为 $2\pi$ 的连续函数 $f(x)$：$\omega(\delta,f)\leqslant\omega(\delta)$ $(0\leqslant\delta\leqslant\pi)$。又用记号 $\tilde{H}[\omega]$ 表示相应的共轭函数类，並令

$$\rho_{V_n}[\tilde{H}(\omega)]=\sup_{f\in H[\omega]}\rho_V(\tilde{f})$$

定理11 设 $\omega(\delta)>0$ $(0<\delta\leqslant\pi)$，

$$\omega^{**}(\delta)=\delta\inf_{0<\eta\leqslant\delta}\Big\{\eta^{-1}\inf_{\eta\leqslant\xi\leqslant\pi}\omega(\xi)\Big\}\ (0<\delta\leqslant\pi).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\omega^{**}(\frac{1}{n})<\infty$$

60

又设 $\lambda_k^{(n)} \geqslant 0$，$\Delta^2\lambda_k^{(n)} \geqslant 0$，则

$$\rho_{U_n}[\tilde{H}(\omega)] \sim \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k^{(n)} \sum_{\nu=k+2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\omega^{**}\left(\frac{1}{\nu}\right),\ (\lambda_{n+2}^{(n)}=0)$$

定理12，设 $\omega(\delta)>0\ (0<\delta\leq\pi)$

$$\omega^{**}(\delta)=\delta \inf_{0<\eta\leq\delta}\left\{\eta^{-1}\inf_{\eta\leq\xi\leq\pi}\omega(\xi)\right\}\ (0<\delta\leq\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega^{**}\left(\frac{1}{n}\right)<\infty,$$

又设 $\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，$\Delta\lambda_k^{(n)}\geqslant 0$，$\Delta^2\lambda_k^{(n)}\leq 0$，则

$$C_1\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}\sum_{\nu=k+2}^{\infty}\omega^{**}\left(\frac{1}{\nu}\right)\leq\rho_{U_n}\{\tilde{H}(\omega)\}\leq B_5\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(\Delta\lambda_{k+1}^{(n)}-\Delta\lambda_k^{(n)}\right)\sum_{\nu=k+2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\omega^{**}\left(\frac{1}{\nu}\right)+\right.$$

$$\left.+(n+1)\lambda_n^{(n)}\sum_{\nu=k+2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\omega^{**}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}.$$

最后，本文把上面的结果及其推论应用到綦查罗赫术平均，伯恩斯坦—劳高辛斯基之和及催国函典型平均，作为具体逼近法的例子。

# 关于全纯函数的正规族（摘要）

顾永兴

（北京大学）

自孟得尔（P. Montel）建立了解析函数正规族理论后，在这方面有着许多进一步的研究。密朗达（M. Miranda）于1935年证明了一个重要的命题：[1]

定理A．若于某区域D内全纯的一函数族$\{F(z)\}$中每个函数$F(z)$在区域D内都满足：$F(z)\neq 0$ 及 $F^{(k)}(z)\neq 1$，则$\{F(z)\}$在区域D内正规。

不久，伐利隆（G. Valiron）把这个命题加以推广：[2]

定理B，若于某区域D内全纯的一函数族$\{F(z)\}$中每个函数$F(z)$在区域D内都满足：$F(z)\neq 0$，及

$$a_0F(z)+a_1F^{(1)}(z)+a_2F^{(2)}(z)+\cdots+a_\nu F^{(\nu)}(z)\neq 1,\quad a_0,\cdots,a_\nu$$

为常数且$a_\nu\neq 0$则$\{F(z)\}$在区域D内正规。

1937年，庄圻泰教授又把定理B作更一般的推广：[3]

定理C，若于某区域D内全纯的一函数族$\{F(z)\}$中每个函数$F(z)$在区域D内都满足：$F(z)-b(z)\neq 0$，及

$$a_0(z)F(z)+a_1(z)F^{(1)}(z)+\cdots+a_\nu(z)F^{(\nu)}(z)\neq C(z)$$，其中

$b(z)$，$C(z)$，$a_i(z)$（$i=0\cdots\nu$）于D内全纯，且

$$a_0(z)b(z)+a_1(z)b^{(1)}(z)+\cdots+a_\nu(z)b^{(\nu)}(z)\neq C(z),\quad a_\nu(z)\neq 0$$

则$\{F(z)\}$在区域D内正规。

易见，$a_0F+a_1F^{(1)}+\cdots+a_\nu F^{(\nu)}$ 是关于F及其导数的一次齐次多项式、那么、如果F满足 $F(z)\neq 0$ 及 $H(F,F^{(1)},\cdots,F^{(\nu)})\neq 1$ 其中H为关于F及其导数的系数为常数的齐次多项式，族{F}是否仍为正规族？在一般情况下、结论不成立。但伐利隆给齐次多项式一个限制后[2]保证了函数族的正规性，他给出如下的定义：

定义1　称齐次多项式 $H(F,F^{(1)},\cdots,F^{(\nu)})$ 为非退化的，如果F用 $e^f$ 代替后，$H(e^f,(e^f)',\cdots,(e^f)^{(\nu)})$ 可表成形式

$$e^{kf}\left\{\alpha(f')^{n}+g(f',f'',\cdots,f^{(\nu)})\right\},$$ 其中 $\alpha\neq 0$，g为次数不超过 $n-1$ 的关于 $f',f'',\cdots,f^{(\nu)}$ 的多项式。

由此伐利隆证明了

定理D．若于某区域D内全纯的一函数族 $\{F(z)\}$ 中每个函数 $F(z)$ 都在区域D内满足：$F(z)\neq 0$ 及 $H(F,F^{(1)},\cdots,F^{(\nu)})\neq 1$ 其中H为关于 $F,F^{(1)},\cdots,F^{(\nu)}$ 的常系数的非退化齐次多项式，则 $\{F(z)\}$ 在D内正规。

显然、定理D是定理B的推广。

从齐次情形易連想到非齐次情形、对于后者，伐利隆曾叙过一个命题[2]但未加证明。本文目的就是研究关于非齐次的情形。

定义2，用 $H_p(F,F',\cdots F^{(\nu)})$ 表示关于F及其导数的p次齐次多项式，$H_0(F,F',\cdots,F^{(\nu)})$ 规定为常数，所谓非退化的零次齐次多项式规定为非零常数。齐次多项式 $H_p(F,F^{(1)},\cdots,F^{(\nu)})$ 用 $e^f$ 代替F后得表示式 $e^{pf}G(f',f'',\cdots,f^{(\nu)})$，我们把多项式G的次数称为 $H_p$ 的偏数，特别地如果 $H_p$ 为非退化时定义1中

的几即为Ω的指数。

我们的主要结果可叙述如下：

定理．设$\{F(z)\}$为一区域$D$内全纯函数族，其中每个函数$F(z)$在区域$D$内满足$F(z)\neq 0$及$T(F,F',\cdots F^{(\nu)})\neq 0$，$T(F,\cdots F^{(\nu)})$是关于$F$及其导数的常系数的非齐次多项式，则$\{F(z)\}$在区域$D$内正规如果非齐次多项式$T$满足下列几个条件之一：

$$1^\circ \quad T(F,F',\cdots,F^{(\nu)}) \equiv \sum_{i=1}^{k} H_{p_i}(F,F',\cdots,F^{(\nu)})$$

$(p_1>p_2>\cdots>p_k\geq 0,\ k\geq 2)$ 其中$H_{p_i}$为非退化齐次多项式，$i=1,2,\cdots k$。

$$2^\circ \quad T(F,F',\cdots F^{(\nu)}) \equiv \sum_{i=1}^{n} H_{p_i}(F,F',\cdots,F^{(\nu)})+ \sum_{j=1}^{m} H_{q_j}(F,F',\cdots,F^{(\nu)})$$

$(p_1>p_2>\cdots>p_n\geq 0 \quad n\geq 2,\ q_1>q_2>\cdots>q_m\geq 0,$
$p_i\neq q_j,\ i=1\cdots n,\ j=1\cdots m)$

其中$H_{p_i}$为非退化齐次多项式，用$\Omega_i$表示其指数，$i=1,2,\cdots n$
$H_{q_j}$为退化齐次多项式，用$S_j$表示其指数，$j=1\cdots m$，
$p_i$，$q_j$，$\Omega_i$，$S_j$满足下列三个条件之一：

a) $p_1>q_1$ 且

$$\min\left\{\frac{\Omega_2-\Omega_1}{p_2-p_1},\cdots\frac{\Omega_n-\Omega_1}{p_n-p_1}\right\}<\min\left\{\frac{S_1-\Omega_1}{q_1-p_1},\cdots,\frac{S_m-\Omega_1}{q_m-p_1}\right\}$$

b) $p_n < q_m$ 且

$$\max\left\{\frac{r_1-r_n}{p_1-p_n},\cdots,\frac{r_{n-1}-r_n}{p_{n-1}-p_n}\right\}>\max\left\{\frac{s_1-r_n}{q_1-p_n},\cdots\frac{s_m-r_n}{q_m-p_n}\right\}$$

( ) $g\equiv\max\{r_1,r_2\cdots r_n\}>\max\{s_1,s_2\cdots s_m\}$ 且至少有二个非退化齐次多项式的指数达到 $g$。

在证明过程中应用庄圻泰教授所得的关于单位圆内全纯函数的一般性定理[3]，还需利用一个引理，叙述如下：

引理、设代数方程 $a_n w^n+a_{n-1}w^{n-1}+\cdots+a_1w+a_0=0$ 至少有二个系数不等于零，用 $a_p$，$a_q$ 分别表示第一个及第末个不为零的系数（$n\geqslant p>q\geqslant 0$），又记

$$K=\max\left\{\frac{2(|a_p|+|a_{p-1}|+\cdots+|a_{q+1}|)}{|a_q|},\ \frac{2(|a_{p-1}|+\cdots+|a_q|)}{|a_p|}\right\}$$

则存在一个仅依赖于方程系数的正数 $\ell$ 具有以下性质：

对于任意 $n+1$ 个于圆 $G$：$|z|\leqslant 2\sqrt{(\log K)^2+(4\pi)^2}$ 上全纯且满足不等式 $|\delta_i(z)-a_i|<\ell$（$i=0,1,\cdots,n$）的函数 $\delta_i(z)$ 下面函数在 $G$ 上无有零点：

$$\delta_n(z)\ell^{nz}+\delta_{n-1}(z)\ell^{(n-1)z}+\cdots+\delta_1(z)\ell^{z}+\delta_0(z)$$

我们还可把定理推广到系数为全纯函数的非齐次多项式的情形。

本文是在庄圻泰教授的指导下进行的。

# 参考文献


[1] C. Miranda, Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes (Bulletin Soc. Math t, 63, 1935)

[2] G Valiron, Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées (Actualités Sc. et Ind 570, 1937)

[3] C. T Chuang: a) Étude sur les familles normales et les familles quasi-normales des fonctions méromorphes (Rendiconti circolo mat. Palermo t 62, 1938) b) Un théorème général sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité et ses applications (I), (II) (Scientia Sinica, Vol. VI, 1957)