一、梁的基本原理

梁是一种结构构件，其长度比横截面大得多，并且承受垂直于其纵轴的荷载。按照约束型式来区分梁的支承条件。滚轴支座或称简单支座可以在平行于滚轴放置的平面方向内自由旋转和移动。它仅承受垂直反力。铰支座可以自由旋转，但是约束了在任何方向的移动。可承受垂直和水平方向的反力。固端或夹紧支座在梁的末端完全约束了旋转和移动。这样可承受弯矩和反力。当梁的支座反力可用静力平衡方程式确定时则梁是静定结构。如果梁反力的数目超过了静力平衡方程的数目，那么除静力平衡方程的数目外必须增补梁的变形方程数，则梁称为超静定结构。梁可以根据支承条件分类：可分为简支梁，悬臂梁和连续梁。

当梁上作用外力或力偶时，则在梁内引起应力，通常，将产生正应力和剪应力，为了确定梁截面这些应力的大小，必须找出作用在梁横截面上的合力及弯矩。所考虑的梁截面一边作用的外力对截面轴线产生弯矩的代数和即称为梁截面的弯矩。对梁截面一边如左边所有垂直力的代数和就称为那个截面的剪力。一个力使梁弯曲成凹面即产生了正弯矩。一个力使梁受剪，如使梁左边（相对于右边来说的）向上，则此剪力称为正剪力。

荷载、剪力和弯矩互相关联。当在梁的任何部分作用有向下集度为w(x)的均布荷载时，下面的关系式成立：

$$V = \frac{dM}{dx} \tag{1}$$

$$w = \frac{-dV}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2} \tag{2}$$

方程式（1）表示梁中单元体的力矩的平衡，方程（2）表示同样单元体的垂直力的平衡。它清楚地表示出当梁的截面剪力为零

时弯矩将最大或最小。从方程（1）和（2）我们得到：

$$M_B - M_A = \int_A^B V dx \quad (1a)$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B w dx \quad (2a)$$

方程式（1a）表示两个横截面A和B弯矩之差额等于A和B之间剪力曲线的面积。同样，方程（2a）说明两个横截面剪力之差等于施加于梁的这两点之间的总荷载。

1.弯矩和反力的确定

在超静定梁中弯矩和反力的数量比静力平衡方程的数量多，其超出的弯矩和反力叫做多余力，而多余力数量就是超静定度。当一些或全部多余力消去时，则剩余的结构称基本结构。基本结构可选择为稳定和静定的。在确定超静定梁的弯矩和反力时，它不仅必须满足静力平衡的所有条件，而且还要满足变形协调条件（连续条件）。这些条件的满足是变形协调法的基础。

a.变形协调法

这是最基本的分析方法，可用来分析各种类型的超静定梁。它仅要求梁的位移要小并可采用叠加原理。考虑图1a所示的承受均布荷载的梁，如果选R_B为多余力，基本结构将是悬臂梁（见图1b），悬臂梁在自由端将产生挠度Δ，我们知道$\Delta = wl^4/8EI$。如果一个力相当于多余力R_B作用于梁上（见图1c），将产生挠度Δ'，而$\Delta' = R_B l^3/3EI$。由连续条件要求B点挠度必须为零；我们得到：

$$\Delta - \Delta' = 0 \text{ 或 } \frac{wl^4}{8EI} = \frac{R_B l^3}{3EI}$$

因此$R_B = 3wl/8$。而弯矩M_A可以由静力平衡条件求得（$M_A = wl^2/8$）。

此梁亦可选用M_A为多余力进行分析，如图2。基本结构左端的转角（见图2b）是$\theta_A = wl^3/24EI$。当多余力亦作用于左端时，则对应的转角是$\theta_A' = M_A l/3EI$。由连续条件要求：

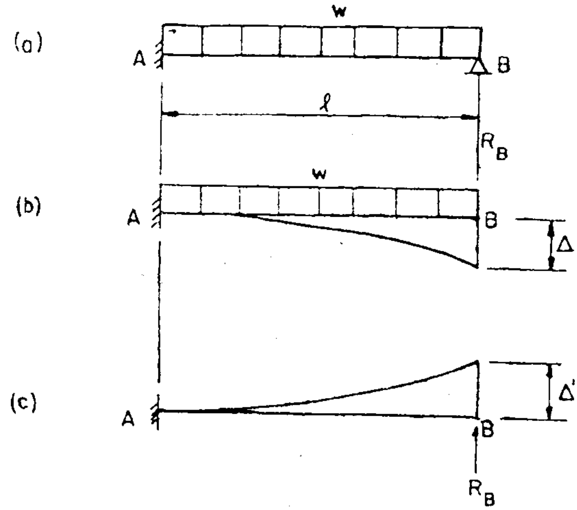


图 1　用于多余力的叠加

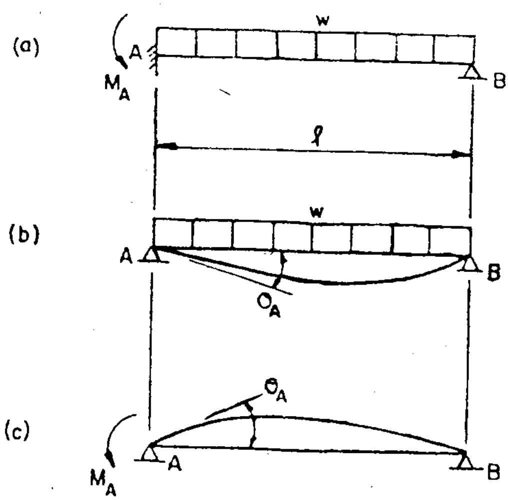


图 2　多余弯矩的叠加

$$\frac{wl^3}{24EI} = \frac{M_A l}{3EI}$$

我们亦可得到$M_A = wl^2/8$。

通常根据在多余力处求解挠度和求解方程的复杂性来确定多余力的选择方法。

b.最小功法

最小功法原理是基于多余力取某值时结构应变能最小。应变能可用多余力或弯矩来表示。用卡斯提里阿诺定理来解对应多余力的变形。这表示式为：

$$\frac{\partial U}{\partial R_i}=0$$

式中U是结构的应变能，R_i是多余力。例如对于图1a的梁：

$$U=\int\frac{M^2}{2EI}dx$$

$$\frac{dU}{dR_B}=\frac{d}{dR_B}\int\frac{M^2}{2EI}dx=0 \qquad (3)$$

距B点为x处的弯矩：

$$M=R_Bx-\frac{wx^2}{2}$$

将弯矩代入方程（3）得：

$$\frac{1}{EI}\int\left(R_Bx-\frac{wx^2}{2}\right)xdx=0$$

$$\frac{R_Bl^3}{3EI}-\frac{wl^4}{8EI}=0$$

故我们得$R_B=3wl/8$

c.角变位移法

角变位移法可以用来分析超静定梁。这种方法是用角变和位移而不是用力和弯矩作未知力，所有作用于构件末端的弯矩是用未知转角和位移来表示，并写出静力平衡方程式，求解方程后就可得到转角和位移，然后可以求得端弯矩。

图3a所示的构件是从连续梁中取出的一根梁，它承受横向荷载和端弯矩，构件的端弯矩用四个量来表示，构件两端弹性曲线切线的转角，连结弹性曲线两端弦杆的转角和作用于构件上的外

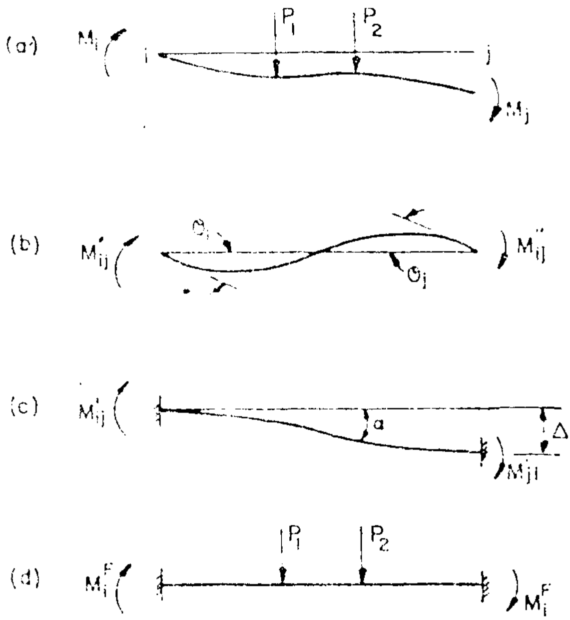


图 3 角变-位移定理

荷载，从图3b我们得到以下表达式：

$$\theta_i = \frac{M''_{ij}l}{3EI} - \frac{M''_{ji}l}{6EI}$$

$$\theta_j = \frac{M''_{ji}l}{3EI} - \frac{M''_{ij}l}{6EI}$$

从这些我们得到：

$$M''_{ij} = \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j) \tag{4}$$

$$M''_{ji} = \frac{2EI}{l}(2\theta_j + \theta_i) \tag{5}$$

图3c表示当构件末端固定约束转动时连接ij弦杆旋转时的作用。在两端的弯矩为：

$$M'_{ij} - M'_{ji} = -\frac{6EIa}{l}$$

图3d表示构件的两端固定约束旋转时，并施加了外部荷载，则弯

矩M_i^F和M_j^F是i端和j端的固定端的弯矩。图3a所示的构件的端弯矩可用叠加求得：

$$M_{ij}=M'_{ij}+M''_{ij}+M_i^F$$

这样角变位移方程，就成为：

$$M_{ij}=M_i^F+\frac{2EI}{l}(2\theta_i+\theta_j-3a) \qquad (4a)$$

同理，我们得到：

$$M_{ji}=M_j^F+\frac{2EI}{l}(2\theta_j+\theta_i-3a) \qquad (5a)$$

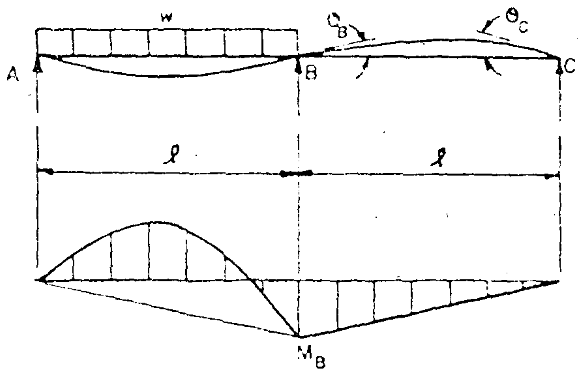


图 4 角变-位移法的应用

第一步用这种方法写出对端弯矩的角变位移方程，第二步写出许多不独立的平衡方程式作为未知量，通过适当的代换可以得到联立方程。最后一步是通过解联立方程便可得到转角，然后再代入角变位移方程就可求出端弯矩。图 4 示出了一个二跨连续梁。其角变位移方程为：

$$M_{AB}=-\frac{wl^2}{12}+\frac{2EI}{l}(2\theta_A+\theta_B)$$

$$M_{BA}=\frac{wl^2}{12}+\frac{2EI}{l}(2\theta_B+\theta_A)$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{l}(2\theta_B+\theta_C)$$

$$M_{CB}=\frac{2EI}{l}(2\theta_C+\theta_B)$$

我们知道：$M_{AB}=0$，$M_{CB}=0$ 和 $M_{BA}=-M_{BC}$

用这些关系代入，得到三个联立方程：

$$2\theta_A+\theta_B=\frac{wl^3}{24EI} \tag{6}$$

$$\theta_A+4\theta_B+\theta_C=-\frac{wl^3}{24EI} \tag{7}$$

$$\theta_B+2\theta_C=0 \tag{8}$$

解方程 6 ～ 8 得到：

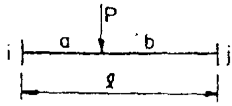
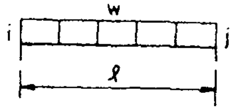
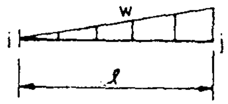
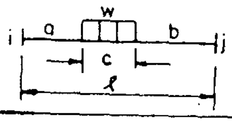
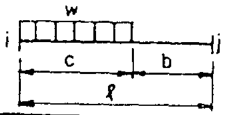
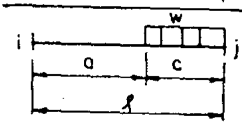
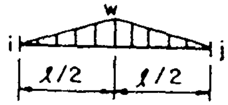
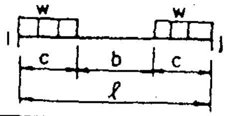
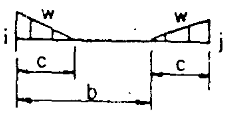
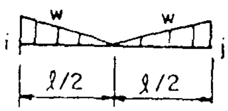
$$\theta_A=\frac{wl^3}{32EI}\quad \theta_B=\frac{-wl^3}{48EI}$$

$$\theta_C=\frac{wl^3}{96EI}\quad M_B=\frac{wl^2}{16}$$

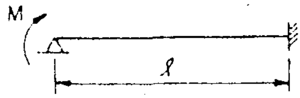
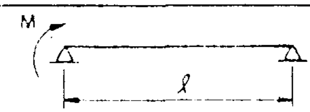
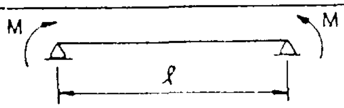
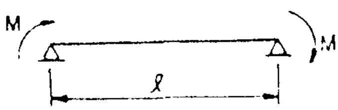
d.弯矩分配法

这种方法的目的是求出结构节点处的弯矩，当这些是已知数时，反力和剪力可以从平衡方程式中求出。应用弯矩分配法的第一步是先锁紧所有节点，每个构件都为固端梁，当加荷载时在节点处将产生弯矩。这些弯矩称为固定端弯矩。而在节点处固定端弯矩的和叫做节点处的不平衡弯矩。下一步求弯矩分配过程是先放松节点，并施加平衡弯矩，相等的或相反的不平衡弯矩。当这些作用于节点处时,可以求得节点处的弯矩。弯矩分配与构件的转动刚度成比例。构件近端弯矩的分配导致远端弯矩的传递。本力矩分配传递弯矩的比值为传递系数。在一个节点平衡后再锁紧它，然后这一过程对另一放松节点进行并使其平衡。这种锁紧和放松每个节点的过程连续进行直到在节点处的不平衡力矩可以忽略为止。表 1 提供了各种荷载情况下固定端的弯矩的方程。表 2 示出了棱柱形构件的刚度公式，图 5 示出了连续梁。固定端弯矩的计算方法如图所示。每一个构件的刚度系数是：

固 端 弯 矩　　　　表 1

	$\overline{M}_i = ab^2/l^2$ $\overline{M}_j = Pba^2/l^2$
	$\overline{M}_i = \overline{M}_j = \frac{wl^2}{12}$
	$M_i = \frac{wl^2}{30}$ $M_j = \frac{wl^2}{20}$
	$\overline{M}_i = \frac{wc}{12l^2}\left[12ab(b+c)+6b^2c+4c^2(a+b)+c^3\right]$ $\overline{M}_j = \frac{wc}{12l^2}\left[12ab(a+c)+6b^2c+4c^2(a+b)+c^2\right]$
	$\overline{M}_i = \frac{wc^2}{12l^2}(6b^2+4bc+c^2)$ $\overline{M}_j = \frac{wc^2}{12l^2}(4b+c)$
	$\overline{M}_i = \frac{wc^3}{12l^2}(4a+c)$ $\overline{M}_j = \frac{wc^2}{12l^2}(6a^2+4ac+c^2)$
	$\overline{M}_i = \overline{M}_j = \frac{5wl^2}{96}$
	$\overline{M}_i = \overline{M}_j = \frac{wc^2}{6l}(3b+4c)$
	$\overline{M}_i = \overline{M}_j = \frac{wc^2}{12l}(2b+c)$
	$\overline{M}_i = \overline{M}_j = \frac{wl^2}{32}$

棱柱体构件的刚度公式　　　　　　　　表 2

支　承　条　件	转动刚度	修正系数	传递系数
	$\frac{4EI}{l}$	1.0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{3EI}{l}$	0.75	0
	$\frac{2EI}{l}$	0.50	0
	$\frac{6EI}{l}$	1.50	0

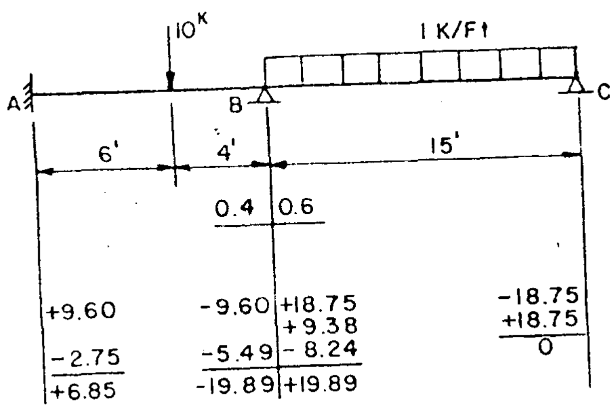


图 5　连续梁的弯矩分配

译者注：k ——千磅，ft——英尺

$$K_{AB}=\frac{1}{10}(10)=1$$

$$K_{BC}=\frac{3}{15}\times 0.75\times(10)=1.5$$

而在节点B 的分配系数是：

$$D_{BA}=\frac{1}{1+1.5}=0.40$$

$$D_{BC}=\frac{1.5}{1+1.5}=0.60$$

注意：构件B C 的刚度系数因在C 点为铰接而减小。弯矩的分配是从节点C 加+18.75开始的，对节点B 传递了+9.38，我们现在进行到节点B 且不锁紧它，则节点将在+13.73的不平衡弯矩下转动。我们在这个节点加-13.75即可以得到平衡。对构件AB和BC分别分配-5.49和-8.24，如图所示最后弯矩为：

$M_A=6.85$千磅-英尺

$M_B=19.89$千磅-英尺

2.角变和位移的确定

当结构承受外部荷载时，结构的每一个单元都将变形和每个构件的轴线将从原来的位置产生挠度。如果一个单元的长度dx其中心受到了一个轴向力P，则变形为：

$$edx=\frac{Pdx}{EA}$$

式中A 为横截面面积，E 是弹性模量。如果它受到弯曲其变形是单元的一边转动一角度$d\theta$。由弯曲产生的变形为：

$$d\theta=\frac{Mdx}{EI}$$

式中I 是横截面的惯性矩。由剪力V 产生的变形是单元的一边相对于另一边的位移δ，可表示为：

$$\delta = \frac{Vdx}{GA_s}$$

式中G是剪变模量，A_s是修正的横截面面积。当剪切面积已知时，确定梁的剪切变形。确定梁的变形有各种方法，本节我们将讨论三种方法：逐次积分法，力矩图面积法和共轭梁法。

a.用逐次积分求梁的位移。

这种方法有时叫二次积分法。梁位移曲线的微分方程是：

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

式中，x = 沿梁轴线坐标的距离

y = 横向位移

M = 弯矩

这个方程仅给出了由弯矩产生的位移，忽略了剪力的影响。从方程1和2我们可以得到以下方程：

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -V$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w$$

用逐次积分这些方程和从已知梁的边界条件计算积分常数，则可求得梁的任意点的位移和斜率，对一根梁，如果在x点的荷载用x的函数来表示，当已知整个梁荷载情况时，则：

$$V_x = \int w_x dx$$

$$M_x = \int V_x dx$$

$$\theta_x = \int \frac{M_x}{EI} dx \tag{9}$$

$$y_x = \int \frac{\theta_x dx}{EI} = \iint \frac{M_x}{EI} dx \tag{10}$$

图 6 示承受均布荷载w的悬臂梁，从方程式 9 和10得到：

$$EI\theta_x = \int M_x dx = \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$EIy_x = \iint M_x dx = \int\left(\frac{wx^3}{6} + C_1\right)dx$$

$$= \frac{2wx^4}{24} + C_1x + C_2$$

当 $x = l, \theta = 0$ 时，$C_1 = -\frac{wl^3}{6}$

当 $x = l, y = 0$ 时，$C_2 = \frac{wl^4}{6} - \frac{wl^4}{24} = \frac{wl^4}{8}$

当 $x = 0, y = y_{max}$ 时，$y_{max} = \frac{C_2}{EI} = \frac{wl^4}{8EI}$

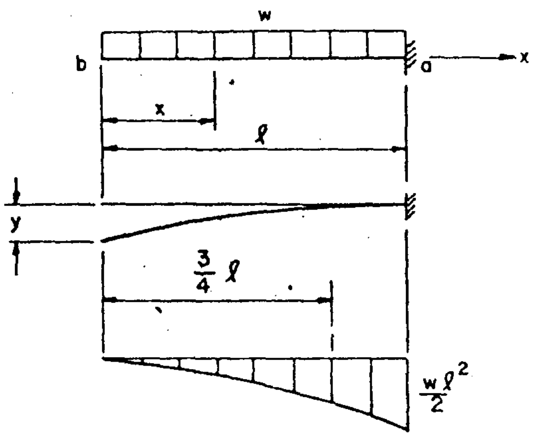


图 6　力矩面积法的应用

b. 力矩图面积法

首先，力矩图面积法定理叙述了一个变形梁在a和b点切线间的角度等于a 和b 点间力矩图的面积除以EI，这 a 和 b 之间的梁斜率的变化可表示为：

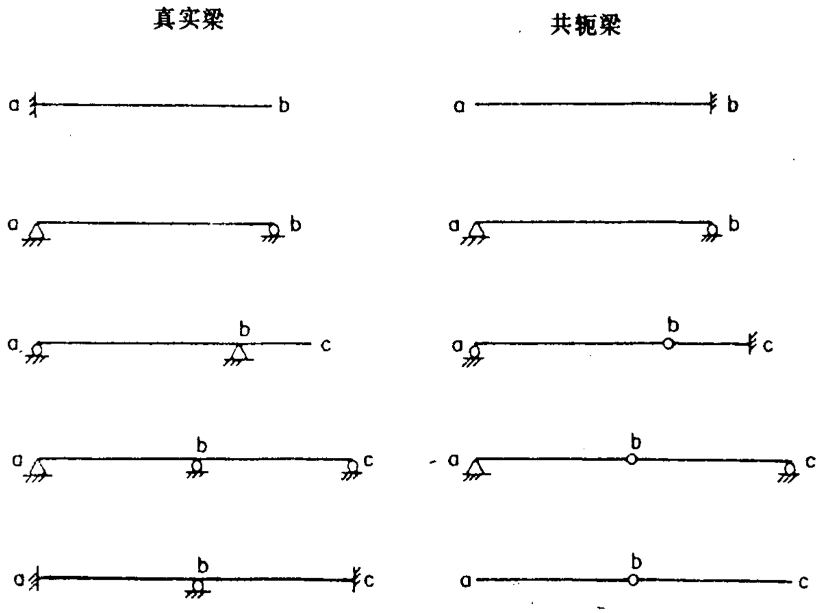


图 7 共轭梁的边界条件

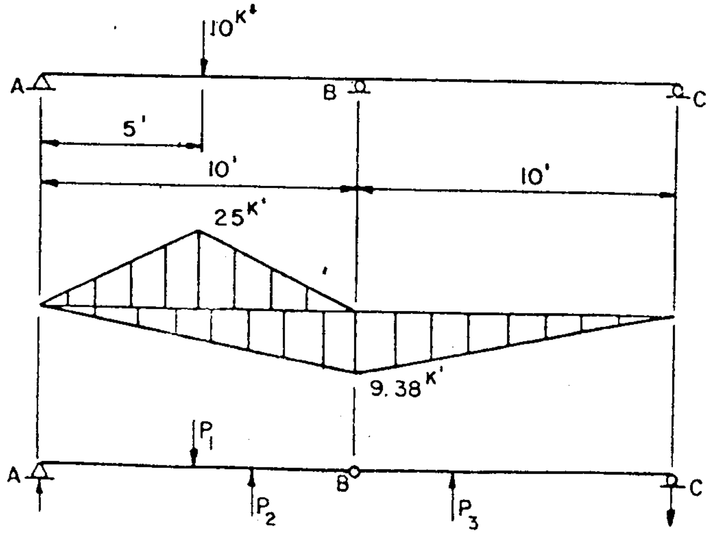


图 8 共轭梁的应用

$$\theta_{ab} \doteq \int_a^b \frac{M}{EI} dx \tag{11}$$

第二，力矩图面积法定理说明变形梁从 b 点到 a 点切线的垂直距离等于弯曲点 a 和 b 两点间弯矩图面积对 b 点的力矩除以EI。对轴线的偏离值可表示为

$$\delta = \int_a^b \frac{M_x}{EI} dx \tag{12}$$

在图 6 表示出了M/E1图的面积是$wl^3/6$,对b点的力矩是$wl^4/8$,这些被EI除，就是在 b 点的斜率和位移。

c.共轭梁法

共轭梁是一种虚梁，它和真实梁有相同的长度，但其承载情况如下：共轭梁以真实梁的M/EI图荷载作为弹性荷载,共轭梁在任何位置的剪力等于真实梁在相应位置的斜率。而共轭梁的弯矩等于真实梁的相应的位移。通常总可选择适当的支承条件。

根据真实梁在支承时弹性曲线的已知特征，静定梁通常有相应的共轭梁，而共轭梁也是静定的。超静定梁似乎是对应有不稳定的共轭梁，但可用真实梁的M/EI 作为共轭梁的弹性荷载而取得稳定。图 7 表示共轭梁支承条件的选择，以图 8 的连续梁为例，共轭梁的弹性荷载是：

$$P_1 = 0.5 \times 25 \times 10 = 125\text{千磅-平方英尺}$$

$$P_2 = P_3 = 0.5 \times 10 \times 9.38 = 46.90\text{千磅-平方英尺}$$

共轭梁在A和C点的反力为真实梁在A和C点的斜率，我们得到

$$R_A = \left(125 \times 5 - 46.9 \times \frac{3}{10}\right) \times \frac{1}{10} = 46.87\text{千磅-平方英尺}$$

$$\theta_A = \frac{46.87}{EI}\text{千磅-平方英尺}$$

$$K_C = 46\backslash 9 \times \frac{10}{3} = 15.63\text{千磅-平方英尺}$$

$$\theta_C = \frac{15.63}{EI}\text{千磅-平方英尺}$$

在荷载点的位移是：

$$\delta_P=\frac{1}{EI}(46.87\times 5+0.5\times 5\times 4.69\times 1.67$$

$$-0.5\times 5\times 25\times 1.67)=\frac{149.56}{EI}\text{千磅-平方英尺}$$

3.叠加原理

在结构分析中当要确定的量是施加荷载的线性函数时可采用叠加原理。在这种情况下，每个荷载分别作用所产生的数量可求出来，而叠加的结果可得到全部荷载所产生的总值。叠加原理的应用有一定的局限性，当承载时结构的几何图形有明显变化时，力的作用线和结构尺寸和原始状态有所改变，叠加原理就不适用了。它不能用于这样的结构系统内，那在几个力的作用下引起结构变形时有可能对另外的力产生影响而反过来则不然。例如，在一个梁柱内的横向荷载，产生位移时，可使轴向力产生弯矩；但轴力单独作用时则不会产生弯矩。叠加原理有许多应用，使用它可以将复杂的问题分析成几个简单的数量，这些数量中的每一个都可以单独解出。它们的代数和就可得到最终的结果。

4.影响函数

图 9 表示一个承受荷载P 的简支梁，设M为在C 点的弯矩，我们可以写出：

$$M=\frac{P(l-c)x'}{l}\tag{13}$$

在横截面x=x′时，表示当荷载移动时确定的横截面中弯矩的变化。如图9b所示，就称为当x = x′时弯矩的影响线。同理也可画出在c点剪力的影响线，如图9c所示。至于其它的量如反力、位移、斜率等等也可同样画出。影响线在叠加原理的应用中是很有用的。假如我们设P = 1，在c点的力矩可表示为：

$$M' = \frac{(l - c)x'}{l} \qquad (14)$$

用方程14表示的函数M′叫做影响函数，对c点所画的M′则称为影响线。

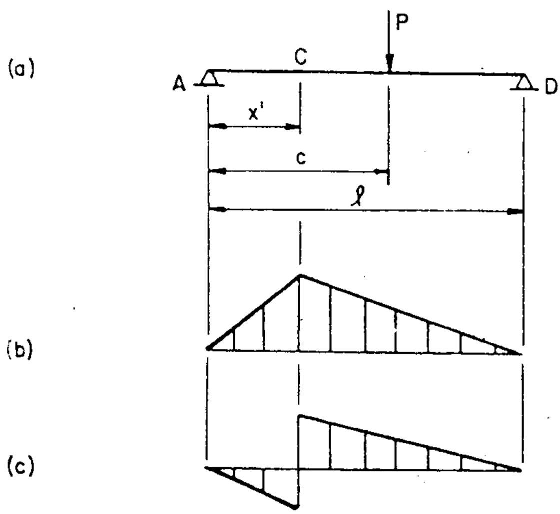


图 9　c 点弯矩和剪力的影响线

影响线有两种用途：（1）确定求特殊函数如弯矩，剪力最大值时活荷载的位置；（2）当荷载确定时计算该函数值。为求得单个集中荷载作用下函数的最大值，此荷载应作用在影响线有最大座标位置处。由于集中荷载作用而引起的函数的值等于荷载和在荷载作用点处所确定的影响线坐标的乘积。为得到均匀分布荷载移动时产生的函数的最大值,这荷载应放在梁的某个位置处,在那个位置处影响线的座标有所考虑函数的特殊的标志，函数值等于均匀荷载的集度和在那部分的影响线净面积的乘积。图10所示的连续梁承受移动的活荷载的影响。B 点弯矩的影响线在a 和 b之间有较大的座标值,如果荷载集度是2千磅/英尺，则活荷载应