

整数规划

数学系优化教研室施光燕编

大连工学院

前 言

随着我国国民经济和科学技术的发展,运筹学这门新兴学科,在生产管理、工程技术、军事作战、科学试验、财政经济以及社会科学中都得到了极为广泛的应用。

《运筹学》(清华大学出版社出版,1984年)自问世以来,受到国内许多运筹工作者的热烈欢迎。我在学习教材内容的基础上,编写了《运筹学应用程序集》一书。其目的是:一方面用计算机实现运筹学的计算方法,解决了用人工计算量大而又十分繁杂的困难;进而普及与推广了计算机的应用,提高微型计算机的使用率。另一方面使用计算机实现了运筹学方法在科学管理与实际生产中的应用,减轻了广大工程、科技人员在编制程序方面的重复劳动,缩短研编程序的周期,把主要精力用于科学研究、建立模型与发展生产力上,促进四化建设。

本书编入的应用程序,尽量用标准的 BASIC 语言写成,而且在 PC-1500 和 PC-1500A 袖珍电子计算机上调试通过,对所有的实例也都做了实际运行计算,可直接使用。如对本书中的语句在 IBM-PC/XT 及其兼容机长城 0520 上使用,则对程序中的个别语句作如下修改:

1. 删去打印机的状态语句 TEXT
2. 删去字符尺寸规格语句 CSIZE
3. 删去颜色规格语句 COLOR

以上三条语句一般是程序中的第 2、3、4 条语句。当然在程序中其他地方出现时,也同样删去。

4. 删去控制打印纸的进退语句 LF(一般在程序结束处 AND 语句前出现)

5. 修改输出格式语句 TAB, PC-1500 机输入输出格式语句后的列号数字时不加括号,如 TAB n 而 IBM-PC/XT 微型机要求加括号,修改为 TAB (n) 才能被 IBM-PC/XT 微型机接受。所以在程序中凡遇到输出格式语句 TAB 时,其后面的指定列号都要加上括号。

6. 若在 CCDOS2.4 系统下运行书中程序,凡是字符串(带双引号)出现的地方,都可以用相应意义的汉字代替。

只需注意以上 6 点说明,对本书中所有程序作相应修改后,即可在 IBM-PC/XT 及其兼容机长城 0520 上使用。

为了使读者上机实习时操作方便,在附录中编写了 PC-1500 袖珍电子计算机常用操作命令及错误信息表,供读者和用户查阅。

本书中给出的应用程序都是各自独立的,故不一定要按顺序去阅读。可根据生产、科研及教学的实际需要,有选择地去选用相应的程序。

本书稿经天津大学李维铮教授审阅并亲自为本书写了绪言。我在此表示感谢。

由于本人水平有限,文中错误与不妥之处敬请读者和用户批评指正。

目 录

第一章 绪言	1
第二章 线性规划	3
1. 通用单纯形法程序	3
2. 有界变量线性规划程序	9
3. 改进单纯形方法程序	14
4. 对偶单纯形方法程序	18
5. 条材、板材最优化套裁下料使用的单纯形方法程序	21
6. 线性规划灵敏度分析程序	27
7. 条材最优化套裁下料方案程序	42
8. 板材三零件最优化套裁下料方案程序	48
9. 板材四零件最优化套裁下料方案程序	60
10. 运输问题程序	79
第三章 整数规划	90
11. 分枝定界法程序	90
12. 0—1 型整数规划程序(指派问题)	108
13. 背包问题程序	113
第四章 非线性规划	118
14. 一维最优化方法程序	118
15. 牛顿法程序	122
16. 共轭梯度法程序	125
17. 变尺度法程序	135
第五章 动态规划	153
18. 一维动态规划程序	153
19. 资源分配程序	157
20. 驿站马车问题程序	160
21. 设备更新程序	165
22. 排序问题程序	170
第六章 网络方法	175
23. 计划评审网络技术程序	175
24. 通用网络程序	181
25. 单目标箭线式计划网络作图指示程序	189
26. 货郎担最佳路径程序(包括中国邮递员问题)	198
27. 赋权图中各顶点间最短通路值的计算程序	—
28. 赋权图中两顶点间最短通路值的标号法程序	—

29. 最大可靠路的计算程序	212
30. 求最小支撑树的 Kruskal 算法程序	215
31. 最短树问题的逐步生长法程序	218
第七章 排队论	221
32. 排队论(随机服务系统)仿真程序	221
(1) 单队单服务台随机服务系统仿真	221
(2) 多队单服务台随机服务系统仿真	221
33. 单队多服务台排队系统仿真程序	229
第八章 存储论	240
34. 生产库存计划问题的动态规划程序	240
35. 经济订购批量 (E.O.Q) 模型程序	243
36. 单周期概率需求库存模型程序	250
37. 周期性盘点库存模型程序	255
38. 多周期概率库存模型程序	259
39. 动态需求周期盘点存储系统模型程序	266
第九章 对策论	271
40. 求最优纯策略程序	271
41. 矩阵对策线性方程组解法程序	274
42. 矩阵对策线性规划解法程序	279
第十章 决策论	289
43. 风险型决策分析程序	289
(1) 最大可能法	289
(2) 期望值法	289
(3) 决策树法	289
(4) 矩阵法	289
(5) 多级决策	289
44. 完全不确定型决策分析程序	300
(1) 乐观法则	300
(2) 悲观法则	300
(3) α 法则	300
(4) 拉普拉斯法则	300
(5) 沙万奇法则	300
45. 贝叶斯决策分析程序	308
46. 决策树分析程序	314
附录	
附一、PC-1500 袖珍计算机常用操作说明	322
附二、PC-1500 错误信息表	331
附三、移值到 IBM-PC/XT 机上的“条材最优化套裁下料方案程序” 及实例的运行结果	335

第一章 整规划和图

线性和整线性规划中重要的一类和图有着密切的联系。有名的分配问题——有 m 件工作欲分给 m 个人，第 i 个人干第 j 件工作所产生的价值为 c_{ij} ，问如何分配使产生的价值最大？便是属于这一类。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1, \quad j=1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &= 1, \quad i=1, \dots, m \\ x_{ij} &= 0, 1 \quad i, j=1, \dots, m. \end{aligned}$$

§ 1.1 图的定义和基本性质

设 $V = \{i | i=1, 2, \dots, m\}$ 是有限集

$S = \{(i, j) | i, j \in V\}$ 是 V 中元素的所有无序对集

则称 $G = (V, E)$, $E \subseteq S$ 为无向图。

V 的元素称为顶点， E 的元素称为棱。

图的这种抽象定义可用具体的图形示出，用圆圈表示顶点，用圆圈之间的连线表示棱。例如如图 1。

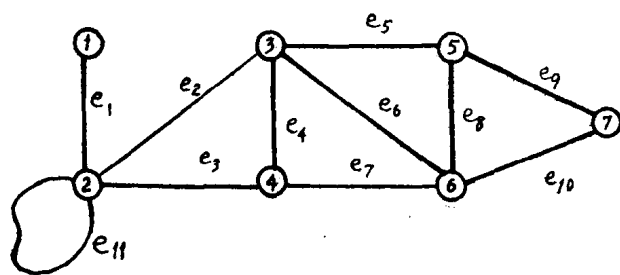


图 1.

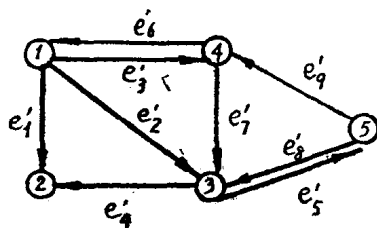


图 2.

把上述定义中的无序对换成有序对，无序对集 S 换成有序对集 Q ，则 $G' = (V, E')$ ， $E' \subseteq Q$ 称为有向图。 E' 中的元素称为有向棱。有向棱 (i, j) 在图上表成从 i 指向 j 。例如如图 2。

若 $e_j = (i, k)$ 则称棱 j 关联着顶点 i 和 k 。一个图 $G = (V, E)$ 的所有关联关系可用矩阵示出

$$A = \{a_{ij}\}$$

$i = 1, \dots, |V|$ $|V|$ 表示 V 中元素的个数,

$j = 1, \dots, |E|$ $|E|$ 表示 E 中元素的个数,

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{若棱 } j \text{ 不和顶点 } i \text{ 关联} \\ 1 & \text{若棱 } j \text{ 和顶点 } i \text{ 关联} \end{cases}$$

矩阵 A 称为图 G 的关联矩阵。如图 1 的关联矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

类似地可以定义有向图 $G' = (V, E')$ 的关联矩阵

$$A' = \{a'_{ij}\}$$

$i = 1, 2, \dots, |V|$

$j = 1, 2, \dots, |E'|$

$$a'_{ij} = \begin{cases} -1 & e'_j = (k, i) \quad k \neq i \\ 1 & e'_j = (i, k) \quad k \neq i \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

如图 2 的关联矩阵为

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

在无向图中若两个棱关联着同一个顶点则称为是邻接的。在有向图中若 $e_i = (h, j)$ 、 $e_k = (j, p)$ 则称 e_i 和 e_k 是邻接的。

若棱的序列 $(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p})$ 中 e_{j_t} 和 $e_{j_{t+1}}$ 均是邻接的则称为路。若 $e_{j_1} = (i_0, i_1)$ 、 $e_{j_p} = (i_{p-1}, i_p)$ 则称棱序列为连通顶点 i_0 和 i_p 的路。(在有向图中称为从 i_0 到 i_p 的路。)

在图 1 中 $P_1 = (e_2, e_6, e_{10})$ 和 $P_2 = (e_3, e_7, e_8, e_5, e_8, e_{10})$ 是连通顶点 2 和 7 的二条不同的路。

始、终于同一个顶点的路称为循环。如图 1 中 $c_1 = (e_6, e_5, e_8)$ 。不包含循环的路称为简单路。

路亦可用顶点序列表示。

无向图 $G=(V, E)$, 若对于任意 $i, j \in V, i \neq j$ 均至少有一条路连通它们, 则称 G 是连通的。如图 1 就是连通的。

图 $\hat{G}=(\hat{V}, \hat{E})$ 和 $G=(V, E)$, 若 $\hat{V} \subseteq V, \hat{E} \subseteq E$ 则称 \hat{G} 为 G 的子图。
一个无向的连通图若不包含循环则称为树。

图 $G=(V, E)$ 的子图 \hat{G} 若是树和顶点集 $\hat{V}=V$ 则称 \hat{G} 为 G 的生成树。

不难证明: 若 $G=(V, E)$ 是树, 则 $|E|=|V|-1$ 。

对于无向图 $G=(V, E)$ 和 $i \in V$ 定义:

1. $E^i = \{e_j | \text{存在一个包含 } e_j \text{ 通过 } i \text{ 的路}\}$

2. $V^i = \{t | \text{存在 } r \in V \text{ 使 } (r, t) \in E^i\}$,

子图 $G^i=(V^i, E^i)$ 称为 G 的成分, 显然 G 是连通的充要条件是对所有 $i \in V, G^i=G$ 。

图 3 不是连通的, 它包含三个成分。

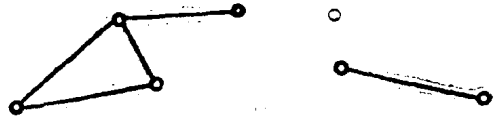


图 3.

§ 1.2 单整性 (unimodularity)

考虑 LP , 其约束为

$$Ax=b, x \geq 0 \quad (1)$$

其中 A 和 b 假设是整的。我们可把 A 分成 (B, N) , 其中 B 是非奇异的, 于是 (1) 可写成

$$Bx_B + Nx_N = b$$

和得到 (1) 的基本解

$$x_B = B^{-1}b, x_N = 0.$$

于是, 为使 (1) 的基本解是整的充分条件为 B^{-1} 是一个整矩阵。为保证 B^{-1} 是整矩阵, 我们引进单整性的概念。一个整的方阵 B 若 $|\det B|=1$, 则称 B 是单整的。一个整的 $m \times n$ 矩阵 A , 若其每个非奇异的方子阵是单整的, 则称 A 是完全单整的。

由逆阵的构造可知若 B 是非奇异整的, 则

$$B^{-1} = \frac{B^+}{\det B}$$

其中 B^+ 是 B 的伴随阵, 是整的。因此 B 的单整性保证了 B^{-1} 的整性。所以若 A 是完全单整的, 则每个基本解 $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$ 是整的。把上述的归结为:

定理 1. 若 A 是完全单整的, 则 (1) 的每个基本解是整的。

定理 1 仅是一个充分条件, 并不是必要的。例如

$$\begin{aligned} \text{例 1.} \quad & 5x_1 + 2x_2 = b_1 \\ & 2x_1 + x_2 = b_2 \end{aligned} \quad (2)$$

b_1, b_2 是整的

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 不是完全单整的, 而 (2) 的唯一解是整的。

对于具有不等约束的 LP , 定理 1 可以加强, 有

定理 2. 设 A 是一整矩阵, 则下列三条是等价的。

1. A 是完全单整的。
2. $S(b) = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ 对于任意的整的 b , 其每个极点是整的。
3. A 的每个非奇异的方子阵具有整逆

证明: $1 \Rightarrow 2$ 只须证由 A 的完全单整性 $\Rightarrow (A, I)$ 的完全单整性。

任取 (A, I) 的非奇异方子阵 P 。

若 P 不包含 I 的列则由 1 知是单整的。若 P 不包含 A 的列则显然是单整的。若 $P = (\bar{A}, \bar{I}), \bar{A}, \bar{I}$ 分别是 A 和 I 的子阵。

对 P 进行行的交换, 使

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{I} \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}$$

于是

$$P' = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ \bar{A}_2 & \hat{I} \end{bmatrix}$$

$$|\det P| = |\det P'| = |\det \bar{A}_1| \cdot |\det \hat{I}| = |\det \bar{A}_1|$$

根据 A 的完全单整性和 P 的非奇异性,

$$|\det P| = |\det \bar{A}_1| = 1$$

2. \Rightarrow 3.

先考虑 $Ax + Iy = b$ 的每个基本矩阵 B 有整逆。设 B^{-1} 的第 i 列元素为 \hat{b}_i , 只须证 \hat{b}_i 是整向量。

对于 \hat{b}_i , 取一整向量 t 使 $\hat{b}_i + t \geq 0$ 和令 $b(t) = Bt + e_i$, 其中 e_i 是第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的向量。

考虑 $Ax \leq b(t)$ 注意

$$B^{-1}b(t) = B^{-1}(Bt + e_i) = t + B^{-1}e_i = t + \hat{b}_i \geq 0$$

这样 $(x_B, x_N) = (t + \hat{b}_i, 0)$ 是 $S(b(t))$ 的一个极点, 根据 2 它是整的。即 $t + \hat{b}_i$ 为整, 又因 t 是整的, 所以 \hat{b}_i 是整的。

再考虑 A 的任意一个非奇异的方子阵 F 。把 F 补充成下列形式的基本矩阵

$$B = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_1 & I \end{bmatrix}$$

而

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} F^{-1} & 0 \\ -F_1 F^{-1} & I \end{bmatrix}$$

是整的, 所以 F^{-1} 是整的。

3. \Rightarrow 1.

设 F 是 A 的任意非奇异方子阵, 由 3. F^{-1} 是整的。因此由

$$|\det F| \cdot |\det F^{-1}| = |\det FF^{-1}| = 1$$

得出

$$|\det F| = |\det F^{-1}| = 1$$

定理 1 和定理 2 是重要的，据此对于具有完全单整的约束矩阵的 ILP 就可把整的约束去掉化成 LP 来解，得到的最优解自然具有整性。

如何检查 A 的完全单整性呢？

显然其必要条件是它所有元素 a_{ij} 只可能取三种值即 0、+1、-1。

定理 3. $a_{ij}=0, +1, -1$ 的整阵若满足下列条件，则是完全单整的。

1. 在每一列中，非零元素不多于二个。
2. 可以把所有的行分解成这样的二个子集 Q_1 和 Q_2 :
 - (a) 若一列包含两个非零元素且同号，则其所在行分别在 Q_1 和 Q_2 中。
 - (b) 若一列包含两个非零元素且异号，则其所在行在同一个子集中。

证明：（归纳法）

一维子阵显然

假设对于 $\leq k-1$ 阶子阵结论成立

现任取一个 k 阶子阵 c 。

若 c 包含一个零向量，则 $\det c = 0$ 。

若 c 包含仅有一个非零元素的列，则由归纳法假设知 $|\det c|$ 或为 0，或为 1。

最后考虑 c 的每列均含有二个非零元素的情形，由定理的条件 2a 和 2b 有

$$\sum_{i \in Q_1} a_{ij} = \sum_{i \in Q_2} a_{ij}, \quad j=1, 2, \dots, k \quad (3)$$

设 r_i 是 c 的第 i 行向量，则由 (3) 有

$$\sum_{i \in Q_1} r_i - \sum_{i \in Q_2} r_i = 0$$

这表明 c 的行向量是线性相关的，故 $\det c = 0$

一个有向图的关联矩阵是满足定理 3 的条件的，只要令 $Q_2 = \phi$ 。

定理 3 的条件对于完全单整性不是必要的。例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

是完全单整的，但不满足定理 3 的条件。可以证明若在条件 1 下，条件 2 则是必要的。

§1.3 图上一些线性规划的完全单整性

最小费用限容流动问题考虑商品调运问题，从发站集 V_1 ，通过运输网到收站集 V_2 。从每个 $i \in V_1$ 需运出之数量为 a_i ，对 $i \in V_2$ 需调进之数量为 b_i ，从 i 到 j 的运输单价为 c_{ij} ，和线路运输限额为 d_{ij} （可能为无限），问如何调运才能使费用最小？

确切地，用有向图 $G=(V, E)$ 表示网，其中 $V=\{1, 2, \dots, m\}$ 包括 V_1 （发站），

V_2 (中间站), V_3 (收站), 对于每个 $i \in V$ 定义

$$V(i) = \{j | (i, j) \in E\} \text{ 和 } V'(i) = \{j | (j, i) \in E\}$$

用满足

$$\sum_{j \in V(i)} x_{ij} - \sum_{j \in V'(i)} x_{ji} \begin{cases} \leq a_i & i \in V_1 \\ = 0 & i \in V_2 \\ \leq -b_i & i \in V_3 \end{cases} \quad (4)$$

和
$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (5)$$

的数集 $\{x_{ij} | (i, j) \in E\}$ 定义流动。若在 (4) 中都改成等式, 则除 $\sum_{i \in V_1} a_i = \sum_{i \in V_3} b_i$ 外无可行解。

满足 (4) 和 (5) 的流动费用为

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V(i)} c_{ij} x_{ij} \quad (6)$$

于是问题就成为在 s, t (4) 和 (5) 下求 (6) 的最小。

若 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_1)$ 是 G 中的循环, 则或

(i)
$$c_{i_1 i_2} + c_{i_2 i_3} + \dots + c_{i_k i_1} \geq 0 \text{ 或}$$

(ii)
$$\min\{d_{i_1 i_2}, d_{i_2 i_3}, \dots, d_{i_k i_1}\} < \infty$$

因否则在这循环上流动足够多次可使费用小于任意数。

若 a_i, b_i 和 d_{ij} 是整的, 欲证明 (4) 和 (5) 的每个基本解是整的。

一些特殊情形

1. 无限容的情形, 即对所有 $(i, j) \in E, d_{ij} = \infty$, 有时称它为移动问题。

2. 运输问题, 即 $V_2 = \phi$ 和当 $i \in V_1$ 时, $V'(i) = \phi$, 当 $i \in V_3$ 时, $V(i) = \phi$ 。可写

成

$$\begin{aligned} \min \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V(i)} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j \in V(i)} x_{ij} \leq a_i \quad i \in V_1 \\ \sum_{j \in V'(i)} x_{ji} \geq b_i \quad i \in V_3 \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad \text{所有 } (i, j) \in E.$$

3. 分配问题, 当 (7) 中 $a_i = b_i = 1, d_{ij} = \infty$ 和 $|V_1| = |V_3|$ 的特殊情形, 因 $|V_1| = |V_3|$, 所以约束只能取等号。可写成

$$\min \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V(i)} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V(i)} x_{ij} &= 1 \quad i \in V_1 \\ \sum_{j \in V'(i)} x_{ji} &= 1 \quad i \in V_3 \\ x_{ij} &\geq 0, \text{ 所有 } (i, j) \in E \end{aligned} \quad (8)$$

分配问题中其实可用 $x_{ij}=0, 1$ 代替 $x_{ij} \geq 0$, 然而因 (10) 的所有基本解是整的, 所以分配问题可用 $LP(10)$ 来解。

4. 最大流动问题, 在 (4)、(5) 和 (6) 中, $V_1 = \{1\}, V_3 = \{m\}, V'(1) = \phi, V(m) = \phi, a_1 = \infty, b_m = 0$, 容量限制成为本质的因素。

当 $i \in V'(m)$ 时, $c_{im} = -1$, 其余 $c_{ij} = 0$ 。

最大流动问题可写成

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V'(m)} x_{im} \\ \sum_{j \in V(i)} x_{ij} - \sum_{j \in V'(i)} x_{ji} &= 0 \quad i \in V_2 = \{2, \dots, m-1\} \\ 0 \leq x_{ij} &\leq d_{ij} \quad (i, j) \in E \end{aligned} \quad (9)$$

5. 最短路程问题

把 c_{ij} 解释为棱 (i, j) 的长度, 路的长度定义为所含棱之长度和。目的是找从顶点 1 至顶点 m 的路中最短者。这是在假设所有循环都具有非负的长度的前提下。本问题相当于移动问题中 $V_1 = \{1\}, V_3 = \{m\}, a_1 = 1, b_m = 1$ 的特殊情形。

完全单整性的证明

定理 4. 相应于 (4) 和 (5) 的约束矩阵是完全单整的。

证明: 设约束矩阵是 $A' = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$, 其中 A 是关于 (4) 的矩阵, I 是关于 (7) 的关联矩阵。在定理 2 的证明中证明了 C 的完全单整性蕴涵着 (C, I) 的完全单整性, 而完全单整阵的转置显然亦是完全单整的, 于是只须去建立 A 的完全单整性。

每个变量 x_{ji} 实际出现在 (4) 的二个约束中, 特别在顶点 i 处 x_{ij} 的系数为 $+1$, 在顶点 j 处 x_{ji} 的系数为 -1 , 这样 A 就是一个有向图的关联矩阵, 因此满足定理 3 的条件。

推论 关于移动、运输、分配、最大流动, 和最短路程问题都是完全单整的。

作为定理 4 的结果和它的推论, 所有流动问题都可用单纯形法来求它们的整解, 然而对于解它们实际用的图定向法比单纯形法更有效。这里仅讨论最短路程问题的算法, 因它被用于某些 ILP 算法中。

§ 1.4 最短路程问题的一个算法

仅考虑 $C_{ij} \geq 0 (i, j) \in E$ 的情形, 在有向图中找从顶点 1 到顶点 m 的最短路。

定义 $\theta(i)$ 是从顶点 1 到顶点 i 的最短路之长, $i=2, \dots, m, \theta(1)=0$. 设 (j_1, j_2, \dots, j_m) 是 $(1, 2, \dots, m)$ 的一个交换, 使 $j_1=1$ 和

$$0 = \theta(j_1) \leq \theta(j_2) \leq \dots \leq \theta(j_m)$$

算法是这样构造, 叠代 $K-1$ 次确定 j_K 和 $\theta(j_K)$, 当 $j_K=m$ 时过程结束, 一般的步为

设 $S_K = \{j_1, j_2, \dots, j_K\}$, $R_K = V - S_K$ 和对所有 $i \in R_K$

$$d_K(i) = \begin{cases} \min_{j \in S_K} (\theta(j) + C_{ji}) & \text{若存在 } (j, i) \in E \\ \infty & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

和
$$d_K(i^*) = \min_{i \in R_K} d_K(i) \quad (11)$$

算法是基于下面的定理

定理 5. $d_K(i^*) = \theta(i^*)$ 和 $j_{K+1} = i^*$.

证 明: 由构造即知, $d_K(i^*) \geq \theta(i^*)$. 假若 $d_K(i^*) > \theta(i^*)$ 成立, 于是有最短路 $P = (1, l_1, \dots, l_q, i^*)$, 且至少有一顶点 $\in R_K$, 设属于 R_K 的最小的一个是 l_q , 于是

$$P' = (1, l_1, \dots, l_q)$$

根据 (11)

$$d_K(i^*) \leq d_K(l_q) \leq P' \text{ 的长} \leq P \text{ 的长} = \theta(i^*)$$

这和假设矛盾.

同理可得 $\theta(i^*) \leq \theta(i)$ 对所有 $i \in R_K \therefore i^* = j_{K+1}$

由 (10) 和定理 5 就有叠代算法

$$S_K = S_{K-1} \cup \{j_K\} \quad d_K(i) = \min\{d_{K-1}(i), \theta(j_K) + C_{Ki}\}$$

算法:

第一步 置 $K=1, S_K = \{1\}, R_K = \{2, \dots, m\}, d_K(1) = 0, d_K(i) = C_{1i}$, 若 $(1, i) \in E$, 否则 $d_K(i) = \infty$. 置 $P(i) = 1$ 对所有 $i \neq 1$, ($P(i)$ 是用来指示最短路(的棱) 转二

二、置 $d_K(i^*) = \min_{i \in R_K} d_K(i)$. 若 $i^* = m$ 令 $R_{K+1} = R_K - \{i^*\}$ 和转三.

若 $i^* = m$, 令 $\theta(m) = d_K(i^*)$ 和转四.

三、对所有 $i \in R_{K+1}$ 置

$$d_{K+1}(i) = \min\{d_K(i), d_K(i^*) + C_{i^*i}\}$$

若 $d_{K+1}(i) = d_K(i^*) + C_{i^*i}$ 置 $P(i) = i^*, K = K+1$ 和回到二.

四、理出最短路, 设 $j = P(i^*)$ 和 (j, i^*) 就是最短路中的棱. 若 $j=1$ 終了, 若 $j \neq 1$ 转五.

五、置 $i^* = j$ 和回到四.

§ 1.5 图的匹配和复盖

给定一无向图 $G = (V, E)$ 和子集 $S \subseteq E$. 定义顶点 i 对于 S 的度

$d_S(i) = S$ 中与 i 相连的棱的数目

若对所有 $i \in V$ 有 $d_M(i) \leq 1$ 则称子集 $M \subseteq E$ 为 G 的匹配。

每个图至少含有一个空集的匹配。

在这一节中不失一般性地设 G 是连通的，否则可把本节的结果应用于 G 的成分上。

匹配 M^* 若满足

$$|M^*| = \max\{|M|, M \text{ 是匹配}\}$$

则称为最大匹配。

一般地设 C_j 是分配给棱 e_j 的重量，和定义匹配的重量为，

$$W(M) = \sum_{e_j \in M} C_j$$

对所有的匹配 M 则满足 $W(M^*) \geq W(M)$ 的匹配 M^* 称为最大重量匹配。

更一般地设 b_i 是正整数，对所有 $i \in V$ 满足 $d_M(i) \leq b_i$ 的 M 称为 $b = (b_1, \dots, b_m)$ 匹配。

设 c 和 x 是 $|E|$ 维向量，其中 c_j 是 e_j 的重量和

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{若 } e_j \text{ 在 } b\text{---匹配中} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

找一个最大重量 b ---匹配问题是一个 ILP:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ Ax \leq & b \\ x \text{ 二元} \end{aligned} \tag{12}$$

其中 A 是 G 的关联矩阵。当 $b = (1, 1, \dots, 1)$ 时，(12) 就是最大重量匹配问题。若再加上 $c = (1, 1, \dots)$ 即为最大匹配问题。

例图 4

关于图 4 的 ILP (12) 是

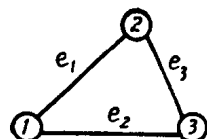


图 4.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \end{aligned} \tag{13}$$

以 $x_i \geq 0$ 代替 $x_i = 0, 1$ 相应的 LP 的唯一最优解是 $x_1 = x_2 = x_3 = 1/2$ 和最优基本矩阵是

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

而 $|\det B| = 2$ 。

这例说明匹配问题的约束矩阵不一定是完全单整的。但可以证明相应于匹配问题的 LP 的所有基本可行解 x_i 一定是取值 0, 1/2 或 1。和 $|\det B| = 2^K, K = 0, 1, \dots$ 。

双枝图 (Bipartite graph) 上的匹配

定义 若存在集 V_1 和 V_2 满足

$$V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \phi \quad (14)$$

以及对任意 $e = (i, K) \in E$ 均有 $i \in V_1, K \in V_2$, 则称图 $G = (V, E)$ 为双枝图。

对于双枝图, (12)的矩阵 A 是完全单整的, 因关于顶点集的分类 (14) 等同于定理 3 中行的分类。

可把分配问题解释为双枝图上的重量匹配问题。

复盖问题

定义 棱的子集 C 若对于任意 $i \in V$ 均有 $d_c(i) \geq 1$, 则称 C 为 $G = (V, E)$ 的复盖。

若 $|C^*| = \min\{|C|, C \text{—复盖}\}$, 则称复盖 C^* 是 G 的最小复盖。

相应地有最小重量复盖, 最小 (重量) b —复盖的概念。

最小 b —复盖问题可写成 ILP

$$\begin{aligned} \min & cx \\ Ax & \geq b \\ x & \text{二元} \end{aligned} \quad (15)$$

在 $b = (1, \dots, 1)$ 和 $c = (1, \dots, 1)$ 的简单情形中, 复盖和匹配之间有密切的关系:

定理 6. 设 c^* 是一最小复盖, 对于每个有 $d_{c^*}(i) > 1$ 的顶点, 去掉 $d_{c^*}(i) - 1$ 根与它相联的棱, 所剩之棱集 M^* 即为最大匹配。

证明: $\because d_{M^*}(i) \leq 1$

$\therefore M^*$ 是一匹配, 下证是最大

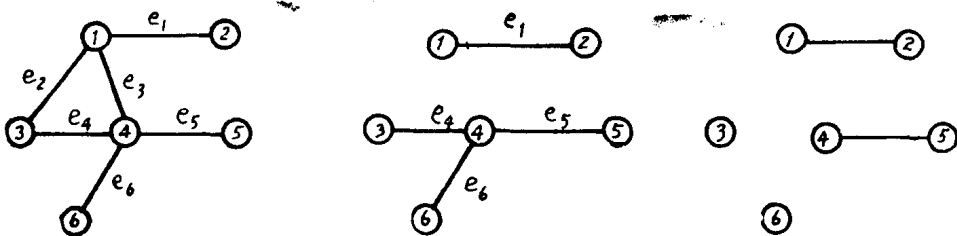
假设共去掉 P 根棱, 于是 $|M^*| = |C^*| - P$, 因原来的 C^* 是最小, 故去掉了 P 个棱就一定有且仅有 P 个顶点是 $d_{M^*}(i) = 0$ 。

若 M^* 不是最大, 即存在一个匹配 M' , $|M'| = |C^*| - P + 1$, 在匹配中多一根棱就会减少二个 $d(i) = 0$ 的顶点。 $\therefore d_{M'}(i) = 0$ 的顶点只有 $P - 2$ 个, 于是在 M' 的基础上对 $P - 2$ 个 $d_{M'}(i) = 0$ 的顶点再加上一个棱就得到一个复盖 C' , 而

$$|C'| = |M'| + (P - 2) = |C^*| - 1 < |C^*|$$

这和 C^* 为最小矛盾。

例



最小复盖 C^*
图 5.

最大匹配 M^*

类似地可以证明

定理 7. 设 M^* 是一个最大匹配, 在 $d_{M^*}(i)=0$ 的每个顶点加一与之相连的棱就构成一个最小复盖。

由上述两个定理, 最大匹配和最小复盖问题只需讨论其中之一, 下面我们讨论最大匹配的求法, 为此先引进增广路的概念。

定义 对于 $S \subseteq E$, 若一简单路其棱交错属于 S 和 $E-S$, 则称这路是相对于 S 的交错路。

定义 设匹配 M , 及 $d_M(i)=d_M(K)=0$, 则把连接 i 和 K 的及相对 M 是交错的路称为相对于 M 的增广路。

增广路必包含奇数根棱。

由相对于匹配 M 的增广路就可以得到一个新的匹配 M' , 且 $|M'|=|M|+1$ 。

定理 8. 一个匹配 M 是最大的充要条件是不存在相对于 M 的增广路。

证明: 必要性

假设存在增广路 $p=(e_1, e_2, \dots, e_{2K+1})$ 。

设 $M'=M \cup \{e_1, e_3, \dots, e_{2K+1}\} - \{e_2, e_4, \dots, e_{2K}\}$ 显然 M' 是一匹配且 $|M'|=|M|+1$ 。这和 M 是最大匹配相矛盾。

充分性

假设存在一个匹配 M^* , 使 $|M^*|=|M|+1$ 。

设 $D=(M \cup M^*) - (M \cap M^*)$

下面证明 D 包含一条相对于 M 的增广路。

D 和 D 所相连的 G 中的顶点构成一个子图 $G^*=(V^*, D)$ 。设 $G'=(V', D')$ 是 G^* 的一个成分。因为 D' 中的棱不是属于 M^* 就是属于 M , 而 M, M' 都是匹配, 所以 V' 中的顶点至多和 D' 的二条棱相连, 因此 G 只能是下图所示的情形:

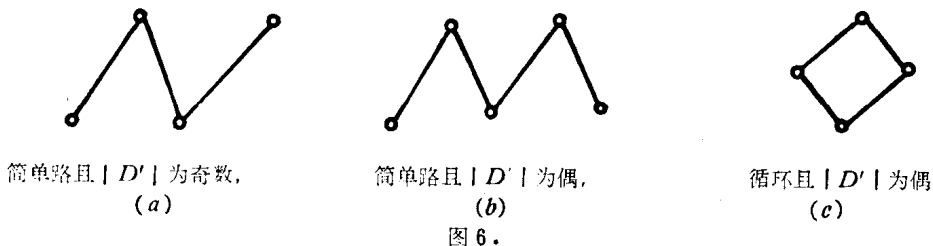


图 6.

即若 $|D'|$ 为奇数, 则一定是简单路, 而且必然是相对于 M 或 M^* 的增广路。

由于 $|D|=|M|+|M^*|-2|M \cap M^*|$, 所以 $|D|$ 是奇的, 因此一定有 G 的成分是包含奇数根棱。又因 $|M^*|=|M|+1$, 所以可以更进一步肯定一定有属于 M^* 中的比属于 M 中的多一根棱的成分, 据上分析, 这个成分是简单路且二端点均属于 M^* , 故是 M 的一条增广路。这和条件相矛盾。

根据定理 8, 就可用找增广路的办法来求最大匹配。求增广路的办法在小图形中可用视察法。一般找增广路的办法还需下面一些新的概念。

定义 包含奇数根棱的循环称为奇循环。

奇循环在说明匹配问题的 ILP 和相应的 LP 之间的关系以及关于增广路的求法时是

重要的。

定理 9. 图 G 是双枝的充要条件是 G 中不存在奇循环。

证明：必要性显然。

充分性

对于连通 i 和 j 的路 P 定义 $d_{ij}(P) = P$ 的棱数。设 $d_{ij} = \min(d_{ij}(P))$ (P ——连通 i 和 j 的路)。选择 $i^* \in V$ 和定义

$$V_1 = \{i^*\} \cup \{K | d_{i^*K} \text{——偶}\}, V_2 = V - V_1$$

若 G 不是二枝的, 则存在 $e_K = (i, j)$, i, j 都属于 V_1 或 V_2 。不妨设 $i, j \in V_1$ 。考虑路 P_{ji^*} 和 P_{i^*i} 如下图

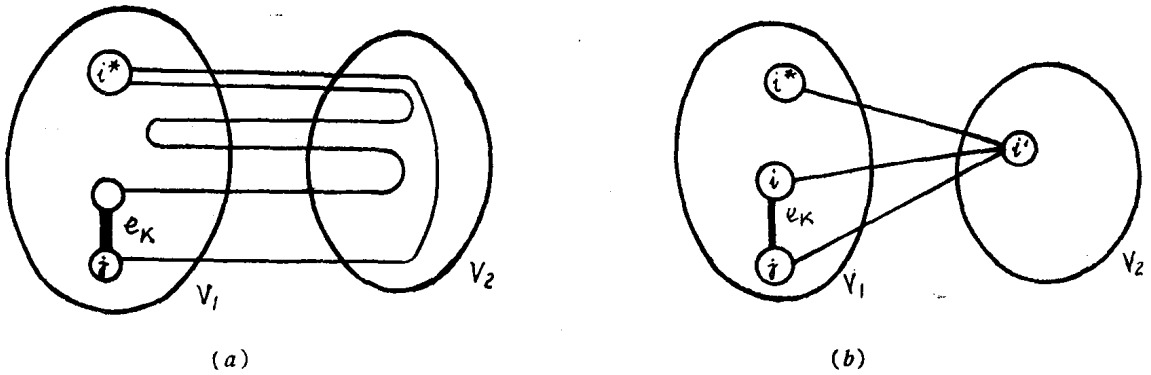


图 7.

若这两条路除 i^* 外无公共顶点, $C = (e_K, P_{ji^*}, P_{i^*i})$ 就是一个奇循环。假设 P_{ji^*} 和 P_{i^*i} 在 i' 处交叉, 现考虑 $i' \in V_2$ 的情形 ($i' \in V_1$ 同理可证) 如图 7 (b)

路 $C' = (e_K, P_{ji^*}, P_{i^*i})$ 是 G 中的一个循环, 再证其是奇的, 注意 $P_{i^*i} = (P_{i^*i'}, P_{i'i^*})$ 和 $P_{ji^*} = (P_{ji'}, P_{i'j^*})$ 。因 $i' \in V_2$ 所以 $d_{i^*i'}$ 是奇的, 于是 $d_{ji'} = d_{ji^*} - d_{i^*i'}$ 和 $d_{i'i'} = d_{i^*i} - d_{i^*i'}$ 都是奇的。

总之, 假设 e_K 存在和条件是矛盾的。

定理 9 指出用线性规划解匹配问题中的困难是由 G 中的奇循环引起的。若 $(e_1, e_2, \dots, e_{2K+1})$ 是一个奇循环, 其顶点序列是 $(i_1, i_2, \dots, i_{2K+1}, i_1)$, 相应于 $i_j, j=1, 2, \dots, 2K+1$ 由

$$x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_{2K+1}^0 = \frac{1}{2} \quad (16)$$

满足 (12) 的约束。但 (16) 蕴涵着

$$\sum_{j=1}^{2K+1} x_j^0 = K + \frac{1}{2}$$

然而每个匹配最多从具有 $2K+1$ 个棱的奇循环中取用 K 根, 即具有 $b = b^0 = (1, 1, \dots, 1)$ 的 (12) 的每一个可行整解满足

$$\sum_{j=1}^{2K+1} x_j \leq K \quad (17)$$

其中 $(e_1, e_2, \dots, e_{2k+1})$ 是一奇循环。约束 (17) 可以排除在奇循环中的棱取 $1/2$ 的解。但却又可能产生新的分数极点。

例 图 G 的关联矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G 中有二个奇循环: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ 和 (e_2, e_3, e_6)

$$Ax \leq b^0 \quad b^0 = (1, 1, \dots, 1)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

$$x_2 + x_3 + x_6 \leq 1$$

$$x \geq 0$$

有一基本可行解 $x = (2/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ 。

设 $E(V') = \{e_j | e_j \text{---} \text{关连着 } V' \text{ 中二个顶点, } V' \subseteq V\}$, 考虑约束

$$\sum_{e_j \in E(V')} x_j \leq K \quad (18)$$

其中 $|V'|$ 是奇的, 和 $K = (|V'| - 1)/2$ 。每个匹配显然满足约束 (18) 且约束 (18) 蕴涵约束 (17), 我们可以用约束 (18) 来消除奇循环的影响。

下面介绍一个用增广路和奇循环概念的最大匹配的算法, 它比用单纯形法解线性规划

$$\begin{aligned} & \max cx \\ & Ax \leq b \\ & \sum_{e_j \in E(V')} x_j \leq \frac{(|V'| - 1)}{2} \quad \text{所有 } |V'| > 1 \text{ 是奇的 } V' \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

更有效。

§ 1.6 最大匹配的一个算法

这个算法的基点是针对一已有的匹配 M 去寻找一关于 M 的增广路或说明不存在, 具体的是对顶点进行特殊的标记, 标记的办法如下。

定义 若 $d_M(i) = 0$ 则称顶点 i 相对于 M 是暴露的。

标记有两个分量组成:

$$L(i) = (L_1(i), L_2(i))$$

$L_1(i)$ 是符号, 或+或-, $L_2(i)$ 是顶点的编码。一个暴露顶点 i_0 仅能标成 $(+, i_0)$ 。对于不是暴露的顶点 i^* 当它和已标记的顶点 i' 邻接时才能标记, 标记的规则为 $L(i^*) = (-L_1(i'), i')$ 。