高等代数、线性代数

上

1979

福州师专数学科

上 册 目 录

第一章 多 项 式

1. 用g(x)除f(x)，求商式q(x)与余式r(x)

1）$f(x)=x^3-3x^2-x-1$，$g(x)=3x^2-2x+1$

解

$$
\begin{array}{r|l|l}
3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\
\hline
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14x}{9}-\frac{7}{9} & \\
\hline
 & \qquad -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} &
\end{array}
$$

因此 $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$ $\qquad r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$。

2）$f(x)=x^4-2x+5$ $\qquad g(x)=x^2-x+2$

解 $q(x)=x^2+x-1$ $\qquad r(x)=-5x+7$

2. m、p、q适合什么条件时，有

1）$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$

解 设$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$则必须$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(x-q)$展开右式并与左式比较，可得

$$m=q \quad 且q^2+p+1=0$$

2）$x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$

解 设 $x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$ 则必须 $x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(x^2+ax+q)$其中a是未知常数。展开右式并与左式比较，可知

$$\begin{cases} m+a=0 \\ q+ma+1=p \\ mq+a=0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

消去（1.1）中的 a，则得

$$\begin{cases} mq-m=0 \\ q-m^2+1=p \end{cases} \qquad (1.2)$$

解方程组（1.2）得，当$m \neq 0$时 $q=1$，$p=2-m^2$，当$m=0$时$p=q+1$。

3. 用综合除法求商式q（x）与余式r（x）

1）$f(x)=2x^5-5x^3-8x \qquad g(x)=x+3$。

解　以$x+3$除$2x^5-5x^3-8x$作算草

$$\begin{array}{cccccc|l} 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 & -3 \\ \hline 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & -327 & \end{array}$$

则　$f(x)=(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)(x+3)-327$

即　$q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$

$r(x)=-327$

2）$f(x)=x^3-x^2-x \qquad g(x)=x-1+2i$

解　$q(x)=x^2-2ix-5-2i \qquad r(x)=-9+8i$

4. 用综合除法把f(x)表成$x-x_0$的方幂和，即

$C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots$

1）$f(x)=x^5 \qquad x_0=1$

解　用综合除法

$$\begin{array}{cccccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\ 1 & 3 & 6 & 10 & & & \\ 1 & 4 & 10 & & & & \\ 1 & 5 & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{array}$$

因此　$f(x)=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2$
$+5(x-1)+1$。

2）$f(x)=x^4-2x^2+3$。　$x_0=-2$

答　$f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24$
$\times(x+2)+11$。

3）$f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$。$x_0=-i$。

答　$f(x)=(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5$
$\times(x+i)+7+5i$

5．求$f(x)$与$g(x)$的最大公因式

1）$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$，
$g(x)=x^3+x^2-x-1$

解

$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	x^3+x^2-x-1	$x^4+x^3-3x^2-4x-1$	x
	$x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$x^4+x^3-x^2-x$	
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$	$r_1(x)=-2x^2-3x-1$	
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$-2x^2-2x$	
	$r_2(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	$-x-1$	
		$-x-1$	
		0	

因此　$(f(x),\ g(x))=1$

2）$f(x)=x^4-4x^3+1$，　$g(x)=x^3-3x^2+1$

解　$(f(x),\ g(x))=1$

3）$f(x)=x^4-10x^2+1$，$g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2$
$+4\sqrt{2}x+1$

解　$(f(x),\ g(x))=x^2-2\sqrt{2}x-1$。

6. 求u(x),u(x)使$u(x)f(x)+u(x)g(x)=(f(x),g(x))$

1) $f(x)=x^4-2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$.

解

$x+1$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	$x^4-2x^3-x^2-4x-2$	1
	$x^4 \quad -2x^2$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	
	x^3+x^2-2x-2	$r_1(x)=x^3-2x$	
	$x^3 \quad -2x$	x^3-2x	
	$r_2(x)=x^2-2$	0	

因此 $(f(x),g(x))=r_2(x)=x^2-2$.

$$\begin{aligned} r_2(x) &= g(x)-r_1(x)g_2(x) \\ &= g(x)-g_2(x)\left(f(x)-g(x)g_1(x)\right) \\ &= -g_2(x)f(x)+\left(1+g_2(x)g_1(x)\right)g(x) \\ &= -(x+1)f(x)+(x+2)g(x). \end{aligned}$$

即 $(f(x),g(x))=-(x+1)f(x)+(x+2)g(x)$.

2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^3+5x+9$.

$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

解 $u(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$. $v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$

$(f(x),g(x))=x-1$

3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$. $g(x)=x^2-x-1$

解 $u(x)=-x-1$. $v(x)=x^3+x^2-3x-2$.

$(f(x),g(x))=1$.

7. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$, $g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 t、u的值.

解 因为 $f(x)=g(x)+(1+t)x^2+(2-t)x+u$

设 $(f(x), g(x))$ 是一个二次多项式，故得：

$$(f(x), g(x)) = x^2 + \frac{2-t}{1+t}x + \frac{u}{1+t}$$

则有

$$g(x) = x^3 + tx + u = \left(x^2 + \frac{2-t}{1+t}x + \frac{u}{1+t}\right)$$

$\times[x+(1+t)]$

展开右式并与 $x^3 + tx + u$ 比较，可知

$$\begin{cases} t^2 + t + 3 = 0 \\ u = 2t^2 - 2. \end{cases} \tag{1.3}$$

解方程组（1.3）得

$$\begin{cases} t = \dfrac{-1+\sqrt{11}\,i}{2} \\ u = -7+\sqrt{11}\,i \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} t = \dfrac{-1-\sqrt{11}\,i}{2} \\ u = -7-\sqrt{11}\,i \end{cases}$$

8. 证明 如果 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，且 $d(x)$ 为 $f(x)$，与 $g(x)$ 的一个组合，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

证 已知 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，所以 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式。

又设任一多项式 $\varphi(x)$ 满足：$\varphi(x)\mid f(x)$，$\varphi(x)\mid g(x)$ 即有：$f(x) = \varphi(x)f_1(x)$，　$g(x) = \varphi(x)g_1(x)$。

由 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，可设

$$d(x) = u(x)\ f(x) + v(x)\ g(x)$$

$u(x)$，$v(x)$ 是 $p[x]$ 上的多项式，因此

$$d(x) = [u(x)f_1(x) + v(x)g_1(x)]\ \varphi(x)$$

就是说 $\varphi(x)\mid d(x)$。因此 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

9. 证明 $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$（$h(x)$ 的首项系数为 1）

证　设　$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),\ g(x))$

则有　$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=(f(x)g(x))h(x)$

所以　$(f(x)h(x),\ g(x)h(x))\mid(f(x),\ g(x))h(x)$

显然　$(f(x),\ g(x))h(x)\mid f(x)h(x)$，和$(f(x),$
$g(x))h(x)\mid g(x)h(x)$

因此　$(f(x),\ g(x))h(x)$是$f(x)h(x)$与$g(x)h(x)$的一个最大公因式。

又　$(f(x),\ g(x))$和$h(x)$首项系数都是等于1，即有

$$(f(x)h(x),\ g(x)h(x))=(f(x),\ g(x))h(x)$$

10. 如果$f(x)$，$g(x)$不全为零。证明

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\ \frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$$

证　因为$f(x)$，$g(x)$不全为零，所以$(f(x),g(x))\neq0$。

可设　$(f(x),\ g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

则有
$$\frac{u(x)f(x)}{(f(x),g(x))}+\frac{v(x)g(x)}{(f(x),g(x))}=1.$$

因此
$$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1.$$

11. 证明　如果$f(x)$，$g(x)$不全为零，且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),\ g(x))$$

那么　$(u(x),\ v(x))=1$。

证　因为$f(x)$，$g(x)$不全为零，所以$(f(x),g(x))\neq0$。

由上题知：

$$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}u(x)+\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}v(x)=1$$

因此　$(u(x),\ v(x))=1$。

12. 证明　如果$(f(x),\ g(x))=1$，$(f(x),\ h(x))=1$，

那么　$(f(x),\ g(x)h(x))=1$。

证　因为$(f(x), g(x))=1$，$(f(x), h(x))=1$

可设　$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$　　(1.4)

$u_1(x)f(x)+v_1(x)h(x)=1$　　(1.5)

(1.4)×(1.5)可得：

$(u(x)f(x)+v(x)g(x))(u_1(x)f(x)+v_1(x)h(x))=1$

即　$(uu_1f+vv_1g+uv_1h)f+(vv_1)gh=1$。

因此　$(f(x), g(x)h(x))=1$。

13．设$f_1(x)$，…，$f_m(x)$，$g_1(x)$，…，$g_n(x)$ 都是多项式且 $(f_i(x), g_j(x))=1$ $(i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n)$

那末　$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x))=1$

证　反复应用第12题，可得

$$(f_1(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$$

而　$(g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x), f_1(x))=(f_1(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$

同理　$(g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x), f_i(x))=1$ $(i=1,2,\cdots,m)$

于是，再次反复应用第12题，可得

$$(g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x), f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x))=1$$

即有$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$

14．证明　如果$(f(x), g(x))=1$。那么$(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$。

证　因为$(f(x), g(x))=1$，可设

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

所以　$(u(x)-v(x))f(x)+v(x)(f(x)+g(x))=1$

则有　$(f(x), f(x)+g(x))=1$　　(1.6)

同理　$(g(x), f(x)+g(x))=1$　　(1.7)

应用12题结果于(1.6)(1.7)式则$(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$。

15．求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式

分解

解　在复数范围内，求 $x^n-1=0$ 的根。

$$x_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+\sin\frac{2\pi k}{n}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

因此　$x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)$

在实数范围内，因为 $\overline{x}_j=x_{n-j}$　$(0<j<n)$

所以，当 n 是偶数时

$x^n-1=(x+1)(x-1)\left[x^2-(x_1+x_{n-1})x+1\right]\cdot\left[x^2-(x_2+x_{n-2})x+1\right]\cdots\left[x^2-(x_{\frac{n-2}{2}}+x_{\frac{n+2}{2}})x+1\right]$

当 n 是奇数时

$x^n-1=(x-1)\left[x^2-(x_1+x_{n-1})x+1\right]\left[x^2-(x_2+x_{n-2})x+1\right]\cdots\left[x^2-(x_{\frac{n-1}{2}}+x_{\frac{n+1}{2}})x+1\right]$

（注：对任一复数Z，$Z+\overline{Z}$ 是实数）

16．求下列多项式的公共根

$f(x)=x^3+2x^2+2x+1\quad g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$

解　先用转辗相除法求得

$$(f(x),\ g(x))=x^2+x+1$$

因此，$f(x)$，$g(x)$ 的公共根即 $(f(x),\ g(x))=x^2+x+1=0$ 的根。

$$x_1=-\tfrac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad x_2=-\tfrac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

17．判别下列多项式有无重因式

1）$f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

解　$f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$

由计算知　$(f(x),\ f'(x))=(x-2)^2$

因此　$f(x)$ 有 $x-2$ 的三重因式

2）$f(x)=x^4+4x^2-4x-3$。

解　　$f'(x)=7x^3-8x-4$

由计算知　$(f(x),\ f'(x))=1$

因此，$f(x)$无重因式。

18．求 t 值使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$有重根。

解法 1．设$f(x)$有重根a，则有

$$f(x)=(x+a)^2\left(x-\frac{1}{a^2}\right)$$

即　$$x^3-3x^2+tx+1=x^2+\left(2a-\frac{1}{a^2}\right)x^2+\left(a^2-\frac{2}{a}\right)x-1 \qquad (1.10)$$

比较(1.10)两边同次幂的系数，得

$$\begin{cases} 2a-\dfrac{1}{a^2}=-3 \\ a^2-\dfrac{2}{a}=t \end{cases}$$

解方程组，得$t_1=3$，$t_2=3$，$t_3=-\dfrac{15}{4}$，因此当$t=3$或$-\dfrac{15}{4}$时　$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根。

解法 2．为了使$f(x)$有重根，则必须$(f(x),\ f(x))\neq 1$，而 $f'(x)=3x^2-6x+t$。

由$f(x)$和$f'(x)$辗转相除，得

$\dfrac{3x}{2\left(\frac{t}{3}-1\right)}-\dfrac{14}{4\left(\frac{t}{3}-1\right)}$	$3x^2-6x+t$	x^3-3x^2+tx-1	$\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
	$3x^2+\frac{3}{2}x$	$x^3+2x^2+\dfrac{t}{3}x$	
	$-\dfrac{15}{2}x+t$	$-x^3+\frac{2}{3}tx-1$	
	$-\dfrac{15}{2}x-\dfrac{15}{4}$	$-x^2+2x-\frac{1}{3}t$	
	$t+\dfrac{15}{4}$	$2\left(\dfrac{t}{3}-1\right)x+\left(\dfrac{t}{3}-1\right)$	

由此可知　$r_1(x)=2\left(\frac{t}{3}-1\right)x+\left(\frac{t}{3}-1\right)$，当$t=3$时，$r_1(x)=0$则 $(f(x),\ f'(x))\neq1$，$f(x)$有重根。同样地$r_2(x)=t+\frac{15}{4}$，当$t=-\frac{15}{4}$时$r_2(x)=0$则 $(f(x),\ f'(x))\neq1$。$f(x)$有重根。

19. 求多项式x^3+px+q有重根的条件。

解　$f'(x)=3x^2+p$。利用辗转相除法，计算

$\frac{9}{2p}x-\frac{27q}{4p^2}$	$3x^2+p$	x^3+px+q	$\frac{1}{3}x$
	$3x^2+\frac{9q}{2p}x$	$x^3+\frac{p}{3}x$	
	$-\frac{9q}{2p}x+p$	$\frac{2}{3}px+q$	
	$-\frac{9q}{2p}x-\frac{27q^2}{4p^2}$		
	$p+\frac{27}{4p^2}q^2$		

由上式可知，当$p=q=0$时 $(f(x),\ f'(x))=x^2$，此时$f(x)$有三重根$x_1=x_2=x_3=0$。

又当$p\neq0$，$p^3+\frac{27}{4}q^2=0$时 $(f(x),\ f'(x))=p+\frac{3}{2}q$

此时$f(x)$有二重根。

除以上情况外，$(f(x),\ f'(x))=1$。则$f(x)$无重根。

20. 如果 $(x-1)^2|Ax^4+Bx^2+1$ 求 A、B。

解　设　$Ax^4+Bx^2+1=(x-1)^2(ax^2+bx+c)$

展开右式并与左式比较系数。得

$$\begin{cases} A = a \\ -2a + b = 0 \\ B = a - 2b + c \end{cases} \qquad \begin{array}{r} b - 2c = 0 \\ c = 1 \end{array}$$

因此　$c=1$，$b=2$，$a=1$　而$A=1$，$B=-2$。

21．证明　$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$　不能有重根。

证　设$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$有重根$x_0$，显然$x_0 \neq 0$（因为$f(0)=1$）那么$f(x_0)=f'(x_0)=0$。又

$$f'(x)=1+x+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

则有　$f(x_0)-f'(x_0)=\frac{x_0}{n!}=0$　即　$x_0=0$与原设　$x_0 \neq 0$

矛盾，因此　$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$不能有重根。

22．如果a是$f'''(x)$的一个k重根，证明a是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}\left[f'(x)+f'(a)\right]-f(x)+f(a)$$

的一个$k+3$重根。

证　$g(x)=\frac{x-a}{2}\left[f'(x)+f'(a)\right]-f(x)+f(a)$

所以　$g(a)=0$。又

$$g'(x)=\frac{f'(x)+f'(a)}{2}+\frac{x-a}{2}f''(x)-f'(x)$$

所以　$g'(a)=0$。又

$$g''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x) \qquad (1.11)$$

已知a是$f'''(x)$的一个k重根。由(1.11)得a是$g''(x)$的$k+1$重根，现在设a是$g(x)$的n重根。那么a是$g''(x)$的$n-2$重根。则$n-2=k+1$。　$n=k+3$。

23. 证明　x_0是$f(x)$的k重根的充要条件是

$$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0 \quad 而 f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

证　设

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n \tag{1.12}$$

命 $x=x_0$得 $c_0=f(x_0)$ 对（1.12）两边求导后，再取 $x=x_0$得 $f'(x_0)=c_1$ 一般地有 $c_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k=0,1\cdots n)$ $[f^{(0)}(x)=f(x)]$ 所以

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\times(x-x_0)^k+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

1）必要条件. 如果x_0是$f(x)$的k重根. 则x_0是$f'(x)$的$k-1$重根（"$(x-x_0)$"是既约的）由此类推，x_0是$f^{(k-1)}(x)$的$k-(k-1)=1$重根（单根）所以$f^{(k)}(x_0)\neq 0$. 而$f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$

2）充分条件. 如果$f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$，$f^{(k)}(x_0)\neq 0$　由(1.12)　得

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\
&=(x-x_0)^k\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)\right.\\
&\quad\left.+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}\right)\\
&=(x-x_0)^k g(x)
\end{aligned}$$

其中　$g(x_0)=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\neq 0$. 因此$x_0$是$f(x)$的k重根.

24. 举例说明"如果α是$f'(x)$的m重根. 那么α是$f(x)$的

$m+1$重根”是不对的。

解 设 $f(x)=\frac{x^2}{2}-x$ 则$f'(x)=x-1$

取$\alpha=1$，是$f(x)$的1重根，而$\alpha=1$甚至不是$f(x)$的根。

25. 证明 如果$(x-1)\mid f(x^n)$那么$(x^n-1)\mid f(x^n)$。

证 设$f(x^n)=c_0+c_1(x^n-1)+\cdots+c_k(x^n-1)^k$ (1.13)

令 $g(x)=f(x^n)$ 因为$(x-1)\mid f(x^n)$即$(x-1)\mid g(x)$

所以 $g(1)=0$，即有 $f(1^n)=g(1)=0$。得$c_0=0$，因此由(1.13)得$(x^n-1)\mid f(x^n)$。

26. 证明 如果$(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ 那么

$$(x-1)\mid f_1(x) \qquad (x-1)\mid f_2(x)$$

证 设$f_1(x)=a_0+a_1(x-1)+\cdots+a_n(x-1)^n$

$$f_2(x)=b_0+b_1(x-1)+\cdots+b_m(x-1)^m \quad (1.14)$$

因为 $(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，所以可设

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x^3-1)^i+x\sum_{i=0}^{m} b_i(x^3-1)^i=(x^2+x+1)g(x)$$

取 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 则有$a_0=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)b_0$和

$a_0=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)b$。

所以 $a_0=b_0=0$。于是由(1.14)得所欲证。

27. 求下列多项式的有理根

1) $x^3-6x^2+15x-14=0$

解 这方程的有理根只可能是±1，±2，±7，±4用合除法验算可以得到$x=2$是此方程的唯一的有理根。

2) $4x^4-7x^2-5x-1=0$

答 有理根是$-\frac{1}{2}$（二重根）。

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$

答　有理根是-1，-1，-1，-1，3。

28．下列多项式在有理数域上是否可约？

1）x^2+1。

解　因为x^2+1甚至在实数域上也是不可约的（$x^2+1=0$无实根）因此在有理数域上是不可约的。

2）$x^4-8x^3+12x^2+2$。

解　$a_4=1$，$a_0=2$，$p=2$。因为$p\nmid a_4$且$p|a_0$，$p|a_1$，$p|a_2$。$p|a_3$。$p^2\nmid a_0$根据 eisenstein 判别法。这个多项式在有理数域上是不可约的。

3）x^6+x^3+1，　4）x^p+px+1　5）$x^4+4kx+1$

解　3）—5）在有理数域都不可约。因为，整系数多项式$f(x)=x^n+kx^m+1$（$n>m$）如果有一个素数p使得$p|(n, km, a^n+ka^m+1)$但$p\nmid a^n+ka^m+1$则$f(x)$在有理数域上是不可约的。（这里a是任意整数）事实上，取$x=y+a$，那么令$g(y)=f(y+a)=f(x)$。只要证明$g(y)$是不可约的即可。（否则，由$f(x)=f_1(x)f_2(x)$就有$g(y)=f_1(y+a)f_2(y+a)$与$g(y)$不可约矛盾）

$$\begin{aligned}g(y)=f(y+a)&=(y+a)^n+k(y+a)^m+1\\&=y^n+c_n^1y^{n-1}a+\cdots+c_n^{n-1}ya^{n-1}+a^n+ky^m\\&\quad+kc_m^1ya^{m-1}a+\cdots+kc_m^{m-1}ya^{m-1}+ka^m+1\\&=y^n+b_{n-1}y^{n-1}+\cdots+b_1y+a^n+ka^m+1\end{aligned}$$

由　$p|n$，km，所以$p|c_n^ia^j+kc_m^ja^i$（$i=0, 1, \cdots n-1$. $j=0, 1, \cdots m-1$，$c_m^0=c_n^0=0$）因此

$p|b_{n-1}$，b_{n-2}，$\cdots b_1$，a^n+ka^m+1，又$p^2\nmid a^n+ka^m+1$由艾森斯坦因判别法，即得所证。

3）中取$p=3$，$a=1$。　4）中取p为一次项系数，$a=-1$

5）中取$p=2$，$a=1$。

29. 用初等对称多项式表出下列对称多项式

1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$

解 利用恒等变换：

$$x_1^2x_2+x_1^2x_3=x_1(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3$$
$$=x_1\sigma_2-\sigma_3$$

同样地 $x_1x_2^2+x_2^2x_3=x_2\sigma_2-\sigma_3$. $x_1x_3^2+x_2x_3^2$
$=x_3\sigma_2-\sigma_3$

因此，原式$=\sigma_2(x_1+x_2+x_3)-3\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$

2) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$

解 原式$=(\sigma_1-x_3)(\sigma_1-x_2)(\sigma_1-x_1)$

$$=[\sigma_1^2-(x_2+x_3)\sigma_1+x_2x_3](\sigma_1-x_1)$$
$$=\sigma_1^3-(x_1+x_2+x_3)\sigma_1^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\sigma_1-x_1x_2x_3$$
$$=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

3) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$

解 设 $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$的初等对称多项式是 $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 因为

$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=x_1^4x_2^2+\cdots$首项是 $x_1^4x_2^2$. 可知这个多项式是六次对称，所以 $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$的首项是$\sigma_1^{4-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^{0-0}$，依次类推下去$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$中可能出现的项是：

指数组	对应σ的方幂乘积
4 2 0	$\sigma_1^2\sigma_2^2$
4 1 1	$\sigma_1^3\sigma_3$
3 3 0	σ_2^3
3 2 1	$\sigma_1\sigma_2$
2 2 2	σ_3