

# 空气动力学中的数值算法

## 前 言

数值算法是求解空气动力学气流方程（数学方程）的一种古典计算方法。其特点是用一系列数值来表达边界值问题的解。但是，由于计算工作量极为庞大，在高速电子计算机出现以前，根本不可能用它来解决工程设计问题。

近十多年来，航宇工业迅速发展，要求气动力研究工作者寻找一种适于工程计算的气动力定量方法，以弥补过去理论方法的不足，并与风洞试验及其它气动力试验方法相互补充，以满足型号研制的需要。高速电子计算机的发展提供了这种可能性。现代高速电子计算机的运算速率，少则几万，多则几千万，甚至几亿；内存，少则几万，多达十亿。因此，在空气动力学方面，也像其它科学技术部门一样，发生了显著变化，其主要标志是理论计算从定性走向定量。

在使用了电子计算机以后，古典的数值算法又有了新的发展，这就是出现了有限基本解数值算法（the numerical method of finite elementary solutions）简称为基本解方法。国外还称为有限元素法（method of finite elements）、格网法（box method）、旋涡或偶极子栅格法（vortex or doublet lattice method）等等。这种方法是将那些能满足气流方程的、解析形式比较简单的解析函数（简称基本解）叠加起来，以满足任意外形的流动边界条件，从而求得数值解。我们经常采用的基本解有源汇、偶极子、基元旋涡、马蹄涡及涡环等。

数值解，是在解析解的基础上发展起来的，当数值解向纵深发展以后，反过来又对解析理论提出了新的要求，促进基础理论的发展。

在国外，气动力数值算法发展很快，在不到十年的时间里，已可

用来计算整架飞机的亚、超音速压力分布。尽管数值计算方法远比风洞试验便宜，但是今天在新机种的气动力设计中，耗于数值解的费用几乎与风洞试验费用相当。

本译文选包括三类问题：

- ① 计算问题——计算给定外形物体上的气动力；
- ② 设计问题——按照给定的气动力分布求物体形状；
- ③ 最佳化问题——按照给定的约束条件计算最佳气动力分布及物体形状。

其中以第一类为最多，绝大部分是基本解方法，但也有一篇文章介绍了三种方法，也有的论文解决的是个复杂问题，其中某个环节采用了基本解方法。

我们按照毛主席“洋为中用”的教导，选编了本译文选。由于国外数值计算方法的文章很多，因此本译文选并不能反映整个数值计算的全貌。只是将我们能搜集到的1970年以前的文章，选译了一部分，供有关设计、研究单位参考。其中绝大多数译文由1702所安继光同志供稿，又承蒙北航506教研室大力协助，进行校对，我们在此表示感谢。

# 目 录

|                                          |        |
|------------------------------------------|--------|
| 一、任意形状物体的位流计算 .....                      | ( 1 )  |
| 二、亚音速和超音速机翼-机身组合体的分析与设计 .....            | ( 16 ) |
| 三、一种估算刚性及弹性飞机纵向安定导数的方法 .....             | ( 29 ) |
| 四、垂直及短距起落空气动力学中的一种普遍的<br>三元位流方法 .....    | ( 41 ) |
| 五、计算亚音速振动机翼升力分布的偶极子栅格法 .....             | ( 56 ) |
| 六、非线性非定常的二元有升力位流 .....                   | ( 69 ) |
| 七、非线性非定常位流升力问题的数值计算方法 .....              | ( 86 ) |
| 八、二元及三元位流的奇异性方法 .....                    | (102)  |
| 九、低超音速薄翼理论札记<br>第一部分：升力面的设计 .....        | (106)  |
| 第二部分：计算亚音速前缘机翼负荷的数值计算方法 .....            | (120)  |
| 十、超音速气动影响系数法的新发展 .....                   | (127)  |
| 十一、任意平面形状机翼超音速气动特性的计算<br>及最佳化的数值方法 ..... | (141)  |
| 十二、定常和非定常超音速机翼的数值计算<br>第一部分：定常流 .....    | (149)  |
| 十三、定常和非定常超音速机翼的数值计算<br>第二部分：非定常流 .....   | (176)  |
| 十四、定常和非定常超音速气流中的机翼计算方法 .....             | (194)  |
| 十五、超音速挠性飞机对连续紊动的非定常空气动力<br>及动态响应 .....   | (210)  |

|                                       |       |
|---------------------------------------|-------|
| 十六、带或不带襟翼及缝翼的有限厚度翼型的压力分布<br>计算 .....  | (221) |
| 十七、单个、多个翼型及翼栅的绕流分析和<br>设计问题的数值解 ..... | (240) |
| 十八、具有尖角后缘的厚翼型及翼栅的非压缩性气流计算 .....       | (287) |
| 十九、低马赫数翼型剖面阻力的计算 .....                | (297) |
| 二十、翼型阻力极线图的理论计算 .....                 | (311) |
| 二十一、绕翼型的非压缩性分离气流的计算<br>及最大升力的决定 ..... | (318) |
| 二十二、有限元素理论用于飞机外形设计 .....              | (335) |
| 二十三、前飞旋翼诱导速度的动量理论 .....               | (344) |
| 二十四、决定旋翼尾迹几何形状的数值方法 .....             | (364) |

# 一、任意形状物体的位流计算

## 引言及摘要

在最近八年中,发展了一种运用数字电子计算机的极有普遍意义的位流计算方法。这方法在绕流中的物体表面上分布源汇密度,然后根据物体表面上气流的法向速度分量为零的边界条件,解得源汇分布,于是整个绕流就决定了。需要求解的方程是第二类Fredholm积分方程。在发展过程中,这种方法曾被用来解决许多飞机及导弹设计中的问题。文献〔1〕、〔2〕及〔3〕描述了这方面研究的主要问题。本文的目的是摘要讨论本方法的基本概念及某些最新成就,并将计算结果与解析解的结果及实验数据作了比较。

## 问题的数学表达

我们所考虑的问题是绕一个或多个任意物体的无粘性非压缩性无旋气流,在物体表面上,气流的法向速度等于零,或者是已知的。除了已知的物体表面外,气流是不受约束的;而且原始气流——不存在物体时的气流速度场——为已知。这就是一个所谓Laplace方程的Neumann问题,可按下述方式表达成数学形式。

令 $S$ 表示物体的表面, $\vec{V}_\infty$ 表示不存在物体时的气流速度场。在多数场合下,原始气流是均匀的,因而 $\vec{V}_\infty$ 是个常值矢量。图1表示绕经单个物体表面 $S$ 的三元气流。至于多个物体的情况,也不会有重大差别。由于物体表面的存在而引起的扰动速度场,可认为是无旋的,因而把它表示成位函数 $\psi$ 的负梯度。这个函数必须满足三个条件:在 $S$ 外面的 $R'$ 区域内,它必须满足Laplace方程;在无穷远方它应趋近于零;它在表面 $S$ 上的法向导数必须等于原始气流的法向分量。这最后一个条件针对着物体表面上总的法向速度为零的情况;如果不要求为零,则此条件也没有重大变化。这三个条件可用数学符号表达成:

$$\text{在 } R' \text{ 中, } \Delta\psi = 0; \quad (1)$$

$$\text{当 } (x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow \infty \text{ 时, } \psi \rightarrow 0; \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_S = + \vec{n} \cdot \vec{V}_\infty \Big|_S; \quad (3)$$

其中 $\vec{n}$ 是物体表面上朝外的单位法向矢量,如图1所示,而 $n$ 表示沿此法向的距离。Lapl-

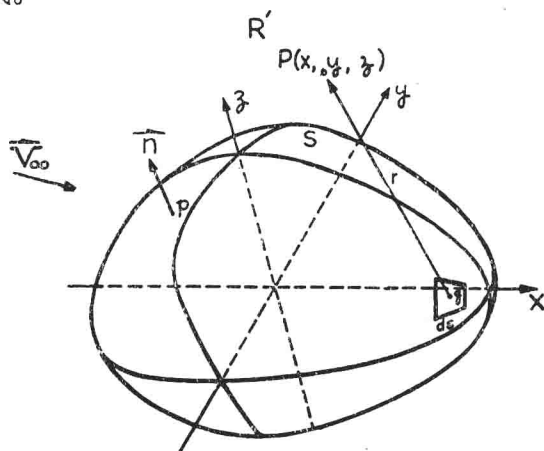


图1 三元物体的绕流

ace 算子用 $\Delta$ 表示。由于因物体而产生的法向速度为 $-\partial\psi/\partial n$ ，所以在(3)式中采用正号。

## 用表面源汇密度分布来代表气流解

在本方法中，气流解被表达成物体表面上源汇密度分布的速度位。因 $q$ 点上的点源而在 $P$ 点上所产生的速度位为 $1/r(P, q)$ ，其中 $r(P, q)$ 是这两点之间的距离。以此类推，分布在表面 $S$ 上的源汇密度分布 $\sigma$ 对 $P(x, y, z)$ 点所诱起的速度位为

$$\psi(x, y, z) = \iint_S \frac{\sigma(q)}{r(P, q)} dS; \quad (4)$$

其中 $q$ 代表表面 $S$ 上的某个点， $dS$ 是表面上的面积微元(图1)。文献<sup>[4]</sup>证明，满足方程(1)、(2)及(3)的函数，确实可表示成(4)的形式。对于任意 $\sigma$ 函数，(4)式所给定的函数同样能满足方程(1)及(2)；这是因为函数 $1/r(P, q)$ 能满足这两个条件的缘故。 $\sigma$ 函数决定于 $S$ 上的边界条件(3)式。在应用方程(3)时，必须对(4)式的法向导数计算出点 $P$ 趋近于表面 $S$ 上的点 $p$ 时的极限值。但是当 $P$ 趋近于 $p$ 时， $1/r(P, q)$ 的法向导数变成奇异的了。<sup>[4]</sup>中指出，应当把<sup>[4]</sup>式中被积函数的法向导数的主值(principal value)提出来，求得紧靠 $p$ 点的表面部分对 $p$ 点法向导数的贡献。 $S$ 的其他部分对 $p$ 点法向导数的贡献是由(4)式的法向导数对表面上 $P=p$ 的积分给出的，这个积分被积为“有限部分”(finite part)。

在文献<sup>[4]</sup>中，给出了(4)式积分的法向导数的主值为 $-2\pi\sigma(p)$ 。因此，将方程(3)应用于(4)式所表达的 $\psi$ 之后，最后得到

$$2\pi\sigma(p) - \iint_S \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r(p, q)} \right) \sigma(q) dS = -\vec{n}(p) \cdot \vec{V}_\infty; \quad (5)$$

这里，我们把向外的单位法向矢量写成 $\vec{n}(p)$ ，为的是清楚地表明它对所在位置的依赖性。原始气流速度 $\vec{V}_\infty$ 可以随也可以不随空间位置而变化。方程(5)是物体表面 $S$ 上的第二类Fredholm积分方程。一旦从这方程解出源汇密度分布 $\sigma$ 后，就可由(4)式求得速度位 $\psi$ ，再由(4)的导数算出沿各坐标轴方向的扰动速度分量。

上述求解方法具有非常普遍的意义。物体表面 $S$ 不一定要是细长的，也不必要求能用解析函数来代表，甚至还不要是联成一片的(即可以同时存在着几个物体)。唯一的限制是， $S$ 的法向矢量 $\vec{n}(p)$ 必须到处连续。这意味着，对于有尖角的物体，本法不能保证得到正确的结果。在实际上，用小半径圆弧去把尖角修圆，就能消除这个困难。下面将会看到，虽然对于凹角，本法有时会产生相当大的误差，但是对于凸角，本法实际上还是给出了很好的结果。原始气流并不只限于均匀的 $\vec{V}_\infty$ ，在保证因物体而引起的扰动速度场为无旋的条件下，它可以是任何的气流。如果原始气流本身是无旋的，当然能满足要求；如果它带有不变的旋度，例如均匀的剪切流，则也显然能满足要求。

上述方法只需考虑物体表面本身，而不必考虑外面的流场；因此，可以把问题的量纲减少一次：三元问题的量纲由三次减为二次，轴对称问题及二元平面问题的量纲由二次减为一次；因为在后两种情况中，(5)式的双重积分可以化简为单重积分。另外，把计算流域由无限的变成有限的。这些都是本方法的优点。

## 求解方法的概况

这个气流计算方法的关键就在于方程(5)的数值解。我们按照下述方法,将积分方程换成一组线性代数方程。用大量的基元面来逼近物体表面;每一个基元面的尺度都比物体的特征长度小得多。在每一个基元面上,假定其源汇密度是常值的。这样,就把求解连续的源汇密度函数 $\sigma$ 的问题简化为对各个基元面求解有限数目的 $\sigma$ 值了。每个基元面对方程(5)中的积分的贡献就是在把未知但为常数的 $\sigma$ 提出积分符号之后,再在基元面上对已知的几何量进行积分。对这近似物体表面上的一个点应用方程(5),也即在该点上要求法向速度等于零或某个预定值,可以得到一个联系各基元面 $\sigma$ 值的线性关系式。在每一块基元面上都选择一个应用(5)式的点,这也就是说选择一个要求法向速度等于零的点。于是,我们得到一组数目与未知 $\sigma$ 值相等的线性方程式。在解出了这组方程后,任意点上的气流速度都可计算出来了——将各基元面对该点的贡献,还有原始气流的贡献都相加起来,就是该点的气流速度。我们通常最感兴趣的是物体表面上的速度及压力。因为在计算时采用了近似的物体表面,所以速度及压力都应取在法向速度等于零的那个点上。

## 物体表面的逼近

图2表示用来逼近各种物体的基元面。三元物体用四边形的平面基元代表,轴对称用截头锥代表,而二元平面物体则用有限线段来逼近。在三元场合下,我们用分布在物体表面上的一系列点的座标来表达一个物体。这些点组成了四边形基元面。对于二元或轴对称物体,只需要用一些点来表达剖面的轮廓曲线。这些点用直的线段联系起来;这种直线段就是无穷长的条状基元面或截头锥在剖面平面内的投影。

对于轴对称的物体表面,气流本身并不一定也对称于同一轴。如果气流也是轴对称的,则全部气流特性都与轴对称的圆周线上的位置没有关系,因而在每个截头锥上,表面的源汇分布是确实保持不变的。在一般情况下,例如绕经带攻角的回转体的气流,也只需认为气流参数按既定的规律随圆周位置而变化;这时,每一个截头锥基元上的源汇密度在轴向是不变的,而在圆周方向则按给定的方式变化。文献<sup>[2]</sup>指明,这种气流的计算要比真正的三元气流简单些。

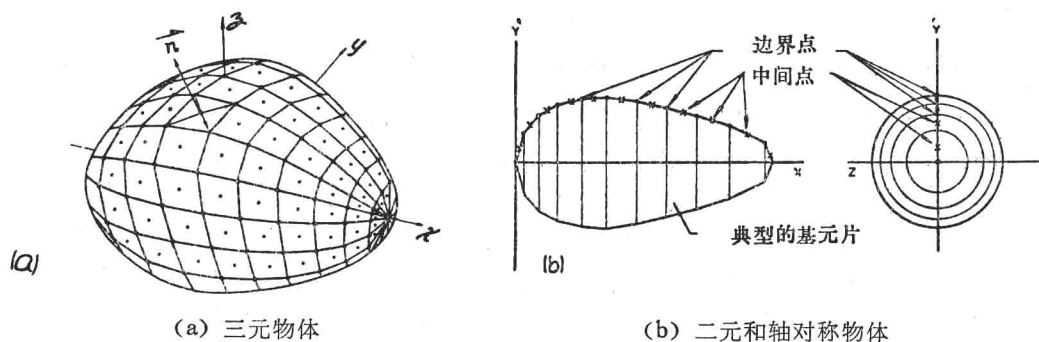


图2 物体表面的近似表达法



在二元及轴对称物体上,相邻基元面的边缘是重合的,但是对于三元物体,就不是这样的了。一般说来,三元物体是不可能用边缘重合的平面四边形基元来予以逼近的。当用平面基元来逼近物体时,因边缘不重合而产生的误差是高级微小量,可以忽略不计。但是对于刚接触到这种方法的人说来,这种相邻基元间存在着小缝隙的情况很使他们感到迷惑。我们应当记住,基元面不过是求得表面源汇分布的一种手段;图2所示的多面体并没有什么直接的物理意义,因为最后所得到的气流并不是绕这多面体的气流。即使相邻基元面的边缘是重合的(例如回转体情况),也不过在每个基元面的一个点上满足法向速度为零的条件,而在基元面的其他地方仍然有穿透气流。另外,不管基元面的边缘是否重合,边缘上的计算速度总是无穷大。我们还可以通过下面的例子来说明缝隙是无关紧要的:对一个轴对称物体计算了基元边缘重合和不重合的两种情况,其结果是几乎完全相同的。采用三角形的平面基元,可以消除相邻基元间的缝隙。但是,这不但没提高精确度,反而降低了精确度,而且还使数字计算机程序的输入大为复杂,以致影响到它在设计工作中的应用。在<sup>[3]</sup>中讨论了采用四边形基元能简化输入和提高精确度。

## 诱 导 速 度

在每个基元上选择一个计算速度及压力的点。对于二元及轴对称物体,把基元线段的中点选作这样的点,也即把确定物体剖面轮廓曲线的相邻点的平均值作为这种点的座标,如图2所示。对于二元物体,这种选择法是很明显(理所当然)的;对于轴对称物体,虽然不很明显,但看起来还算合理。对于三元物体的平面四边形基元,计算点的选择就很不明显了。对于矩形基元,该点应位于中央,但这中央点的定义还有好几种说法。在每一个四边形基元上,可以找到这样一个点:整个基元上的常数源汇密度分布对这个点所诱起的切向速度等于零,也即该基元对该点只诱起法向速度。现在就决定取这个点作为速度及压力的计算点。在近似于矩形的基元面上,这个点位于四边形面积的形心附近,但是在某些四边形上,这两个点相距很远。对于各种物体表面,基元上计算速度及压力的点称为该基元的控制点。

在用适当类型的基元面去逼近物体表面后,把全部基元面用序号1到N编码;N是基元面的总数目。编码的顺序是无关紧要的;编码不过是在计算过程中提取某个基元面的依据罢了。在计算方法中要用到第*i*个基元面和第*j*个基元面,整数*i*及*j*表示一系列基元面中的某两个。

现在假定第*j*个基元面上的源汇密度分布是个常数,并等于1。用 $\bar{V}_{ij}$ 表示第*j*个基元面上的单位源汇密度在第*i*个基元面上的控制点所诱起的速度矢。诱导速度 $\bar{V}_{ij}$ 的公式乃是本气流计算法的基础;将由一个源汇点所诱起的速度公式进行积分,即得 $\bar{V}_{ij}$ 。因此, $\bar{V}_{ij}$ 取决于控制点的位置及基元的几何形状。因为第*i*个基元上的控制点相对于第*j*个基元的位置是任意的,没有什么限制,所以 $\bar{V}_{ij}$ 的计算公式应是一个基元对空间任意一点所诱起的速度。因为诱导速度还依赖于基元的几何形状,所以对于二元物体、轴对称物体及三元物体,其基元类型各不相同,也应具有各不相同的 $\bar{V}_{ij}$ 计算式。更具体些,轴对称情况还能进一步分为气流也是轴对称的和气流并非轴对称,但系由垂直于物体对称轴的均匀主流所产生。前者的源汇密度分布与圆周位置无关,后者却按已知的规律而随圆周位置变化。

诱导速度公式是很冗长的,不在这里列出,可参看<sup>[1、2、3]</sup>。下面扼要讨论它们的性质。

在二元及三元场合下,基元是平面的,因此可用解析法沿基元面进行积分,得出以对数及反正切表示的显式 $\bar{V}_{ij}$ 表达式。当然,可以把二元情况当作三元情况的极限,但从数值计算的角度看来,这样做是不经济的。在三元场合下,为了逼近物体表面,所需要的基元数量非常大,因而采用由直接积分所得出的相当复杂的诱导速度公式,会使计算时间花费得过多。由于这个缘故,我们只当第*i*个基元控制点到第*j*个基元面的距离不超过几个基元面长度时,才采用这种由直接积分得出的公式。对于比较远的控制点,我们采用按多极展开法(multipole expansion)所得到的近似公式。实际上,如果控制点到另一基元面形心的距离大于基元面最大长度的四倍,则可用一个具有同样总强度并位于该基元面形心上的源汇点来代替原来的四边形源汇分布;这样做并不会降低计算方法的总精确度,却会大大降低计算时间。在二元及三元场合下,当*i* = *j*时,也即基元面对它本身控制点所诱导出速度,是不难于计算的。这个诱导速度值为 $2\pi$ ,方向垂直于基元面;参看公式5前面的讨论。

在轴对称物体上,表面上的基元面是截头圆锥,这时不能用解析法求得源汇点对整个基元面所诱起的速度。下面采取这样的做法:首先沿着圆周方向进行积分,求得源汇环所诱起的速度,这是一个完全的椭圆积分。然后再将所得结果沿着基元面在剖面平面(图2)内的截面线段进行数值积分。在数值积分过程中所采用的分段数目随控制点到该基元面的距离的增加而减少。这样就能在不损失总精确度的情况下节省计算时间。对于轴对称基元面,*i* = *j*情况的计算——基元面对它本身所诱起速度的计算——需要特殊处理;由于源汇环表达式的复杂性,这就不可能象二元及三元基元面那样作出预先的计算。计算方法的详情见文献<sup>[1,2]</sup>。这计算方法主要是在控制点上,对被积函数的奇异性进行级数展开。在轴对称气流中,诱导速度有两个分量,一个平行于物体的对称轴,另一个是径向地指向或指离对称轴。在因垂直于对称轴的均匀主流而产生的气流中,表面源汇密度沿圆周方向的变化诱起着附加的切向诱导速度分量。

## 表面源汇密度的线性方程组及求解

以*N*代表逼近物体表面的基元面的总数目,则各个基元面对各个控制点相互的诱导速度 $\bar{V}_{ij}$ 总共有 $N^2$ 个。在这 $\bar{V}_{ij}$ 的计算中,我们认为每个基元面上的常值源汇密度都等于1。第*j*个基元上的单位源汇密度在第*i*个基元控制点上所诱起的法向速度 $A_{ij}$ ,等于 $\bar{V}_{ij}$ 与第*i*个基元面的单位法向矢量 $\bar{n}_i$ 的纯性乘积:

$$A_{ij} = \bar{n}_i \cdot \bar{V}_{ij}. \quad (6)$$

将 $A_{ij}$ 乘上第*j*个基元面上未知的常数源汇密度 $\sigma_j$ ,则就得到因第*j*个基元面而在第*i*个基元控制点上所诱起的实际法向速度;这也就是第*j*个基元对方程(5)中的积分的贡献,这时的方程(5)是建立在第*i*个基元控制点上的。将各个基元面对第*i*个基元控制点的法向速度贡献全部加起来,并使之等于原始气流在这控制点上的法向分量的负值,得到积分方程(5)的一个求和形式的方程。对于所有的控制点都重复一遍这样的过程,最后得到一组求解基元面上源汇密度值的线性代数方程:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \sigma_j = -\bar{n}_i \cdot \bar{V}_{\infty i}, \quad i=1,2,\dots,N; \quad (7)$$

其中 $\bar{V}_{\infty i}$ 是第*i*个基元控制点上的原始气流速度。方程组(7)是方程(5)的近似形式。

如果N小于150, 则可用普通的消去法求解方程组(7)。对于多数二元及轴对称问题, 这么多的基元足以给出很好的精确度。对于某些复杂物体, 特别是多个物体, 基元的数目要求多一些; 至于三元物体, 基元数目就应大大地增多。当N大于150时, 计算机的容量不允许采用直接消去法, 因此必须采用叠代法。由于矩阵 $A_{ij}$ 既不是对称的, 也不是稀疏的, 所以不能采用一般的矩阵叠代技术。实际上, 通常没有一个 $A_{ij}$ 项等于零。但是这个矩阵的对角线项确实起着主要作用。应当提醒一下, 在二元及三元情况下, 对角线项 $A_{ii}$ 正好等于 $2\pi$ 。在轴对称情况下,  $A_{ii}$ 也接近这个数值。在一级近似中, 所有对角线项的总和等于所有非对角线项的总和; 因此笼统地看来, 可以认为每一个对角线项都等于该行上其他各项的总和。对于表面外凸的物体, 所有的项都是正值的, 因此上述关系对于各项的绝对值也同样成立。因为主对角线起着决定的作用, 所以用 Gauss-Seidel 叠代法来求解(7)式是很有效的。在各种场合下, 此法都收敛; 而且除了某些比较极端的物体形状外, 此法通常还收敛得很快。对于典型的不利情况, 二元及轴对称问题要求100次叠代, 三元问题要求50次叠代; 至于正常的情况, 只需上述一半的叠代次数就已收敛了。三元问题的叠代次数较少, 这一方面是因为收敛速率较快, 另一方面也是由于对精确度的要求较低(物体表面的逼近本来就比二元及轴对称情况差些)的缘故。我们曾经研究了加速收敛的方法, 而且行之有效, 但未在本计算方法中实际使用。

#### 速度的计算

在解出了方程(7)后, 即可按下式求得基元控制点上的速度:

$$\vec{V}_i = \sum_{j=1}^N \vec{V}_{ij} \sigma_j + \vec{V}_{\infty i}, \quad (8)$$

$i = 1, 2, \dots, N。$

压力系数则按 Bernoulli 方程求出, 对于均匀的原始气流, 则

$$C_{pi} = \frac{P_i - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} = 1 - \left( \frac{V_i}{V_{\infty}} \right)^2. \quad (9)$$

对于不在物体表面上的点, 只要求得了该点的速度组成部分 $\vec{V}_{ij}$ 后, 也能按(8)及(9)式求出其速度及压力。这个方法特别适合于同时计算几种原始气流, 只要源汇分布的基本形态没有变化就够了, 而这个要求在二元及三元问题中是经常保证的。在计算非定常气流的逐个瞬间流态时及在计算二元升力翼型的气流时, 这个特点显得很有利。

### 最大基元数目及计算时间

用来逼近物体表面的基元面的最大数目主要是在设计程序时由主观决定的, 并没有什么绝对的界限。在二元及轴对称情况下, 基元数目N的最大值为400。在实用上很少需要这样大的数目, 对于大多数情况, 基元数目不超过150就已足够了。带有中心体的进气道及多个翼型是两种要求较多基元面的物体。对于三元物体, 在程序设计中考虑到利用物体的对称面, 因此逼近物体表面的基元面最大数目随对称面的数目而变。对于没有对称面的物体, 基元面的最大数目为675; 对于具有三个对称面的物体, 最大数目可增加到4400。在大多数的应用中, 物体具有一个对称面, 这时最多可采用1300个基元。由于具体程序上的原因, 每一

个对称面使基元数目按小于2的因子增长<sup>[注]</sup>。因为三元情况不象二元及轴对称情况那样，只需逼近一条轮廓曲线，而必需逼近整个曲面，所以实际所需要的基元数目受到最大数目的限制。对于形状不太复杂的单个物体，计算结果很令人满意；但是对于干扰问题，可以采用的基元面数目就显得紧张了。我们准备重排程序，大大增加基元面的数量。

计算时间不仅取决于基元面的数目，而且也随物体的几何形状而变化。粗略地估计起来，可认为诱导速度 $\vec{V}_{ij}$ 的计算及线性方程(7)的求解各占总计算时间的一半。在轴对称问题中，诱导速度计算所花费的时间要多些；而在二元问题中，则要少一些。另外，在不同的计算设备上，上述两部分计算时间的比例变化很大。

采用IBM 7090计算机，对150个基元面的情况进行计算，其总的计算时间为：二元物体，3分钟；轴对称气流中的轴对称物体，5分钟；原始气流垂直于对称轴的对称物体，7分钟。如果采用更多的基元面，并且矩阵叠代过程收敛得很慢，则计算时间可能接近30分钟。上述的时间估计是针对只计算表面速度分布的情况的。如果需要对许多物体外的点计算出气流特性，则计算时间还要增加。当然，三元物体的计算时间要长得多。在IBM 7090上，对接近于最大数目的基元面，典型的计算时间为2到3小时。在某些应用中，有可能大大地减少基元数量；甚至只用15分钟也能得到很有用的结果。

## 与其他方法相比较

普通的气流计算方法都对物体的外形或原始气流的类型有所限制。典型的限制有：物体应当细长，扰动速度很小，或者物体形状必须满足某种解析条件。这些有限制的方法可能对一些物体形状给出很好的结果，但对另一些物体就不行了；并且对于某种给定的物体，也并不是经常能够判别这些方法是否有效。本方法的主要优点是沒有上述限制，所以可以放心地去计算各种形状的物体。下列的一些与实验结果的比较，证明了本方法的优越性。那些有限制的方法也有优点，这就是计算工作量少，并且有时可得出解析型式的解答。但是随着计算机速度的提高，这前一个优点就不突出了。上述的计算时间表明，目前的计算机速度已经掩盖了本方法工作量过大的缺点了。

另一种具有完全普遍性的方法是有限差分法。在这方法中，用速度位在各控制点上的差分值来近似地取代偏微分算子，在目前情况下，也就是Laplace算子。结果得出控制点上速度位的代数方程。控制点通常选为矩形格网的节点，分布在整个流场中。除了邻近边界的控制点外，其他控制点上的代数方程都具有同样的型式。在边界附近，必须利用边界条件来把边界里面的虚控制点上的速度位与边界外面的相邻控制点上的值联系起来。有限差分近似法有一些普遍的优点，例如，它适用于任何偏微分方程。对于Laplace方程，它的优点只不过表现在所求解的线性方程组的矩阵（阶数很高）是稀疏的，因此可以不必进行计算而直接写出结果。在Laplace方程的某些应用中，这些优点超过了本方法的优点；但是由于气流问题的某些特点，本方法又显然是优越的。

气流问题通常都是外部问题，流场扩展到无穷远处，但是我们主要或唯一感兴趣的乃是

---

(注) 如果增长因子为2，则基元的最大数目等于 $N_0 \cdot 2^a$ ，其中 $N_0$ 是沒有对称面时的最大数目， $a$ 是对称面数目——译者。

边界上的解答。本方法的根本优点在于它把气流问题的量纲减少了一个——把速度位的整个定义区缩减到边界上。由此又引出另一个优点，即把求解区域由无穷大缩减到有限范围。这种现象如图 3 所示；该图表示了这两种方法的对应控制点分布。结果在有限差分法中，方程组的阶数要比本方法的大得多，即使它的矩阵是稀疏的，但其计算工作量还是比本方法所需要的大。此外，有限差分法虽能求得物体表面外的气流参数，但通常是沒有或很少有用处的。

气流问题中的边界条件是用速度位的法向导数给定的，而且我们所要求得的是速度位的梯度，并不是速度位本身。这两个因素都会降低有限差分法的精确度。如图 3 所示，物体的表面通常是以任意形式穿过有限差分格网的，这就使得边界条件的应用发生困难；同时也意味着解答在边界上的精确度最低，而这边界上的解答又是我们所最感兴趣的。本方法完全在边界上进行，所以不会出现上述问题。一旦用有限差分法解出了速度位后，必须运用数值微分法来求出梯度，这就会损失精确度。本方法从一开始就直接处理速度问题，因此不会发生上述麻烦。

最后，我们从机翼理论已熟知，边界形状的细部很敏锐地影响着边界上的速度。因此，在气流问题中必须把控制点取得比在其他问题中更密些。这一点增加了本法的优点。

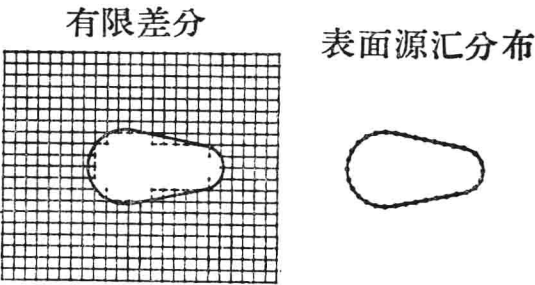


图 3 有限差分法及表面源汇分布法的控制点

### 计算结果与解析解的比较

为了校核本方法的精确度，我们对许多具有解析解的例子作了计算。这些例子中的大多数都是有均匀的原始气流。在所有的二元情况中——不管是有升力还是无升力的，以及在所有的轴对称情况中——不管是轴对称气流还是横向气流，解析解与计算解完全相同（在作图的精确度范围内）；其中只有大升力下的特殊物体形状才是个例外。上述情况是在普通的基元数目下得到的。如果采用最大基元数目，则可在第四位数字上得到一致。因为这样的一致性经常超过作图所能表现出来的精确度，所以这里只用一个例子来说明本方法所能处理的最复杂物体外形（与解析结果相比较）。图 4 表示一个 10% 厚度的椭圆柱体的计算及解析结果比

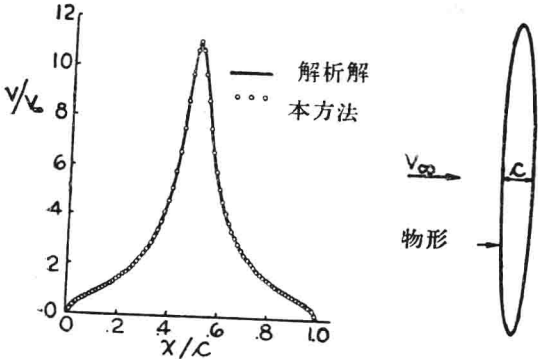


图 4 长轴垂直于原始气流的 10% 厚度椭圆柱上的速度分布

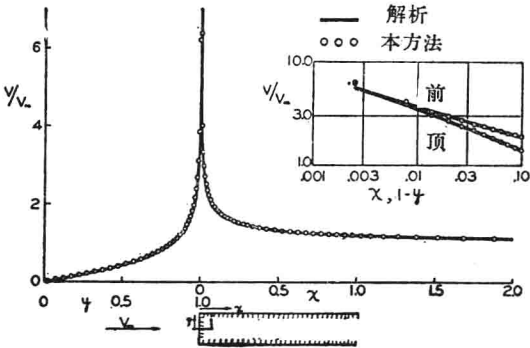


图 5 矩形横截面的半无穷长二元物体上的速度分布  
小图表示转角附近速度分布的对数座标图

较（椭圆的长轴垂直于原始气流），最大速度比为 11。

在(5)式后的讨论中提到过，对于外形轮廓上有转角的物体，本方法不一定成功。但是如图 5 所示，本法对带凸角的物体是很成功的；图 5 表示一个矩形截面的半无穷长二元物体上表面速度分布的计算及解析结果。比较结果是很符合的，即使在转角附近也是如此。因为控制点取在基元的中点，所以得不到转角点上的速度，只能求得离转角点半个基元长度点上的速度。

在二元场合下，基元数目的限制更为严厉，因而虽然计算结果一般还很满意，但在某些情况下，计算结果与解析解的偏差超出了制图精确度。在图 6 中表示了一个典型例子，对一个  $x, y, z$  轴方向的三轴比为  $1:2:1/2$  的椭圆柱体画出了表面速度比分布；对于三种原始气流（沿着  $x, y, z$  三轴的），给出了  $x, z$  平面中物体轮廓曲线上的速度分布。计算结果与解析解看来符合得很一致。

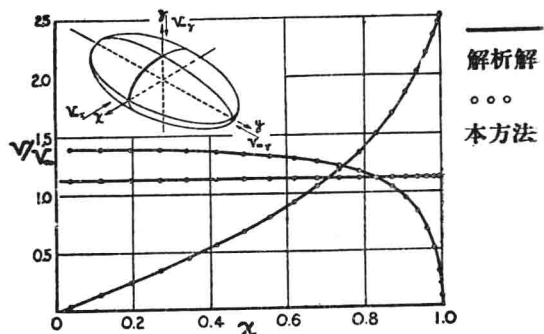


图 6 绕一个三轴椭圆柱体（ $x, y, z$  轴方向的三轴比为  $1:2:1/2$ ）的气流。对三种原始气流方向画出了  $x, z$  平面中的速度分布

## 计算结果与实验数据的比较

将计算速度及压力与实验数据相比较，不仅能决定这位流计算法的效果如何，而且也能决定位流近似与实际的粘性可压缩气流之间的差别。比较结果是很令人兴奋的。从下列例子可以看出，如果气流是完全亚音速的，并且没有气流分离区，则计算结果与实验配合得很好。

**钝头凸包物体。**——图 7 表示一个凸包轴对称物体的剖面形状，这是一个扁长的回转体，上面带有环状凸包。将〔5〕中的表面速度比的实验值与本方法的计算结果，还有〔6〕中常用方法的计算结果作了比较。这个例子表明，非普遍性的方法有可能出现意料不到的失败。〔6〕中的方法不能表现出凸包的影响。但是本计算方法却能很好地反映出速度分布上的几次波动。

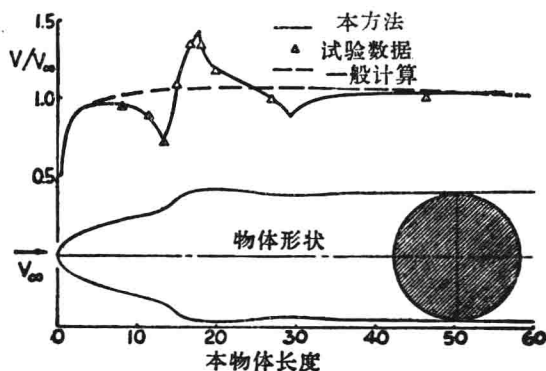


图 7 凸包回转体上的速度分布

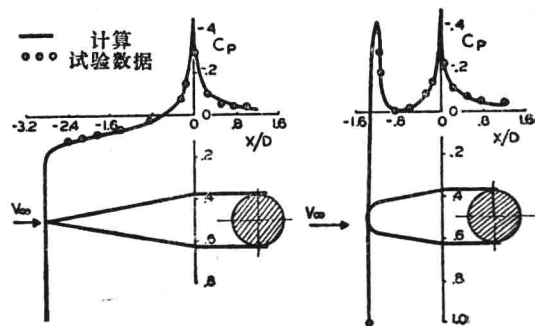


图 8 尖头及钝头锥-柱体上的压力分布



**尖头及钝头的锥-柱体。**——在轴对称锥-柱体的转角处，可能出现粘性效应，因此预期会发生困难。但实际情况却是相反。图8对一个尖头和一个钝头锥-柱体比较了计算与实验的压力分布；看起来甚至在转角附近的一致性也是很好的。钝头锥-柱体的结果表明，在某些情况下，计算出来的压力分布实际上要比实验结果还要好。因为凡是在有实验数据的地方，计算结果总是与实验符合的，因此可以合理地推断，计算出来的前部压力峰值也是正确的。在实验中没有得出这个峰值，这是因为测压孔没有开到正确的位置上。图8中的数据是在 Douglas 飞机公司的低速风洞中测得的。

**处于攻角下的椭球头圆柱体。**——对于带攻角的物体，我们推测气流分离将会使实际气流偏离理想的位流。但是另一方面也推测到，因为小攻角下的压力变化很小，因此近似理论足以估算因攻角而引起的压力变化。为了研究这些推测是否正确，我们用本法及普通的线性横流理论对一组轴对称物体作了计算，它们的实验数据由文献[7]给出。图9表示这些结果中的一个例子。图中的物体是一个椭球-圆柱体，其椭球头部的厚度比为  $1/\sqrt{3}$ 。图上画出了两个轴向位置（25% 头部长度及 100% 头部长度）的圆周压力分布。由实验得出的零攻角压力在每个轴向位置上都是个常数，不随圆周位置而变化；我们将用理论方法算出的攻角压力分布减去这个常数实验值，就得到了图9所示曲线。可以看到，在前面的位置上，因攻角而引起的压力变化是相当大的。用本法算出的压力分布与实验数据符合得很好，并且要比线性理论结果好得多。

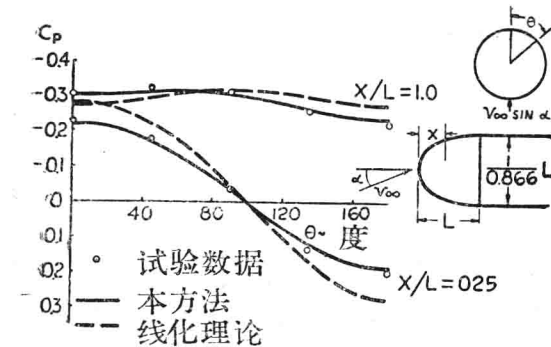


图9 处于攻角下的椭球-柱体的圆周压力分布

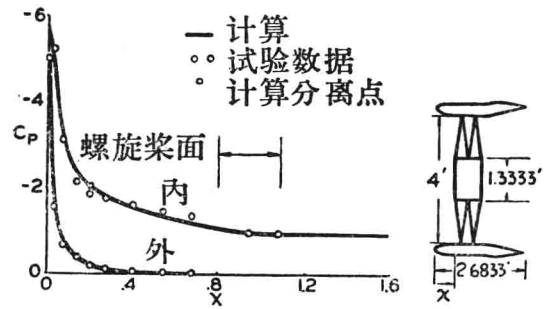


图10 在静态工作条件下，涵道螺旋桨上的压力分布

**在静态工作条件下的涵道螺旋桨。**——本方法曾被大量应用于进气道及涵道螺旋桨的设计中。因为代表着气流不连续的滑流已超出了本方法目前的能力范围，所以暂且把进气道及涵道都当作是半无穷长的。虽然我们准备在将来采取措施弥补这个缺陷，但是目前所得出的结果已很令人满意了。图10对一静态工作条件下的涵道螺旋桨，比较了用本法算出的压力分布与由[8]得到的实验数据；同时也画出了涵道的形状。

值得注意的是，涵道的弦长-直径比(注)相当小，而在计算中忽略不计的螺旋桨桨叶，与涵道相比却显得很大。但是即使如此，除了图中小方点所示的邻近区域外，在涵道前部的内外两面上，计算的及实验的压力分布符合得很好。附面层计算证明，在小方点上气流出现分离，这可能是计算与实验发生偏差的原因。

(注) 原文是弦长-长度比，似有误——译者。

**处于攻角下的进气道**——即使在很小的攻角下，对于一个头部曲率半径很小的进气道，因攻角而引起的压力变化也可能很大。图 11 表示在  $6^\circ$  攻角及两种进气质量流比下，实验压力分布与本法计算结果的比较。进气道是轴对称的，其剖面形状如图 11 所示。压力分布作用在进气道的上表面（背风面）上。为了显示攻角效应的大小，在图上还列出了零攻角下的实验压力分布；计算压力减去这个零攻角压力后得到因攻角而引起的压力变化。我们看到，在较小的质量流比下，本计算方法能正确地给出很大的负压力峰值；在较大的质量流比下，没有负压力峰，但是攻角效应仍然很大。图 11 中的数据取自 Douglas 飞机公司的低速风洞实验。

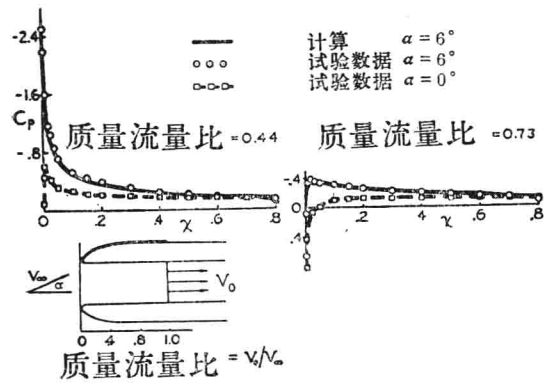


图 11 处于攻角下的进气道，其外唇口上的压力分布

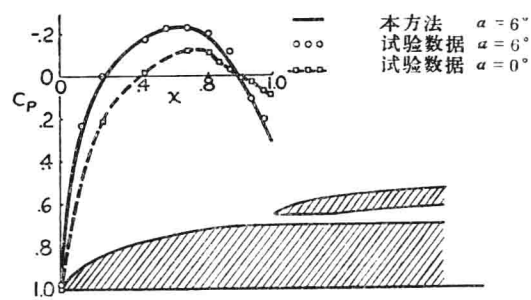


图 12 处于攻角下的位于外罩内的整流体上表面压力分布

**处于攻角下的整流体-外罩。**——作为本法应用于多个物体的一个例子，我们计算了  $6^\circ$  攻角下的位于 NACA1-70-100 外罩内的 NACA1-60-060 整流罩，它们的实验数据可由文献<sup>[9]</sup>得出。这个轴对称布局的剖面形状如图 12 所示，图上还画出了整流体上表面（背风面）的计算及实验压力分布。另外还画出零攻角的实验压力分布，它是被用来求得因攻角而引起的压力变化计算值的。计算压力与实验压力符合得很好。在整流体的前部，因攻角而引起的压力变化是负的，正如一般物体上表面的情况那样。当接近外罩时，外罩的影响逆转了这种效应，并在外罩前端（注）附近，因攻角而引起的压力变化变成正的了。本方法的结果精确地体现了这种相当怪异的趋势。

**零升力对称三角翼。**——作为三元气流的一个例子，我们对一个展弦比为 1.0 的三角形平面形状机翼作了计算。在各个展向位置上，翼剖面形状保持不变，都是 12% 厚度的抛物线翼型。图 13 比较了用本方法算出的零升力等压线及其实验结果。这两种等压线图形是基本相同的。在图 14 中作了更为精细的比较，在三个弦向位置上画出了展向压力分布。实验数据取自<sup>[10]</sup>，从上下表面压力的差值可以估计出实验数据中的误差。计算压力与实验数据间的差

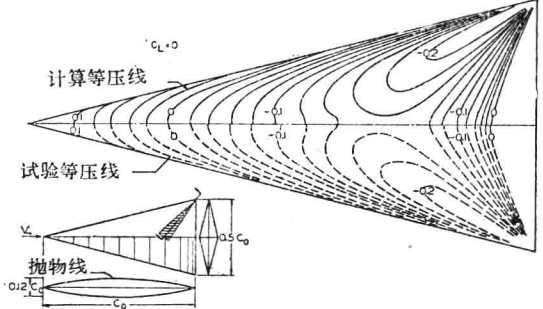


图 13 零升力三角机翼上的等压线  
剖面形状——沿展向不变 展弦比 = 1  
相对厚度——沿展向不变 相对厚度 = 12%

（注）原文是“在外罩后端附近”，似有误——译者。



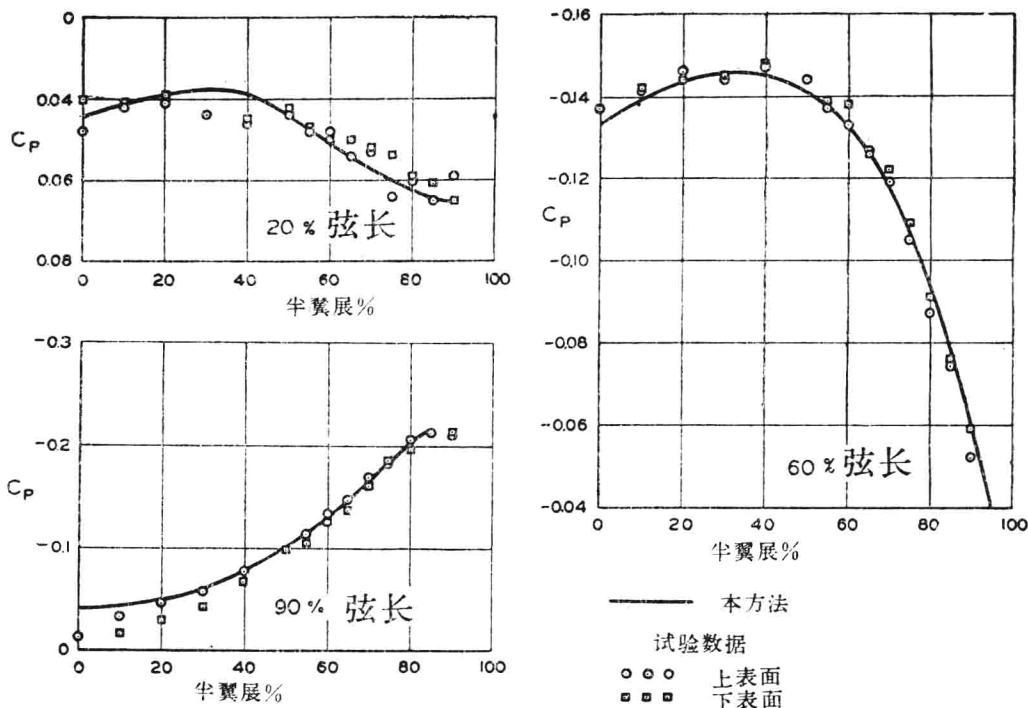


图14 零升力三角机翼的展向压力分布

别小于实验误差。

**高亚音速马赫数下的尖头凸包物体。**在上列各例子中，气流速度很低，故可不计压缩性效应。严格地说来，这是能够采用本法的唯一气流类型。但是我们发现，只要扰动速度不太大，那么本方法也能用来计算全部亚音速气流。这时应先按 Goethert 转换式改变物体的形状，然后计算绕转换物体的非压缩性气流，最后再按已知的规律修正速度分布。图15表示在高亚音速马赫数下，一个带有环状凸包（在最大厚度处）的抛物线回转体上的压力分布。当马赫数为0.8时，气流是完全亚音速的，计算与实验的一致性很好。在两个较高的马赫数下，出现了局部的超音速气流区，它的特点是压力低于临界压力。正如预料的那样，在这些区域中，计算与实验配合得不好。但是甚至在0.95的马赫数上，实验数据已明显地表现出存在着激波的情况中，在气流的亚音速范围内，理论与实验仍然符合得很好。这可能是出于偶然，但却反映了这样的事实，即局部效应对该处流场起着主要的作用。图15中的实验数据取自文献[11]。

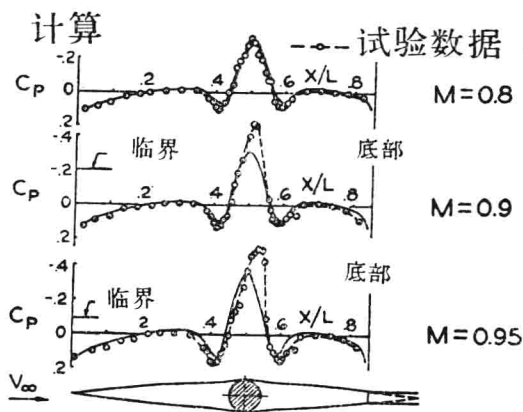


图15 在高亚音速马赫数下，细长凸包回转体上的压力分布

**高亚音速马赫数下的“空雷”导弹。**—— Goethert 转换不适用于钝头物体，因为驻点附近的扰动速度是不小的。如果将本方法用于计算上述马赫数下的钝头体气流，则在驻点附