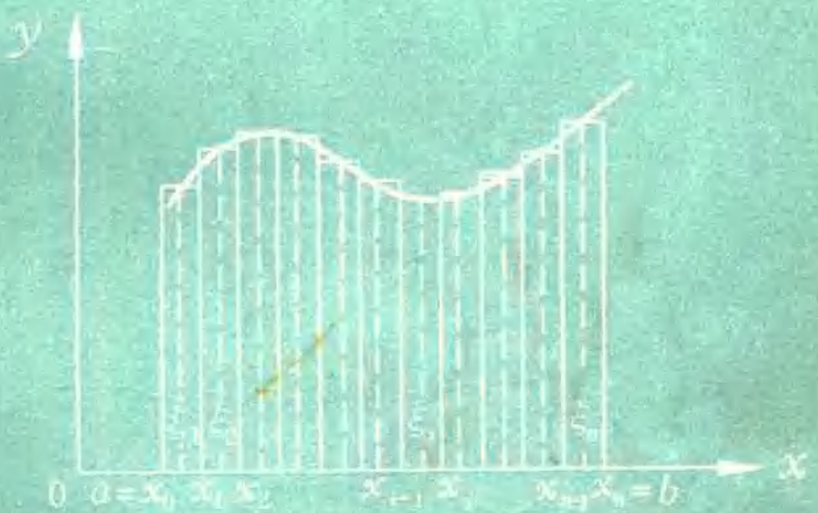
高等数学题解

（下　册）

金延年 张桂芝 黄厚三　编



空军工程学院训练部

高 等 数 学 题 解

下　　　册

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用……………………………………………………（1）
习题　8-1……………………………………………………………………………（1）
习题　8—2……………………………………………………………………………（3）
习题　8—3……………………………………………………………………………（7）
习题　8—4……………………………………………………………………………（11）
习题　8—5……………………………………………………………………………（15）
习题　8—6……………………………………………………………………………（20）
习题　8—7……………………………………………………………………………（24）
习题　8—8……………………………………………………………………………（26）
习题　8—9……………………………………………………………………………（29）
习题　8—10……………………………………………………………………………（31）

第九章　重积分……………………………………………………………………（33）
习题　9—1……………………………………………………………………………（33）
习题　9—2（1）………………………………………………………………………（36）
习题　9—2（2）………………………………………………………………………（44）
习题　9—2（3）………………………………………………………………………（51）
习题　9—3……………………………………………………………………………（55）
习题　9—4……………………………………………………………………………（60）
习题　9—5……………………………………………………………………………（62）
习题　9—6……………………………………………………………………………（69）

第十章　曲线积分与曲面积分……………………………………………………（73）
习题　10—1……………………………………………………………………………（73）
习题　10—2……………………………………………………………………………（74）
习题　10—3……………………………………………………………………………（84）
习题　10—4……………………………………………………………………………（90）
习题　10—5……………………………………………………………………………（92）
习题　10—6……………………………………………………………………………（101）
习题　10—7……………………………………………………………………………（104）

第十一章　无穷级数………………………………………………………………（110）
习题　11—1……………………………………………………………………………（110）
习题　11—2……………………………………………………………………………（114）
习题　11—3……………………………………………………………………………（119）
习题　11—4……………………………………………………………………………（122）
习题　11—5……………………………………………………………………………（125）
习题　11—6……………………………………………………………………………（129）

习题　11—7……(131)
习题　11—8……(135)
习题　11—9……(139)
习题　11—10……(142)
习题　11—11……(146)
第十二章　微分方程……(148)
习题　12—1……(148)
习题　12—2……(149)
习题　12—3……(154)
习题　12—4……(164)
习题　12—5……(171)
习题　12—6……(179)
习题　12—7……(183)
习题　12—8……(190)
习题　12—9……(193)
习题　12—10……(197)
习题　12—11……(206)
习题　12—12……(210)
习题　12—13……(215)

第八章　多元函数微分法及其应用

习　题　8—1

1．已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$。

解 $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-t^2xy\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}=t^2\left(x^2+y^2-xy\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\right)$

$=t^2f(x,y)$。

2．试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$

解 $F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$

$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$。

3．已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$。

解 $f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}$

$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$。

4．求下列各函数的定义域：

（1）$z=\ln(y^2-2x+1)$；　　（2）$z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

（3）$z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$；　　（4）$u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$；

（5）$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　　（6）$z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

（7）$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+r^2}}\ (R>r>0)$；

（8）$u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

解（1）为使函数有意义，必需 $y^2-2x+1>0$

∴　定义域为：$\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$。

（2）必需 $x+y>0$，$x-y>0$，故定义域为：

$\{(x,y)\mid x+y>0,\ x-y>0\}$。

（3）必需 $4x-y^2\geqslant0$、$1-x^2-y^2>0$且$1-x^2-y^2\neq1$，故定义域为：$\{(x,y)\mid 4x-y^2\geqslant0,\ 1>x^2+y^2>0\}$。

（4）必需 $x>0$、$y>0$、$z>0$，故定义域为：

$\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$。

（5）因要 $y\geqslant 0, x^2\geqslant y, x\geqslant 0$，故定义域为：

$\{(x,y)\mid x^2\geqslant y\geqslant 0, x\geqslant 0\}$。

（6）因要 $y-x>0$、$x\geqslant 0$、$1-x^2-y^2>0$，故定义域为：

$\{(x,y)\mid y>x\geqslant 0,\ 1>x^2+y^2\}$。

（7）因要 $R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0$，$x^2+y^2+z^2-r^2>0$（$R>r>0$）故定义域为：

$\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$。

（8）因要 $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2+y^2\neq 0$，故定义域为：

$\{(x,y)\mid x^2+y^2-z^2\geqslant 0,\ x^2+y^2\neq 0\}$。

5．求下列各极根：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；　（3）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；　（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；　（5）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　（6）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$；　（7）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$。

解（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0.1}{0+1}=1$；　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}=+\infty$；　（3）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$；

（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=-\dfrac{1}{4}$；

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy+1-1}=2$；

（6）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y\sin xy}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}=0$；

（7）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2}$，

因 $$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}=1,$$

而 $$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty,$$

故原极限不存在，或

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=+\infty。$$

6. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。

证 利用不等式：$x^2+y^2\geqslant 2xy$

对任给 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=2\varepsilon$，使当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，永远有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\left|\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon。$$

故 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0。$$

7. 证明下列极限不存在：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$； （2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$。

证 （1）当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于（0，0）时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+Kx}{x-Kx}=\frac{1+K}{1-K},$$

显然它是随着 K 的不同而改变的。故极限不存在。

（2）$\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=1$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{x}{2}\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$，

故原极限不存在。

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

解 由于 $y^2-2x\neq 0$，故函数在 $\{(x,y)\mid y^2-2x=0\}$ 处间断。

习　题　8—2

1. 求下列函数的偏导数：

（1）$z=x^3y-y^3x$； （2）$s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$； （3）$z=\sqrt{\ln(xy)}$；

（4）$z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；（5）$z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$； （6）$z=(1+xy)^y$；

（7）$u=x^{\frac{y}{z}}$； （8）$u=\operatorname{arctg}(x-y)^z$。

解 （1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$；

（2）$\dfrac{\partial s}{\partial u}=\dfrac{2u^2v-u^2v-v^3}{(uv)^2}=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2}$， $\dfrac{\partial s}{\partial v}=\dfrac{2v^2u-u^3-uv^2}{(uv)^2}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{u}{v^2}$， （3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{2\sqrt{\ln(xy)}\cdot xy}=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$，利用对称性

有 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}\text{。}$$

（4）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)-2y\cos(xy)\cdot\sin(xy)=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$，利用对称性 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$；

（5）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{y}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$；　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{y}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}$；

（6）取对数有 $\ln z=y\ln(1+xy)$，两边对 x、y 求偏导，故有

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}=y\cdot\frac{y}{1+xy}=\frac{y^2}{1+xy}，\quad \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z}=\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}，$$

即 $$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]；$$

（7）取对数 $\ln u=\dfrac{y}{z}\ln x$，两边对 x、y、z 求偏导数，故有

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{u}=\frac{y}{zx}，\quad \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u}=\frac{\ln x}{z}，\quad \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{u}=-\frac{y}{z^2}\ln x，$$

即 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}，\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x，\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\text{。}$$

（8）$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+[(x-y)^z]^2}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}，$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}，\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}\text{。}$$

2．设 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，求证 $l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=0$，

证 $\because$ $\dfrac{\partial T}{\partial l}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{l}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{lg}}$，$\dfrac{\partial T}{\partial g}=\dfrac{2\pi\sqrt{l}}{-2g\sqrt{g}}=-\dfrac{\pi}{g}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，

故 $$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\frac{l\pi}{\sqrt{lg}}-g\cdot\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}=0\text{。}$$

3．设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$。

证 $\because \frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，由对称性有：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},$$

故 $$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+\frac{y^2}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z。$$

4．设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$。

解 $f_x(x,y)=1+(y-1)\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{xy}}}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$，$\therefore f_x(x,1)=1$。

还可这样计算：$f(x,1)=x$，$\therefore f_x(x,1)=1$。

5．曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$，在点（2，4，5）处的切线与正向 x 轴所成的倾角是多少？

解 设所成角为 α，由偏导数的几何意义，有

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=2\\y=4}}=\frac{x}{2}\bigg|_{\substack{x=2\\y=4}}=1,\ \therefore\ \alpha=\frac{\pi}{4}。$$

6．求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

（1）$z=x^4+y^4-4x^2y^2$；（2）$z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$；

（3）$z=y^x$。

解（1）$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy;$$

（2）$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-1}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

（3）$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\cdot\ln y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\cdot\ln^2 y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\cdot\ln y+\frac{y^x}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1)。$$

7．设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$、$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$。

解 $f_x(x,y,z)=y^2+2xz$，$f_y(x,y,z)=2xy+z^2$，$f_z(x,y,z)=2yz+x^2$，

又 $f_{zz}(x,y,z)=2y$，

故 $f_{xx}(0,0,1)=2z\Big|_{\substack{x=0\\y=0\\z=1}}=2$，$f_{xz}(1,0,2)=2x\Big|_{\substack{x=1\\y=0\\z=2}}=2$，

$f_{yz}(0,-1,0)=2z\big|_{z=0}=0$，$f_{zzx}(2,0,1)=0$。

8．设 $z=x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$。

解 ∵ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+\frac{xy}{xy}=\ln x+\ln y+1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y},$$

∴ $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}。$$

9．验证：

（1）$y=e^{-Kn^2t}\sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t}=K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；

（2）$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$；

（3）$z=\ln(e^x+e^y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)^2=0$；

（4）$u=z\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

证（1）∴ $\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-Kn^2t}\cos nx$，$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-n^2e^{-Kn^2t}\sin nx$

又 $$\frac{\partial y}{\partial t}=-Kn^2e^{-Kn^2t}\sin nx,$$

故 $$\frac{\partial y}{\partial t}=K\cdot(-n^2e^{-Kn^2t}\sin nx)=K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

（2）∵ $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}$，

由对称性有 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{y^2}{r^3}$， $\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{z^2}{r^3}$；

故 $$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{3}{r}-\frac{r^2}{r^3}=\frac{2}{r};$$

（3）∵ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{-e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2},$$

∴ $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)^2=\frac{e^{2(x+y)}}{(e^x+e^y)^4}-\frac{e^{2(x+y)}}{(e^x+e^y)^4}=0。$$

（4）∵ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{y\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right)}=\dfrac{yz}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\frac{-\dfrac{x}{y^2}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=-\frac{zx}{y^2+x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2xyz}{(y^2+x^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

∴ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。$$

习　　题　8—3

1．求下列函数的全微分：

（1）$z=xy+\dfrac{x}{y}$；　　　（2）$z=e^{\frac{y}{x}}$；

（3）$z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　　（4）$u=x^{yz}$。

解（1）$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=\left(y+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(x-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$；

（2）$dz=e^{\frac{y}{x}}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}dy=\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\left(dy-\dfrac{y}{x}dx\right)$；

（3）$dz=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy)$；

（4）$du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\cdot\ln x\cdot dy+yx^{yz}\cdot\ln x\cdot dz$
$=x^{yz-1}(yzdx+xz\cdot\ln x\cdot dy+xy\ln x\cdot dz)$

2．求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1$，$y=2$时的全微分．

解 $\because dz=\frac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\frac{2y}{1+x^2+y^2}dy$,

$\therefore$当 $x=1$，$y=2$时，

$$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy,$$

3．求函数 $z=\frac{y}{x}$当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$时的全增量和全微分。

解 由于 $dz=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y$；$\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}=\frac{x\cdot\Delta y-y\cdot\Delta x}{x(x+\Delta x)}$，

$\therefore$当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$时，

$$dz=-\frac{1}{4}\cdot 0.1-\frac{1}{2}\cdot 0.2=-0.125$$

$$\Delta z\doteq-0.119。$$

4．求函数 $z=e^{xy}$当 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$时的全微分。

解 由于 $dz=ye^{xy}\Delta x+xe^{xy}\Delta y$

故当 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$时，

$$dz=0.25e。$$

5*．计算$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$的近似值。

解 作 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$，则

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$$

$$=\sqrt{x^3+y^3}+\frac{3}{2\sqrt{x^3+y^3}}(x^2\Delta x+y^2\Delta y)$$

取 $x=1$，$y=2$，$\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.03$时，有

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}=f(1.02,1.97)$$

$$\approx 3+\frac{1}{2}(-0.1)$$

$$=2.95。$$

6*．计算 $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$ 的近似值。

解 设 $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$，则

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$$

$$=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)+\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\left(\frac{\Delta x}{3x^{\frac{2}{3}}}+\frac{\Delta y}{4y^{\frac{3}{4}}}\right),$$

取 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.03$，$\Delta y=-0.02$时，有

$$\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)\approx f(1,1)+f'_x(1,1)\Delta x+f'_y(1,1)\Delta y$$

$$=0.01-0.005$$

$$=0.005。$$

7*. 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值。($\ln2=0.693$)

解 作 $f(x, y)=x^y$，则

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x, y)+f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y$$

$$=x^y+yx^{y-1}\cdot\Delta x+x^y\ln x\cdot\Delta y$$

取 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=-0.03$，$\Delta y=0.05$ 时，有

$$(1.97)^{1.05}\approx f(2, 1)+f'_x(2, 1)\Delta x+f'_y(2, 1)\Delta y$$

$$=2-0.03+2\cdot\ln2\cdot0.05$$

$$\approx2.039。$$

8*. 计算 $\sin29^\circ\cdot\operatorname{tg}46^\circ$ 的近似值。

解 作 $f(x, y)=\sin x\cdot\operatorname{tg}y$，则

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x, y)+f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y$$

$$=\sin x\cdot\operatorname{tg}y+\cos x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\Delta x+\frac{\sin x}{\cos^2 y}\Delta y,$$

取 $x=30^\circ$，$\Delta x=-1^\circ=-\frac{\pi}{180}\approx-0.0174$，$y=45^\circ$，$\Delta y=1^\circ\approx0.0174$ 时，有

$$\sin29^\circ\cdot\operatorname{tg}46^\circ\approx f(30^\circ, 45^\circ)+f'_x(30^\circ, 45^\circ)\Delta x+f'_y(30^\circ, 45^\circ)\Delta y$$

$$\approx0.5-0.0174\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0.0174$$

$$=0.5023。$$

9*. 已知边长为 $x=6$ 米与 $y=8$ 米的矩形，如果 x 边增加 5 厘米而 y 边减少 10 厘米，问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 对角线长 $l=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\Delta l\approx dl=\frac{\partial l}{\partial x}dx+\frac{\partial l}{\partial y}dy=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(xdx+ydy)$$

因 $x=6$，$dx=0.05$，$y=8$，$dy=-0.10$，则

$$\Delta l=\frac{6\cdot0.05-8\cdot0.10}{\sqrt{6^2+8^2}}=-0.05$$

即矩形的对角线减少约 5 厘米。

10*. 设有一无盖圆柱形容器，容器的壁与底的厚度均为0.1厘米，内高为20厘米，内半径为 4 厘米，求容器外壳体积的近似值。

解 容器体积 $V=\pi R^2h$，则

$$\Delta V\approx dV=\frac{\partial V}{\partial R}dR+\frac{\partial V}{\partial h}dh=2\pi RhdR+\pi R^2dh,$$

因 $R=4$，$h=20$，$dR=0.1$，$dh=0.1$，故

$$\Delta v\approx\pi\cdot17.6\approx55.3。$$

即外壳体积的近似值为[illegible]立方厘米

11*. 当圆锥体形变时，它的底半径R由30厘米增到30.1厘米，高H由60厘米减到59.5厘米，试求体积变化的近似值。

解 圆锥体的体积$V=\frac{1}{3}\pi R^2H$，则

$$\Delta V=\frac{\partial V}{\partial R}dR+\frac{\partial V}{\partial H}dH=\frac{2}{3}\pi RHdR+\frac{1}{3}\pi R^2dH,$$

因$R=30$，$dR=0.1$，$H=60$，$dH=-0.5$，故

$$\Delta V\approx-30\pi.$$

即体积减少30π立方厘米。

12*. 设有直角三角形，测得其两腰的长分别为7 ± 0.1厘米和24 ± 0.1厘米。试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差。

解 斜边长 $l=\sqrt{x^2+y^2}$，则 l 的绝对误差为

$$\delta_l=\left|\frac{\partial l}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial l}{\partial y}\right|\delta_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(|x|\delta_x+|y|\delta_y),$$

取 $x=7$，$|dx|\leqslant\delta_x=0.1$，$y=24$，$|dy|\leqslant\delta_y=0.1$，则

$$\delta_l=\frac{1}{25}(0.7+2.4)=0.124;$$

即斜边的绝对误差为0.124厘米。

13*. 测得一块三角形土地的两边边长分别为63 ± 0.1米和78 ± 0.1米，这两边的夹角为$60°\pm1°$。试求三角形面积的近似值，并求其绝对误差和相对误差。

解 三角形的面积$S=\frac{1}{2}xy\sin x$，则S的绝对误差为

$$\delta_S=\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial S}{\partial y}\right|\delta_y+\left|\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|\delta_\alpha=\frac{1}{2}(|y\sin\alpha|\delta_x+|x\sin\alpha|\delta_y+|xy\cos\alpha|\delta_\alpha),$$

取 $x=63$，$\delta_x=0.1$，$y=78$，$\delta_y=0.1$，$\alpha=60°$，$\delta_\alpha=1°\approx0.0174$，则

$$S\approx\frac{1}{2}\cdot63\cdot78\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx2128.$$

$\delta_S\approx6.105+21.376\approx27.5$，相对误差为

$$\frac{\delta_s}{S}\approx\frac{27.5}{2128}\approx1.29\%$$

即三角形面积的近似值为2128平方米，绝对误差为27.5平方米，相对误差为1.29%。

14*. 利用全微分证明：两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和。

证 设两数为 x、y，由题意有

$z=x+y$，则 $\delta_z=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y$

而 $\left|\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|=1$，$\left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|=1$，$\delta_x$、$\delta_y$分别为 x、y 的绝对误差。

∴ $\delta_z=\delta_x+\delta_y$。

15*. 利用全微分证明：乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和。

证（1）设两数为 x、y，两数的乘积为

$$z=xy,\ 故\ \frac{\delta_z}{|z|}=\left|\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}\right|\delta_x+\left|\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z}\right|\delta_y,$$

而

$$\left|\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}\right|=\left|\frac{y}{xy}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|,\quad \left|\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z}\right|=\left|\frac{1}{y}\right|,$$

∴

$$\frac{\delta_z}{|z|}=\frac{1}{|x|}\delta_x+\frac{1}{|y|}\delta_y=\frac{\delta_x}{|x|}+\frac{\delta_y}{|y|};$$

（2）设两数为 s、t，两数的商为

$$u=\frac{s}{t},\ 故\ \frac{\delta_u}{|u|}=\frac{\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|}{|u|}\delta_s+\frac{\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|}{|u|}\delta_t,$$

而

$$\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|=\frac{1}{|t|},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|=\left|\frac{s}{t^2}\right|,$$

∴

$$\frac{\delta_u}{|u|}=\frac{1}{|s|}\delta_s+\frac{1}{|t|}\delta_t=\frac{\delta_s}{|s|}+\frac{\delta_t}{|t|}。$$

习　题　8—4

1. 设 $z=u^2v-uv^2$，而 $u=x\cos y$，$v=x\sin y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(2uv-v^2)\frac{\partial u}{\partial x}+(u^2-2vu)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=3x^2\sin y\cos y(\cos y-\sin y)。$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(2uv-v^2)\frac{\partial u}{\partial y}+(u^2-2uv)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-2x^3\sin y\cos y(\cos y+\sin y)+x^3(\sin^3y+\cos^3y)。$$

2. 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\dfrac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u^2}{v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u\ln v\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u^2}{v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3．设 $z=e^{x-2y}$，而 $x=\sin t$，$y=t^3$，求$\frac{dz}{dt}$。

解 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$。

4．设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t$，$y=4t^3$，求$\frac{dz}{dt}$。

解 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$。

5．设 $z=\operatorname{arctg}(xy)$，而 $y=e^x$，求$\frac{dz}{dx}$。

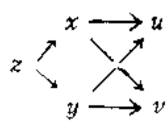
解 $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$。

6．设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x$，$z=\cos x$，求$\frac{du}{dx}$。

解 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=e^{ax}\sin x$。

7．验证函数 $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$，其中 $x=u+v$，$y=u-v$，满足关系式$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$

解 ∵ $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{-v}{u^2+v^2}$，



$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{u}{u^2+v^2},$$

∴ $$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}。$$

8．求下列函数的一阶偏导数（其中 f 具有一阶连续偏导数）：

（1）$u=f(x^2-y^2,\ e^{xy})$；　　（2）$u=f(x^2+y^2-z^2)$；

（3）$u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$；　　（4）$u=f(x,xy,xyz)$。

解（1）为方便引入记号

$$f'_1=\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial\xi},\quad f'_2=\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial\eta}。$$

$\therefore$ $$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'。$$

（2） $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'$， $\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'$， $\frac{\partial u}{\partial z}=-2zf'$。

（3）引入记号

$$f_1'=\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi}, \quad f_2'=\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1', \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2', \quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_2'。$$

（4）引入记号

$$f_1'=\frac{\partial f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi}, \quad f_2'=\frac{\partial f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta}, \quad f_3'=\frac{\partial f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta},$$

$\therefore$ $$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xf_2'+xzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf_3'。$$

9．设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\frac{y}{x}$，$F(u)$ 为可导函数，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy。$$

证 ∵ $$\frac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+F'(u),$$

$\therefore$ $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xF-yF'+xy+yF'=z+xy。$$

10．设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}。$$