

# 计算流体力学基础

周正贵

行政楼

南京航空航天大学



035  
1153



2007057703

035  
11534

1/3 124

## 前 言

计算流体力学是依托于计算机技术，流体力学和计算数学理论并重的综合学科；同时还强调数值计算程序的编制。流体力学研究分为：理论分析、实验研究和数值计算（计算流体力学）三个分支。计算流体力学作为流体力学研究分支中的后起之秀，随着计算机技术的快速发展，在工程实际中应用越来越广泛。虽然理论分析和实验研究具有不可取代性，但可以肯定在未来的研究中数值计算将发挥更大的作用。

本书立足于基础理论和基本方法阐述，并且适当兼顾最新研究成果。全书分为二个部份，第一部份：基本理论，给出微分方程的差分方法及理论分析；第二部份：应用部份，给出差分方法在数值模拟各种流体运动中的应用，并且结合模型流场的计算实例，以加深对理论的理解和编程能力的锻炼。

流体力学数值计算方法有有限差分、有限元、有限分析方法等。有限差分方法是应用比较成功因而也是应用最广泛的方法。本书作为计算流体力学入门教材，内容将仅限于有限差分方法。

本书面向流体力学及相关专业高年级学生，通过本书学习能在今后的实际工作中独立编制一般流场计算程序，或为进一步深造提供基础。



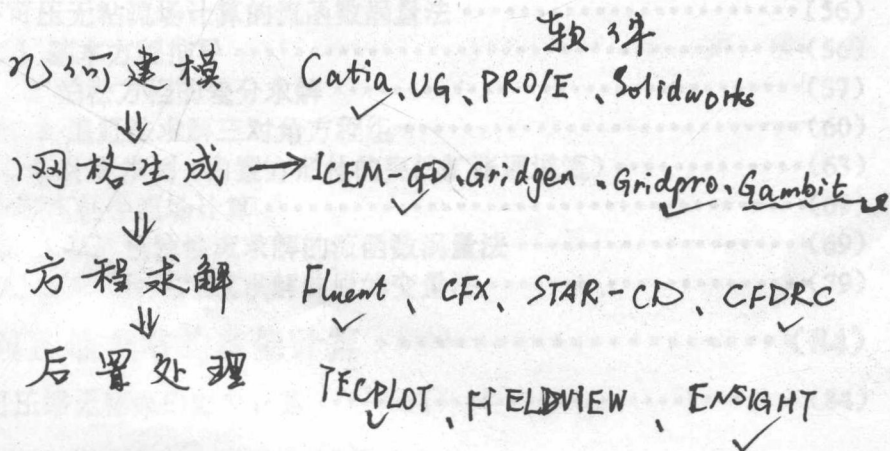
www.cfd-online.com

www.fluid.com

AIMA 协会

CFD: Computational Fluid Dynamics

CFD 一般步骤:



2007057703

# 目 录

|                                    |             |
|------------------------------------|-------------|
| <b>第一章 概 述</b> .....               | <b>(1)</b>  |
| 1.1 计算流体力学的发展及特点简述 .....           | (1)         |
| 1.2 流场数值模拟概念 .....                 | (2)         |
| <b>第二章 流体力学数值计算数学模型及定解条件</b> ..... | <b>(4)</b>  |
| 2.1 可压缩非定常粘性流数学模型 .....            | (4)         |
| 2.2 不可压缩非定常粘性流数学模型 .....           | (5)         |
| 2.3 无粘流数学模型 .....                  | (6)         |
| 2.4 常用的模型方程 .....                  | (7)         |
| <b>第三章 有限差分近似及其数学性质</b> .....      | <b>(13)</b> |
| 3.1 差分格式基本概念 .....                 | (13)        |
| 3.2 常用偏导数项的差分格式和精度分析 .....         | (14)        |
| 3.2.1 一阶偏导数差分格式 .....              | (14)        |
| 3.2.2 二阶偏导数差分格式 .....              | (16)        |
| 3.3 差分方程和相容性 .....                 | (17)        |
| 3.4 差分方程的收敛性 .....                 | (23)        |
| 3.5 差分方程的稳定性及稳定性分析 .....           | (26)        |
| 3.6 差分方程的相容性、收敛性和稳定性的关系 .....      | (39)        |
| <b>第四章 模型方程的常用差分格式</b> .....       | <b>(41)</b> |
| 4.1 对流方程的差分格式 .....                | (41)        |
| 4.2 扩散方程差分格式 .....                 | (43)        |
| 4.3 对流扩散方程差分格式 .....               | (44)        |
| 4.4 计算实例 .....                     | (45)        |
| 4.5 多维问题的几种常用差分格式 .....            | (49)        |
| 4.6 数值效应 .....                     | (53)        |
| <b>第五章 不可压流场的数值计算</b> .....        | <b>(56)</b> |
| 5.1 不可压无粘流场计算的流函数涡量法 .....         | (56)        |
| 5.1.1 基本方程推导 .....                 | (56)        |
| 5.1.2 泊松方程的差分求解 .....              | (57)        |
| 5.1.3 追赶法求解三对角方程组 .....            | (60)        |
| 5.1.4 计算举例(内置方形体的突然扩张通道流) .....    | (63)        |
| 5.2 不可压粘性流场计算 .....                | (69)        |
| 5.2.1 不可压粘性流求解的流函数涡量法 .....        | (69)        |
| 5.2.2 不可压粘性流求解的原始变量法 .....         | (79)        |
| <b>第六章 可压缩流场的数值计算</b> .....        | <b>(84)</b> |
| 6.1 可压缩无粘流的差分计算 .....              | (84)        |

|                |                                 |              |
|----------------|---------------------------------|--------------|
| 6.1.1          | 一维欧拉方程的显示格式 .....               | (84)         |
| 6.1.2          | 多维欧拉方程的显示格式 .....               | (87)         |
| 6.2            | 可压缩粘性流的差分计算 .....               | (88)         |
| <b>第七章</b>     | <b>流场网格生成 .....</b>             | <b>(90)</b>  |
| 7.1            | 贴体坐标 .....                      | (90)         |
| 7.2            | 坐标转换关系 .....                    | (92)         |
| 7.2.1          | 一维坐标转换 .....                    | (92)         |
| 7.2.2          | 二维和三维坐标转换 .....                 | (93)         |
| 7.2.3          | 任意曲线坐标系下的基本方程 .....             | (94)         |
| 7.3            | 网格生成 .....                      | (95)         |
| 7.3.1          | 代数生成方法 .....                    | (96)         |
| 7.3.2          | 微分方程生成方法 .....                  | (98)         |
| 7.3.3          | 计算网格生成实例 .....                  | (101)        |
| <b>第八章</b>     | <b>三维紊流平均流的有限差分计算 .....</b>     | <b>(107)</b> |
| 8.1            | 三维紊流平均流 N-S 方程 .....            | (107)        |
| 8.2            | Baldwin-Lomax 模型的双层代数紊流模型 ..... | (108)        |
| 8.3            | 控制方程的空间离散 .....                 | (109)        |
| 8.4            | 人工粘性 .....                      | (111)        |
| 8.5            | 控制方程的时间离散 .....                 | (112)        |
| 8.6            | 加速技术 .....                      | (113)        |
| 8.6.1          | 局部时间步长 .....                    | (113)        |
| 8.6.2          | 隐式残值光滑 .....                    | (114)        |
| <b>第九章</b>     | <b>流场数值计算的新方法简介 .....</b>       | <b>(116)</b> |
| 9.1            | 多重网格法 .....                     | (116)        |
| 9.1.1          | 迭代法的误差衰减 .....                  | (116)        |
| 9.1.2          | 多重网格法的计算过程 .....                | (118)        |
| 9.2            | 自适应网格 .....                     | (124)        |
| 9.3            | TVD 格式 .....                    | (127)        |
| 9.3.1          | 总变差及其衰减 .....                   | (128)        |
| 9.3.2          | TVD 格式 .....                    | (129)        |
| <b>参 考 文 献</b> | <b>.....</b>                    | <b>(132)</b> |



# 第一章 概述

## 1.1 计算流体力学的发展及特点简述

自从1687年牛顿定律公布直至本世纪五十年代,流体力学研究主要有二种方法,即实验研究和理论分析。实验研究结果真实可靠,是发现流动规律、检验理论和为流体机械设计提供数据的基本手段。实验也有其局限性,对于大尺寸的研究对象(比如飞机),必须制作缩尺模型,严格来说模型流场所有无量纲参数应与真实流动相同,但实际上很难办到,通常只能满足主要而忽略次要。实验还要受测量技术的制约。此外实验周期长、费用高。理论分析方法利用简化流动模型假设,给出所研究问题的解析解,但这种方法只能对一些非常简单的流动问题进行求解。不过理论工作者在研究流体运动规律的基础上建立了各种类型控制方程,奠定了计算流体力学基础。

1946年第一台电子计算机“ENIAC”问世以来,计算机技术迅速发展。计算流体力学作为流体力学研究的另一分支应运而生,并借助于计算机技术而快速发展。二十世纪七十年代至八十年代,由于受计算机内存和速度的限制,仅能对无粘流场和一些简单的二维粘性流场进行数值计算。八十年代后,随着数值模拟实用价值在工程实际中的展示以及计算机技术的进一步发展,吸引了大批研究人员投身于此项工作,构造出很多适合于各种流动情况的数值计算方法。现在工程中的大部份流动问题都可以用计算机进行数值模拟。在航空上比较复杂的流动,比如飞机全机身绕流(外流问题)、航空发动机各零部件三维粘性流场(内流问题)等都可以采用数值计算比较准确地模拟。对于复杂而实验测量较困难的流动问题,比如航空发动机压气机和涡轮转子叶尖间隙区流动,数值模拟还用来部份代替实验探索流动规律。

数值模拟具有耗费小、时间短、省人力等优点,并且还能对实验难以测量的流动进行模拟。因而在工业领域中得到越来越广泛的应用。比如,航空航天、核工业、热能工程、天气预报、海浪和风暴潮预报等。但数值计算所固有的不完善性确定了实验研究和理论分析的不可取代性。

首先,数值计算所涉及的流体力学基本方程都是非线性偏微分方程(组),而目前尚无成熟的非线性偏微分方程数值计算的数学理论,没有严格的稳定性分析、误差分析和收敛性证明方法。其次方程的离散化引进数值粘性和

值弥散等虚假物理现象, 不仅改变了方程的精度而且改变了其性质。再次, 目前的数值模拟还很大程度上受计算机水平(计算机内存和速度)的限制。比如紊流运动, 描述其运动的控制方程为经典的 Navier-Stokes 方程, 但由于流动是三维不定常流、且各种涡的尺度变化较大, 如果要数值模拟这种流动, 需要足够密的网格节点分布。对于  $Re=10^4$  这样中等雷诺数流动, 在 Cray-1 一类的巨型计算机上要花费  $10^4$  小时(约合 416 天) CPU 时间。显然这是不现实的。目前紊流场计算都采用雷诺平均 Navier-Stokes 方程, 注重流动的宏观效应, 而不追求其微观结构。

总之在流体力学领域, 数值模拟和实验研究、理论分析三者互相促进, 任何一种研究方法都不可偏废。但可以肯定, 数值模拟较实验研究和理论分析所占的份量将越来越大, 这一趋势是确定的。

## 1.2 流场数值模拟概念

流场数值模拟也叫流场计算机模拟, 是计算流体力学的核心内容。它是计算机为手段, 通过数值计算以数据和图像显示, 再现研究对象及其内在规律。数值模拟也可以理解为用计算机来做实验。比如一个机翼绕流, 通过计算可得到其升力、阻力数值, 由图形显示可看到流场的各种细节: 绕流流线, 激波的位置、强度, 流动分离, 涡的生成与传播等。实际上作为连续介质的流体运动是一个无限的信息系统, 而计算机的内存以及所能表示的数位都是有限的。数值模拟是在流场中按一定规律排列有限个点(这些点叫网格节点)用这些离散点上的信息近似表示整个连续流场。

流场数值模拟可分为以下几个步骤:

首先要根据流动特点和所要达到的目的, 建立适当的数学模型, 即控制方程。仍以机翼绕流为例, 如果只要计算机翼的升力则可用 Euler(欧拉)方程, 如果还要知道其阻力情况则必须采用 Navier-Stokes(纳维尔-斯托克斯)方程。此外还要给出相应的定解条件(初始和边界条件)。

数学模型建立后, 接下来是要寻求高效率、高精度的计算方法。所谓高效率指的是计算速度快, 所耗费的计算机时间少。计算方法包括微分方程的离散方法及求解方法, 同时还包括边界条件的处理方法等。目前有很多计算方法, 计算方法的选择要依据于具体所要计算的流场特点。对于一些简单的流动问题, 比如叶片通道内无粘流场计算, 根据目前的计算机水平, 所占用计算机机时很



少，精度将是首先考虑的因素。又如处于大攻角状态机翼绕流，有较大的吸力面分离，首先必须考虑计算方法对大流动分离的适用性。

在确定了计算方法后，开始编制、调试计算机程序和进行计算。这部份工作是整个工作的主体，占绝大部份时间。计算程序通常包括三个部份：流场计算网格生成、流场计算和计算结果后处理。一个大型计算程序编制和调试是一个非常严密的过程，要求研制人员有扎实的理论基础，同时还要有一定的经验积累和技巧。一个上万条语句（可能包括超过十万个字符）程序，如果其中有一个字符错误，则整个程序无法运行或运行后得不到正确结果。计算结果后处理是根据计算所得各网格节点上的流动参数数值进一步计算出所需的结果，比如对于一个翼型绕流，可根据翼型表面网格节点上的压力分布计算出翼型升力；以及采用图形软件将计算结果形象地显示出来，比如翼型表面压力分布图、翼型绕流流线图等。图 1.1(a)所示为一涡轮叶片通道内三维粘性流场计算边界网格线分布；图 1.1(b)为中径处的计算叶片表面压力分布与实测值比较，由图可看出计算与实测值吻合的很好。

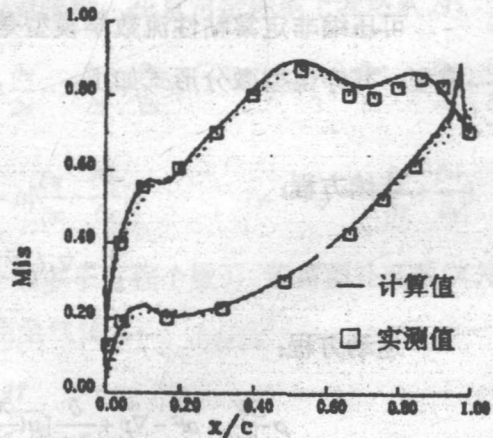
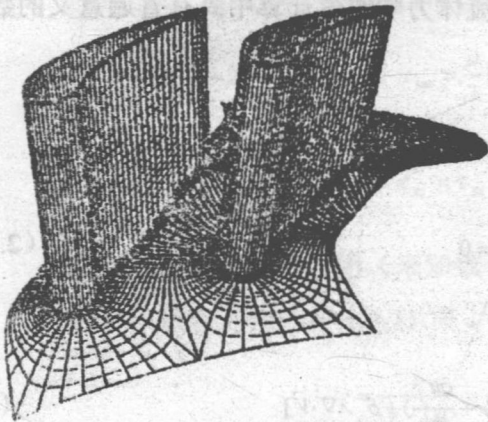


图 1.1(a) 涡轮叶片通道边界网格线

图 1.1(b) 计算叶片表面压力分布与实测值

## 第二章 流体力学数值计算数学模型及定解条件

本章所涉及的流体力学数值计算数学模型包括流体力学基本方程和用于理论研究的简化模型方程。它们是数值计算的理论基础。在前面所学的流体力学课程中对流体力学基本方程已作了详细论述，其基本出发点是：质量守恒、动量守恒和能量守恒定律。在此着重从数值计算角度对常用的一些基本方程作一简单介绍。

附面层流动在计算时势流区参数要作为已知条件，由于计算机技术的发展目前普遍采用全场计算进行数值模拟，而很少再采用附面层方程进行计算。因而附面层方程在此不作介绍。此外紊流平均流与粘性流在计算方法上没有本质上的差异，因而在此也不作介绍。

### 2.1 可压缩非定常粘性流数学模型

可压缩非定常粘性流数学模型是流体力学数值计算中具有普遍意义的数学模型，其守恒型微分形式如下。

连续方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

运动方程：

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \nabla \cdot \vec{V} \right] \quad (2.2)$$

能量方程：

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{V} + \nabla \cdot (\tau_{ij} \cdot \vec{V}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q \quad (2.3)$$

上述基本方程一起构成了 Navier-Stokes(以下简称 NS)方程，它可转化成守恒型式(即变量均包含在偏微分符号的里面)。在三维直角坐标系下，守恒型方程组为：



$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}_v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial z} \quad (2.4)$$

这里  $\bar{E}$ 、 $\bar{F}$  和  $\bar{G}$  为无粘流项； $\bar{E}_v$ 、 $\bar{F}_v$  和  $\bar{G}_v$  为粘性流项。式(2.4)中的  $\bar{U}$ 、 $\bar{E}$ 、 $\bar{F}$  和  $\bar{G}$  等都是五维向量，其表达式为：

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho vw \\ (E_t + p)u \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E_t + p)v \end{pmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 \\ (E_t + p)w \end{pmatrix}$$

$$\bar{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + k\frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + k\frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \bar{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} + k\frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$E_t = \rho \left( e + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)$$

$e$  为内能， $\tau_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) 为粘性应力张量，在直角坐标系下表达式为：

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{3} \left[ 4 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \quad \tau_{yy} = \frac{\mu}{3} \left[ 4 \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right], \quad \tau_{zz} = \frac{\mu}{3} \left[ 4 \frac{\partial w}{\partial z} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right],$$

$$\tau_{xx} = \tau_{yx} = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right], \quad \tau_{xx} = \tau_{zx} = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

由于方程组本身不封闭（未知数个数多于方程个数），还需要补充数学关系式。

第一，状态方程： $e = e(\rho, T)$ ，对于完全气体有：

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{RT}{(\gamma - 1)} \quad (2.5)$$

第二，物性系数与状态参数的关系式： $\mu = \mu(\rho, T)$  和  $k = k(\rho, T)$ ，对于层流流动， $\mu$  和  $k$  通常可采用苏士兰 (Sutherland) 公式确定。

## 2.2 不可压缩非定常粘性流数学模型

当流动马赫数小于 0.2 时，可认为流体不可压，密度为常数。这时基本方程(2.1)、(2.2)和(2.3)可作一些简化。

连续方程：

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.5)$$

运动方程:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.6)$$

能量方程:

$$\rho \frac{Dc}{Dt} = k \nabla^2 T + \rho q + \phi \quad (2.7)$$

$\phi$  为耗散函数, 具体表达式可见气体力学参考书。在大多数流动实例中, 不可压流场中的温度变化对流动的影响微不足道。而粘性系数  $\mu$  仅是温度和密度的函数, 因而可近似认为不可压流场中  $\mu$  为常数。对于三维流动, 运动方程(2.6) 包含三个方向分方程, 加上连续方程(2.5) 共四个方程。四个方程所包含的未知数个数为  $u$ 、 $v$ 、 $w$  和  $p$  也是四个, 构成了封闭方程组。能量方程与运动方程和连续方程不耦合, 因此采用连续方程和运动方程即可求出速度和压力分布。如果要求流场中温度分布, 进一步单独求解能量方程。这样求解过程简便, 且计算效率较高。

由于连续方程中不出现密度项, 求解时有所不便。为此也有采用流函数涡量法进行求解。引入向量流函数  $\vec{\psi}$ , 使

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{\psi} \quad (2.8)$$

这时连续方程自动满足, 运动方程可改写成

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + ((\nabla \times \vec{\psi}) \cdot \nabla) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)(\nabla \times \vec{\psi}) = \nabla \times \vec{F} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\Omega} \quad (2.9)$$

$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} = \nabla(\nabla \cdot \vec{\psi}) - \Delta \vec{\psi}$ , 为向量涡量。在平面流动时,  $\vec{\Omega} = \xi \vec{k}$ ,  $\xi$  为  $\vec{\Omega}$  的数值大小, 是标量,  $\vec{k}$  为平面法向。(2.9)式可简化为

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \xi \quad (2.10)$$

$$\Delta \psi = -\xi \quad (2.11)$$

流函数涡量法在平面问题中经常采用, 其优点是消除了压力项, 但同时  $\xi$  边界条件较难处理, 并且不适用于三维流计算。

### 2.3 无粘流数学模型

对于气体流动, 在远离固体壁面处, 流体的粘性作用很小, 可以忽略不计,



于是可得到无粘流基本方程。对方程(2.4)忽略掉方程右边粘性项, 得:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

$\bar{U}$ 、 $\bar{E}$ 、 $\bar{F}$  和  $\bar{G}$  表达式同方程(2.4)。当进口流场均匀, 且流场中没有产生很强的激波时, 流动可以视作无旋, 引入速度势  $\varphi$ , 有

$$\bar{V} = \nabla \varphi \quad (2.13)$$

这时定常的速度势满足方程

$$\begin{aligned} (a^2 - u^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (a^2 - v^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (a^2 - w^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ + 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2vw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + 2vw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

这就是全位势方程。对不可压流,  $u$ 、 $v$ 、 $w$  远远小于音速  $a$ , 全位势方程可简化成

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{或} \quad \Delta \varphi = 0 \quad (2.15)$$

这是一个典型的椭圆型方程, 即著名的 Laplace(拉普拉斯)方程。

## 2.4 常用的模型方程

流体力学基本方程大都是较复杂、非线性方程(组), 从数值计算角度对其进行分析、研究比较困难, 并且迄今为止还没有形成成熟的理论。为了认识基本方程的数学性质, 常用一些简单的线性数学方程作为替代进行研究。这些方程具有基本方程的某些特征, 称之为模型方程。下面介绍三个典型的模型方程。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

$\xi(x, t)$  为待求解函数, 以下同。此方程是双曲型方程, 形式类同于一维欧拉方程, 因此称为对流方程。方程中  $\alpha$  相当于对流速度, 为研究简便起见, 常处理为常数。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

上式为伯格(S)方程。这是一个非线性方程, 具有 NS 方程类似的性态, 且有一些现成的解析解可供参考, 式中系数  $\beta$  相当于流体的粘性系数。但

因其非线性，更常用来模拟 NS 方程的是对流—扩散方程：

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.18)$$

这个方程和伯格方程同属双曲—抛物型方程，但它是线性的，比较简单。当  $\beta=0$  时，退化成双曲型方程 (2.16)；当  $\alpha=0$  时，则变成抛物型方程：

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

(2.19)为抛物型方程。此外还有模型方程：

$$\nabla^2 \xi = f \quad (2.20)$$

叫泊松方程，为椭圆型方程，其右端函数项  $f$  为已知，若  $f=0$ ，则(2.20)就成了拉普拉斯方程(2.15)。



## 2.5 流体力学问题的定解条件

在数学方程建立后，为确定解必须给出定解条件。定解条件包括初始条件和边界条件。初始条件就是在某一起始时刻给出流场中速度、压力、密度和温度等参数分布。对于定常问题并不需要初始条件，但实际计算中，对于非线性方程（组）要进行迭代求解或者时间推进法求解，这一过程相当于非定常问题的渐近过程，因此需要初始条件作为迭代的初值。初始条件给定不影响最后结果，但初始条件的合理性会影响迭代计算收敛速度，甚至于影响收敛性。举一个极限的例子，如果给定的初场就是定常解，则一步迭代即得到最后结果。总之，初始条件的给定是比较容易的。

不论是何种流动问题采用何种求解方法，首先要确定计算区域，此计算区域相当于流体力学中控制体。这样边界条件是必不可少的。在流体力学中，由于问题的多样性，边界条件的种类也是很多的。关于各种流动边界上要给多少个边界条件、给出哪些边界条件，目前还没有一个完善的理论。所幸的是，对于绝大多数工程实际中的流动问题，研究人员根据理论分析结合经验都能给出合适的边界条件。下面介绍一些常见的流动边界及边界条件。

**来流边界**（进口边界）。对于外流流动，如飞行器绕流称来流边界；对于内流流动，如进气道和叶轮机内流动则习惯称进口边界。来流边界理论上应在物面上游无穷远处，在那里流动未受扰动易于给出边界条件。实际计算时无法做到，通常取在离物面较远扰动可忽略的前方。在此边界上一般给出：总压、总温、气流角等参数。

**下游边界**（出口边界）。下游边界（外流流动）和出口边界（内流流动）要设定在绕流体的远下游，在那里流动通过充分掺混已比较均匀，这样有利于边界条件的给定。对于亚音速流，通常给出出口边界上静压（又叫出口反压）；对超音速流，由于下游扰动对上游流动没有影响，因而不能给定出口反压。其他未确定参数如速度、密度、温度以及超音速流的静压等，则采用计算区域内部的数值外插求得。

**壁面边界**。对于固体壁面所构成的边界，有明确的边界条件给定方法。1) 速度的给定：对于粘性流，流体在壁面边界上的速度等于壁面的运动速度，如果壁面静止，则流体速度为零，即无滑移边界条件；对于无粘流，流体在边界处的法向速度为零，而切向速度则由计算求得不再为零，即滑移边界条件。2) 温度的给定：最常见的方法是给出壁面温度，并假设壁面处流体的温

度与壁面温度相同；也可以给出壁面热流量，即等同于给出  $\partial T/\partial n$ ；此外还有绝热条件，即  $\partial T/\partial n = 0$ 。

除了上述三种边界，还有自由边界、周期性边界、间断面边界等。虽然对边界条件给定目前仍没有一般性理论，但通过对模型方程的研究可得到一些启发。

## 2.6 模型方程的定解条件

现在考虑双曲型模型方程 (2.16)。若式中的系数  $\alpha = dx/dt$ ，则 (2.16) 式变成：

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (3.21a)$$

$\xi = \xi(x, t)$ ，方程进一步可写成

$$\frac{d\xi}{dt} = 0 \quad (3.21b)$$

不难看出， $\alpha = dx/dt$  在  $x-t$  坐标系中

是一组斜率  $\tan\theta = \frac{1}{\alpha}$  的直线 (图 2.1)，

称为特征线。在此直线上  $\frac{d\xi}{dt} = 0$ ，即  $\xi$

值沿特征线不变。设问题的求解域为  $a \leq x \leq b$ ，即图 2.1 中  $x$  轴上方 AC 和

BD 间的区域。首先这是一个非定常问题要给出初始条件：

$$\xi(x, 0) = \bar{\xi}(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.22a)$$

即给定 AB 线段上的  $\xi$  值。

如何给出边界条件与特征线有关。若  $\alpha > 0$ ，则当 AB 和 AC 上函数值给定后，BD 上的函数值也随之而定。所以当  $\alpha > 0$  时，只需给出边界 AC 上的边界条件：

$$\xi(a, t) = \bar{\xi}_a(t), \quad t > 0 \quad (3.22b)$$

$\bar{\xi}_a(t)$  为已知函数，而 BD 边界上不能给出函数值。同样道理，当  $\alpha < 0$  时，则

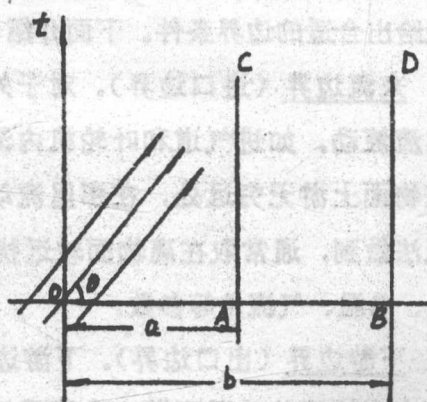


图 2.1 边界条件与特征线



只需给出 BD 边界上的函数值:

$$\xi(b, t) = \bar{\xi}_b(t), \quad t > 0 \quad (3.22c)$$

从上述讨论可看出一个规律, 将特征线视为有向线段, 其方向与  $t$  增加的方向一致, 求解域边界上的某点是否要给出定解条件, 可从该点处作特征线, 若其方向指向求解域内, 则需给出此点的函数值, 否则不给。

以上方程只有一组特征线, 对于有多组特征线情况上述规律仍适用。例如一维可压缩流的欧拉方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

其中  $u$  为  $x$  方向分速度,  $a$  为当地音速。这个方程共有三组特征线  $C^+$ 、 $C^0$  和  $C^-$ :

$$\begin{cases} C^+ : dx/dt = u + a \\ C^0 : dx/dt = u \\ C^- : dx/dt = u - a \end{cases} \quad (3.24)$$

那么, 在求解域边界上某点可作 3 条特征线, 该处需给出的定解条件数应等于指向求解域内的特征线数。在图 2.2 中 AB、AC 和 BD 围成的求解域, AB 作为初始边界一定要给出定解条件。而在 AC 和 BD 边界上则视特征线指向而定。如在 AC 上 E 点  $u > a$ , 则三条特征线都指向域内, 要给出三个定解条件; 而在 BD 上 F 点, 如同样有  $u > a$ , 三条特征线指向域外, 不需给出定解条件。又假设在

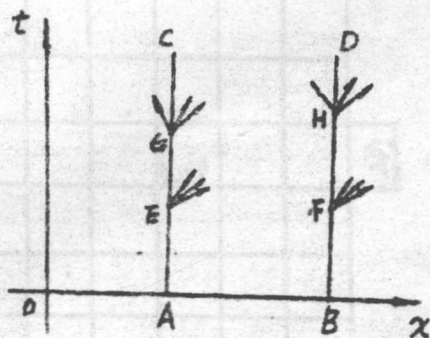


图 2.2 一维欧拉方程特征线

AC 上 G 点  $0 < u < a$ , 则  $C^+$  和  $C^0$  二条特征线都指向域内,  $C^-$  指向域外, 需二个边界条件。同理 BD 上 H 点, 若  $0 < u < a$ , 只需给出一个边界条件。

对于典型抛物型方程 (2.19), 除初始条件外, 在所有边界上都要给出边界条件。边界条件形式可为函数值或函数的一阶导数值。对流扩散型方程

(2.18) 给定边界条件与抛物型方程 (2.19) 相同。但当 (2.18) 式中  $\beta$  很小，以致  $\beta \frac{\partial^2 \xi}{\alpha^2}$  的影响可忽略时，则方程趋近于双曲型方程 (2.16)。根据前面对

(2.16) 的特征线分析可知，此时 (2.18) 式解主要受初值和一端（若  $a > 0$  则为左端）边值的影响。而另一边界条件影响区域仅限于该边界附近，这样会造成该边界附近函数值的剧烈变化，即所谓“边界层现象”。

对于椭圆型方程 (2.20)，在所有边界上都要给出边界条件。边界条件可为：1) 在所有边界上给定函数值；2) 一部分边界上给函数值，在另一部份边界上给出函数的法向导数值（即混合边界条件）。



### 第三章 有限差分近似及其数学性质

计算流体力学任务是将描述流体运动的偏微分方程转化成离散形式，然后在计算机上求出这些方程的解。方程的离散有多种方法，常用的有：有限差分法、有限元法、有限体积法等。其中，有限差分法是目前应用最广泛的方法。

有限差分法用差商代替微商，将微分方程转化成差分方程；并将原问题的初边值条件也作相应转化。从而实现偏微分方程的离散化，以适合于计算机编程计算。

#### 3.1 差分格式基本概念

首先对差分方法中的一些基本符号作一介绍。对于一个二维定常问题，在直角坐标系下，某一流动参数  $U$  是空间坐标  $x$  和  $y$  的函数，即表示为  $U(x,y)$ 。要采用数值方法求解  $U(x,y)$ ，首先要确定求解域，然后在求解域内进行网格划分（关于网格划分后面要作详细阐述）。假设图 3.1 的求解域已作出划分， $x$  方向和  $y$  方向各有  $m$  和  $n$  条网格线，纵横网格线交点称为网格节点。流场中任一网格节点表示为  $(i,j)$ ， $i$

从 1 到  $m$ ， $j$  从 1 到  $n$ ，表示为： $i=1, m; j=1, n$ 。网格节点  $(i,j)$  上差分计算值表示为  $U_{ij}$ ，它是对函数值  $U(x_i, y_j)$  的近似。同理对于一维和三维定常问题有： $U=U(x)$  和  $U=U(x, y, z)$ ，差分计算值  $U_i$  和  $U_{ijk}$  为函数值  $U(x_i)$  和  $U(x_i, y_j, z_k)$  的近似。 $x$  方向相邻节点之间距离

叫  $x$  方向空间步长，记作  $\Delta x_i (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$ ，同理  $y$  方向空间步长为  $\Delta y_j (\Delta y_j = y_{j+1} - y_j)$ 。

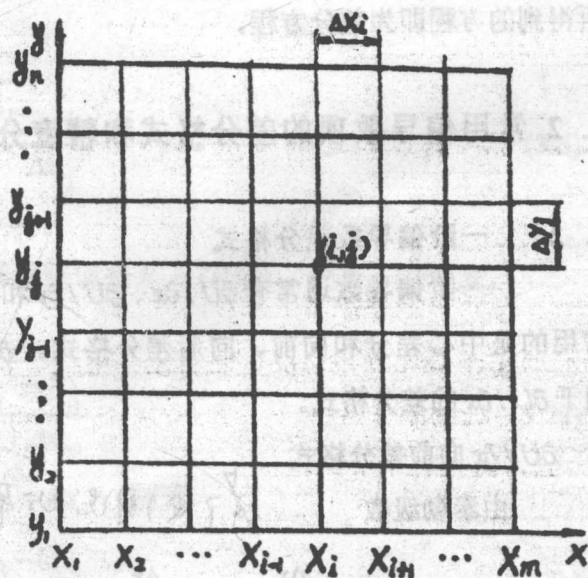


图 3.1 差分网格示意图