



# 目 錄

## 第一部分 微分方程式 1

### 第〇章 緒 論 3

### 第一章 一階微分方程式 13

1.0 引 言 .....	13
1.1 可分離的方程式 .....	14
1.2 可分離微分方程式之應用 .....	18
1.3 齊次和“近乎齊次”方程式 .....	24
1.4 恰當微分方程式 .....	33
1.5 積分因子和柏努利方程式 .....	41
1.6 線性一階微分方程式 .....	52
1.7 黎卡地方程式 .....	57
1.8 $RL$ 和 $RC$ 電路 .....	63
1.9 存在性、唯一性及畢卡德迭代法 .....	70
1.10 等斜線、方向場與圖解 .....	75
1.11 正交軌跡和斜交軌跡 .....	79

### 第二章 線性二階微分方程式 97

2.0 引 言 .....	97
2.1 線性二階微分方程式：解的存在性及唯一性 .....	98
2.2 線性齊次二階微分方程式的理論 .....	101
2.3 $y'' + Ay' + By = 0$ 的通解若 $A^2 - 4B \geq 0$ .....	110
2.4 複指數函數的背景 .....	115
2.5 $y'' + Ay' + By = 0$ 的通解，若 $A^2 - 4B < 0$ .....	117
2.6 質塊聯結於彈簧上的阻尼和無阻尼自由運動 .....	122
2.7 線性非齊次二階微分方程式的理論 .....	129

2.8	尋求 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$ 的特解	134
2.9	繫於彈簧上之質塊的強迫振盪分析	145
2.10	$RLC$ 電路和強迫阻尼彈簧運動的對比	154
2.11	降階法	158
2.12	歐拉方程式	163
2.13	各方法的摘要	172
<b>第三章 高階微分方程式 183</b>		
3.0	引言	183
3.1	理論上的考慮	187
3.2	求解 $y^{(n)} + A_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + A_1y' + A_0y = 0$	194
3.3	解 $y^{(n)} + A_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + A_1y' + A_0y = F(x)$	199
3.4	$N$ 階歐拉型方程式	206
3.5	解法摘要	211
3.6	微分運算子	212
<b>第四章 拉普拉氏轉換 219</b>		
4.0	引言	219
4.1	拉普拉氏轉換的定義	219
4.2	計算拉普拉氏轉換	228
4.3	計算逆拉普拉氏轉換式：第一部分	247
4.4	計算逆拉普拉氏轉換式：第二部分——海夫塞德展開式	262
4.5	以拉普拉氏轉換解典型的工程問題	271
4.6	摺積	283
4.7	積分方程式、移位和混合數據問題及單位脈衝	290
4.8	以拉普拉氏轉換解具有多項式係數的微分方程式	300
<b>第五章 微分方程式的級數解 321</b>		
5.1	引言	321
5.2	幕級數複習	321
5.3	微分方程式的幕級數解	330
5.4	弗氏法	344

第六章 貝索函數與雷建德多項式、史特姆-李吾維爾理論、本徵函數展開式及振盪 359

6.0	引言	359
6.1	整數階的貝索函數	359
6.2	非整數階貝索函數	381
6.3	雷建德多項式	391
6.4	史特姆-李吾維爾理論和本徵函數展開	400
6.5	史特姆分隔定理和史特姆比較定理	419

第七章 線性系統、非線性系統和穩定性 433

7.0	引言	433
7.1	使用微分運算子，藉消去法求解線性系統	433
7.2	以拉普拉斯氏轉換求解方程式系統	441
7.3	非線性系統、相位平面、臨界點和穩定性	445

第八章 微分方程式史摘要 469

第二部分 向量與矩陣 471

第九章 向量與向量空間 471

9.0	簡介	473
9.1	向量的代數學與幾何學	473
9.2	向量的點積	483
9.3	向量的叉積	495
9.4	純量三重積與向量恒等式	503
9.5	向量空間 $R^n$	509
9.6	線性獨立與維數	517
9.7	本章補充：抽象向量空間	523

第十章 矩陣與行列式 535

10.0	簡介	535
10.1	矩陣的符號表示法與代數學	526
10.2	矩陣乘法與晶體中的漫步	547
10.3	某些特殊矩陣	553

10.4	基本列運算與基本矩陣	558
10.5	矩陣的簡化型	566
10.6	矩陣的秩	574
10.7	線性方程組的解：齊次的情況	579
10.8	非齊次線性方程組的解	590
10.9	反矩陣	600
10.10	行列式：定義與基本性質	607
10.11	求行列式值的演算	622
10.12	行列式在電路上的應用	632
10.13	反矩陣的行列式公式	636
10.14	克拉瑪法則：方程組的行列式解	639
10.15	本徵值與本徵向量	643
10.16	本徵值與本徵向量的計算觀點	648
10.17	本徵值在微分方程組上的應用	650
10.18	對角化	656
10.19	對角化在微分方程組上的應用	668
10.20	實數對稱矩陣的本徵值與本徵向量	680
10.21	正交矩陣與實數對稱矩陣的對角化	684
10.22	正交矩陣在實數二次式上的應用	689
10.23	么正矩陣、赫密特矩陣與反赫密特矩陣	695

## 單號習題答案 1

## 索引 1

# 目 錄

## 第三部分 向量分析 709

### 第十一章 向量分析 711

11.0	簡 介 .....	711
11.1	單變數向量函數 .....	711
11.2	速度、加速度、曲率與扭率 .....	724
11.3	向量場 .....	734
11.4	梯 度 .....	739
11.5	散度與旋度 .....	748
11.6	線積分 .....	754
11.7	葛林定理 .....	766
11.8	平面位勢理論 .....	775
11.9	曲線與面積分 .....	784
11.10	高斯與司托克士定理：計算觀點 .....	793
11.11	高斯定理的一些應用 .....	804
11.12	司托克士定理的一些應用 .....	816
11.13	曲線座標 .....	826
11.14	葛林與高斯定理的推廣 .....	838

## 第四部分 富立葉分析與邊界值問題 849

### 第十二章 富立葉級數、積分與轉換 851

12.0	簡 介 .....	851
12.1	函數的富立葉級數 .....	851
12.2	富立葉係數與富立葉級數的收斂 .....	857
12.3	週期函數的富立葉級數及其在受力振盪與共振上的應用 .....	878
12.4	富立葉正弦與餘弦級數 .....	884

12.5	富立葉積分	896
12.6	富立葉正弦與餘弦積分	902
12.7	富立葉係數的電腦計算法	904
12.8	多重富立葉級數	906
12.9	有限富立葉轉換	911
12.10	富立葉轉換	918

### 第十三章 偏微分方程式 933

13.0	簡介	933
13.1	波動與熱傳方程式的推導	936
13.2	波動方程式的富立葉級數解	948
13.3	熱傳方程式的富立葉級數解	962
13.4	半無限長與無限長弦的波動方程式	976
13.5	在半無限大與無限大區域中的熱傳方程式	983
13.6	邊界值問題的多重富立葉級數解	990
13.7	邊界值問題的富立葉 - 貝索解	998
13.8	邊界值問題的富立葉 - 雷建德解	1004
13.9	邊界值問題的拉普拉氏轉換解	1008
13.10	邊界值問題的富立葉轉換解	1013
13.11	存在、唯一、分類和設定良好問題的討論	1027
13.12	偏微分方程式的簡史	1033

### 第五部分 複數分析 1039

#### 第十四章 複數和複數函數 1041

14.1	複數	1041
14.2	複數的極座標式	1049
14.3	複數平面中的函數與集合	1055
14.4	複數函數的極限與導數	1061
14.5	柯其 - 李曼方程式	1064
14.6	有理數乘幕與根	1071
14.7	複數指數函數	1078
14.8	複數對數函數	1081

14.9	一般乘冪	1085
14.10	複數三角和雙曲線函數	1087
<b>第十五章 複數平面中的積分 1093</b>		
15.0	簡介	1093
15.1	複數平面中的線積分	1093
15.2	柯其積分定理	1106
15.3	柯其積分定理的一些結果	1115
<b>第十六章 複數序列與級數，以及泰勒與洛倫展開式 1133</b>		
16.0	簡介	1133
16.1	複數序列	1133
16.2	複數序列的柯其收斂準則	1137
16.3	複數級數	1140
16.4	複數冪級數	1145
16.5	複數泰勒級數	1155
16.6	洛倫級數	1165
<b>第十七章 奇點，殘值，及其在實數積分和級數上的應用 1179</b>		
17.1	奇點	1179
17.2	殘值與殘值定理	1182
17.3	應用殘值定理於計算實數積分	1192
17.4	應用殘值定理於求實數級數之和	1200
17.5	幅角原理	1204
<b>第十八章 保角映射 1211</b>		
18.0	簡介	1211
18.1	映射常用的函數	1211
18.2	保角映射與線性分式轉換	1222
18.3	在已知整域間建立保角映射	1235
<b>第十九章 複數分析的一些應用 1249</b>		
19.1	單位圓盤的調和函數與狄里西雷問題	1249



19.2	狄里西雷問題的保角映射解 .....	1255
19.3	分析流體流動的複數函數 .....	1259
19.4	複數函數與靜電位 .....	1267
19.5	反拉普拉斯氏轉換 .....	1268
19.6	複數富立葉級數 .....	1270

## 第六部分 數值方法 1275

### 第二十章 數值方法 1277

20.0	簡 介 .....	1277
20.1	方程式的近似解 .....	1277
20.2	數值積分 .....	1282
20.3	多項式插值法 .....	1288
20.4	數值微分 .....	1290
20.5	三次仿樣函數 .....	1294
20.6	初值問題的數值解法 .....	1298
20.7	二階初值問題的數值解法 .....	1308
20.8	二階邊界值問題的數值解法 .....	1312
20.9	解狄里西雷問題的有限差分法 .....	1316
20.10	本徵值和本徵向量的近似 .....	1321
20.11	最小平方法 .....	1327

### 附 錄 1

#### 單號習題答案 1

#### 索 引 1

第一部分

---

# 微分方程式



# 第 〇 章

## 緒 論

物理科學和工程學中，有許多問題以各種數學方程式表示，其中包含了代表所求關係之函數的導數。此類方程式稱為微分方程式 (differential equation)，而若導數為單一變數的函數，則稱為常 (ordinary) 微分方程式，若為偏 (partial) 導數，則稱為偏微分方程式。

基本上，由於我們和自然界的交互作用，由觀察運動中的物體或系統的方式開始，因而產生了微分方程式。所以，我們觀察並量度改變率或導數；將對一量和另一個量間之關係的推測列成數學式；以實驗測試這些推論，最後導出描述所研究程序的微分方程式。其後的問題為解這些方程式。下列即有幾個以微分方程式描述自然現象的實例。

### 範例 1 電路

假設我們對流經圖 1 中之電路的電流有興趣。習慣上，電流  $I(t)$  視為時間  $t$  的函數。設電阻  $R$ ，電容  $C$  和電感  $L$  均為常數，而在  $t$  時刻時電容中的總電荷為  $Q(t)$ 。(若電流以安培計，則電阻  $R$  以歐姆， $C$  以法拉， $L$  以亨利，而  $Q$  以庫侖計。)

實驗告訴我們

$$\text{跨電阻器兩端的電壓降} = IR$$

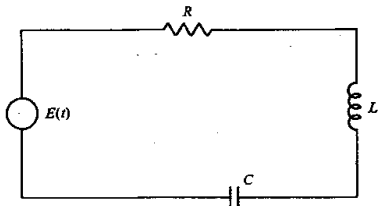


圖 1 RLC 電路

$$\text{跨電容器兩端的電壓降} = \frac{Q}{C}$$

及

$$\text{跨電感器兩端的電壓降} = L \frac{dI}{dt}$$

其次，克希何夫 (Kirchhoff) 的電路第二定律說明了引動電壓等於電路中電壓降之和。因此

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t),$$

為一包含  $I$  和  $Q$  的微分方程式。通常我們已知  $E$ ,  $R$ ,  $L$  和  $C$  而企求解得  $Q$ 。為了消去  $I$  以得到僅含  $Q$  的方程式，令

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

將此式代入微分方程式得

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E,$$

為僅含  $Q$  及其導數為未知數的微分方程式。可以解得  $Q$ ，再由  $dQ/dt$  求得  $I$ 。

這是一常微分方程式 (不含偏導數)，且為二階 (即此方程式中出現之最高階導數的階次)。

## 範例 2 自由振盪

假設我們將球懸於一彈簧端，將球向下拉，再釋放，則我們能否描述其運動。

為了分析此類問題，我們必須考慮作用於球上之力。設想彈簧如圖 2 (a) 所示，在此未拉伸狀態，其長度為  $L$ 。若將球懸掛於彈簧上，並使系統維持平衡，彈簧將有一伸長量  $d$ ，因此，此刻球與天花板相距  $L+d$  [圖 2 (b)]。為了方便，球的垂直位移將自  $L+d$  處量起 [圖 2 (c)]。因此， $L+d$  處  $y=0$ ，並選擇  $y$  向下為正，向上為負。在  $L+d$  處，彈簧處於靜平衡 (static equilibrium)

作用於球上的力如下：

1. 地心引力值為  $mg$ ，其中  $g$  為重力引起的定值加速度，其值約為  $980 \text{ cm/sec}^2$

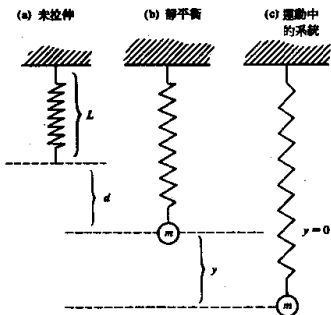


圖 2

或  $9.8 \text{ m/sec}^2$ 。

2. 虎克定律的敘述為彈簧回復力的大小與其伸長的距離成正比，並經實驗證實。比例常數  $k$  稱為彈簧模數 (spring modulus)，其值隨彈簧而異。 $k$  值愈大，彈簧愈剛強。

靜平衡時，此力為  $-kd$  (負值表示彈簧有拉球向上的傾向)。若球自平衡位置拉下距離  $y$ ，則添加一力  $-ky$  作用於球上。因此，彈簧作用於球上的總力為

$$-kd - ky.$$

加上重力和彈簧力，可得總力為

$$mg - kd - ky.$$

在平衡位置  $y = 0$ ，而所有的力形成平衡，因此

$$kd = mg.$$

則總力變成  $mg - mg - ky$ ，或簡為  $-ky$ 。

現在要考慮兩種情形：

## 6 第○章 緒 論

1. 無阻尼系統 在此我們設想阻尼效應（例如空氣阻力）可以忽略。使用牛頓第二定律（力等於質量乘以加速度），並使  $t$  = 時間，而  $d^2 y/dt^2$  表示加速度，則有

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky.$$

因此， $y$  對時間的行態受下列二階微分方程式控制

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0.$$

稍後將可看到其解為

$$y(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right),$$

其中  $A$  與  $B$  為由問題的附加數據（例如球的起始位置和初速度）所決定的常數。因此，在無阻尼狀態下，球呈現週期性的上下運動，通常稱為諧振（harmonic oscillation）。

2. 阻尼系統 若球連接一緩衝筒，如圖 3 所示，則有新的力加入，並傾向於阻滯運動。實驗顯示，阻力和速度  $dy/dt$  成正比。因此對稱為阻尼常數（damping constant）的常數  $c$  而言，作用於球上的總力為  $-ky - c(dy/dt)$ 。由牛頓第二定律所得的方程式將為

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - c \frac{dy}{dt}$$

或

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

此方程式的解較無阻尼情況的解複雜。視  $m$ 、 $c$  和  $k$  值的相對大小，其所

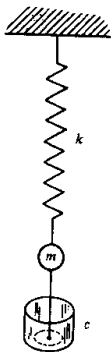


圖 3 阻尼彈簧系統

得運動將為過阻尼 (overdamped)，低阻尼 (underdamped) 或臨界阻尼 (critically damped) 運動。待已習得某些二階微分方程式的解法後，我們將在 2.6 節中處理這些細節。

### 範例 3 放射性衰變

實驗顯示，像鎊這類放射性元素的衰變速率和當時的質量成正比。我們有意導出一式以計算任何時刻的質量。

令  $M(t)$  為  $t$  時刻的質量。若質量減少速率正比於當時的質量，而其相關的比例常數  $k$ ，是隨元素而異的，可得出

$$\frac{dM}{dt} = -kM.$$

這是  $M$  的一階微分方程式，而且是易於求解的一型。將其改寫成

$$\frac{dM}{M} = -k dt$$

並積分\* 得

$$\ln(M) = -kt + c,$$

其中  $c$  為待定的常數。則

$$M(t) = e^{-kt+c} = e^c e^{-kt} = A e^{-kt},$$

為了方便將  $e^c$  以  $A$  取代。

但如何求  $A$ ？我們必須已量得某時刻  $t_0$  時的質量。設  $M(t_0) = m$ ，則

$$M(t_0) = A e^{-kt_0} = m;$$

因此

$$A = m e^{kt_0}.$$

則

$$M(t) = m e^{kt_0} e^{-kt} = m e^{-k(t-t_0)}$$

由此式可得任何時刻  $t$  的質量。

### 範例 4 墜落體運動

現在考慮的問題為在重力影響下的墜落體運動。假設類似風阻等因素可以忽略，我

\* 實際上  $\int dM/M = \ln|M|$ ，但質量恆為正，因此  $\ln|M| = \ln(M)$ 。



## 8 第〇章 緒論

們從由實驗觀察得到以  $g$  表示的重力加速度為一常數的事實著手，令  $y(t)$  為物體在  $t$  時刻的高度，如圖 4 所示。則

$$\text{加速度} = \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

積分可得

$$\frac{dy}{dt} = gt + k$$

$k$  為常數。再積分得

$$y(t) = g \frac{t^2}{2} + kt + C,$$

其中  $C$  為第二個積分常數。

爲了求積分常數，須留意

$$y(0) = C.$$

因此， $C$  為物體在  $t=0$  時的高度。

其次，

$$y'(0) = k,$$

故  $k$  為  $t=0$  時的速度。

所以，在任何  $t > 0$  的時刻，物體的位置為

$$y(t) = g \frac{t^2}{2} + y'(0)t + y(0).$$

如若我們知道起始位置  $y(0)$  及初速度  $y'(0)$ ，則可完全瞭解上式。

### 範例 5 擺的簡諧運動

假如我們將質量為  $m$  的球，懸於長為  $L$  的桿端並使桿來回擺動，試導出描述此球運動的方程式。

令  $\theta$  為量自垂線的角位移，如圖 5 所示。此處  $\theta$  隨時間  $t$  變化，並以徑為單位。重量  $mg$  在切線上的分量為  $-mg \sin(\theta)$ （由於此力傾向於使擺恢復平衡而為負

