目　錄

目　　錄

第三部分　向量分析　709

第十一章　向量分析　711

第四部分　富立葉分析與邊界值問題　849

第十二章　富立葉級數、積分與轉換　851

第一部分

微分方程式

第〇章
緒　　論

物理科學和工程學中，有許多問題以各種數學方程式表示，其中包含了代表所求關係之函數的導數。此類方程式稱爲*微分方程式*（differential equation），而若導數爲單一變數的函數，則稱爲常（ordinary）微分方程式，若爲偏（partial）導數，則稱爲偏微分方程式。

基本上，由於我們和自然界的交互作用，由觀察運動中的物體或系統的方式開始，因而產生了微分方程式。所以，我們觀察並量度改變率或導數；將對一量和另一個量間之關係的推測列成數學式；以實驗測試這些推論，最後導出描述所研究程序的微分方程式。其後的問題爲解這些方程式。下列即有幾個以微分方程式描述自然現象的實例。

範例 1　電路

假設我們對流經圖 1 中之電路的電流有興趣。習慣上，電流 $I(t)$ 視爲時間 t 的函數。設電阻 R，電容 C 和電感 L 均爲常數，而在 t 時刻時電容中的總電荷爲 $Q(t)$。（若電流以安培計，則電阻 R 以歐姆，C 以法拉，L 以亨利，而 Q 以庫侖計。）

實驗告訴我們

跨電阻器兩端的電壓降 $= IR$

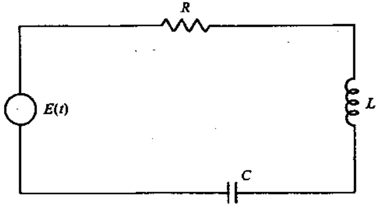

圖 1　RLC 電路

$$\text{跨電容器兩端的電壓降} = \frac{Q}{C}.$$

及

$$\text{跨電感器兩端的電壓降} = L\frac{dI}{dt}.$$

其次，克希何夫（Kirchhoff）的電路第二定律說明了引動電壓等於電路中電壓降之和。因此

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t),$$

爲一包含 I 和 Q 的微分方程式。通常我們已知 E, R, L 和 C 而企求解得 Q。爲了消去 I 以得到僅含 Q 的方程式，令

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

將此式代入微分方程式得

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E,$$

爲僅含 Q 及其導數爲未知數的微分方程式。可以解得 Q，再由 dQ/dt 求得 I。

這是一常微分方程式（不含偏導數），且爲二階（即此方程式中出現之最高階導數的階次）。

範例 2　自由振盪

假設我們將球懸於一彈簧端，將球向下拉，再釋放，則我們能否描述其運動。

爲了分析此類問題，我們必須考慮作用於球上之力。設想彈簧如圖 2 (a)所示，在此未拉伸狀態，其長度爲 L。若將球懸掛於彈簧上，並使系統維持平衡，彈簧將有一伸長量 d，因此，此刻球與天花板相距 $L+d$［圖 2 (b)］。爲了方便，球的垂直位移將自 $L+d$ 處量起［圖 2 (c)］。因此，$L+d$ 處 $y=0$，並選擇 y 向下爲正，向上爲負。在 $L+d$ 處，彈簧處於靜平衡(static equilibrium)

作用於球上的力如下：

1. 地心引力值爲 mg，其中 g 爲重力引起的定值加速度；其值約爲 980 cm/sec^2

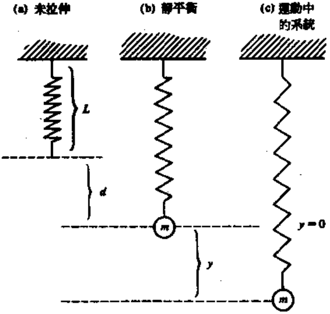

圖 2

或 9.8 m/sec^2 。

2. 虎克定律的敍述爲彈簧回復力的大小與其伸長的距離成正比，並經實驗證實。比例常數 k 稱爲彈簧模數(spring modulus)，其值隨彈簧而異。k 值愈大，彈簧愈剛強。

靜平衡時，此力爲 $-kd$（負值表示彈簧有拉球向上的傾向）。若球自平衡位置拉下距離 y ，則添加一力 $-ky$ 作用於球上。因此，彈簧作用於球上的總力爲

$$-kd-ky.$$

加上重力和彈簧力，可得總力爲

$$mg-kd-ky.$$

在平衡位置 $y=0$ ，而所有的力形成平衡，因此

$$kd=mg.$$

則總力變成 $mg-mg-ky$ ，或僅爲 $-ky$ 。

現在要考慮兩種情形：

1. 無阻尼系統 在此我們設想阻尼效應（例如空氣阻力）可以忽略。使用牛頓第二定律（力等於質量乘以加速度），並使 t = 時間，而 d^2y/dt^2 表示加速度，則有

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky.$$

因此，y 對時間的行態受下列二階微分方程式控制

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0.$$

稍後將可看到其解爲

$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right),$$

其中 A 與 B 爲由問題的附加數據（例如球的起始位置和初速度）所決定的常數。因此，在無阻尼狀態下，球呈現週期性的上下運動，通常稱爲諧振（harmonic oscillation）。

2. 阻尼系統 若球連接一緩衝筒，如圖3所示，則有新的力加入，並傾向於阻滯運動。實驗顯示，阻力和速度 dy/dt 成正比。因此對稱爲阻尼常數（damping constant）的常數 c 而言，作用於球上的總力爲 $-ky-c(dy/dt)$。由牛頓第二定律所得的方程式將爲

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - c\frac{dy}{dt}$$

，或

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

此方程式的解較無阻尼情況的解複雜。視 m，c 和 k 值的相對大小，其所

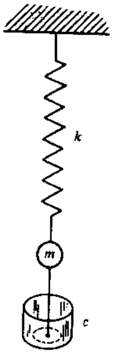

圖3 阻尼彈簧系統

得運動將爲過阻尼（overdamped），低阻尼（underdamped）或臨界阻尼(critically damped)運動。待已習得某些二階微分方程式的解法後，我們將在2.6節中處理這些細節。

範例3 放射性衰變

實驗顯示，像鐳這類放射性元素的衰變速率和當時的質量成正比。我們有意導出一式以計算任何時刻的質量。

令$M(t)$爲t時刻的質量。若質量減少速率正比於當時的質量，而其相關的比例常數k，是隨元素而異的，可得出

$$\frac{dM}{dt} = -kM.$$

這是M的一階微分方程式，而且是易於求解的一型。將其改寫成

$$\frac{dM}{M} = -k\,dt$$

並積分* 得

$$\ln(M) = -kt + c,$$

其中c爲待定的常數。則

$$M(t) = e^{-kt+c} = e^{c}e^{-kt} = Ae^{-kt},$$

爲了方便將e^c以A取代。

但如何求A？我們必須已量得某時刻t_0時的質量。設$M(t_0)=m$，則

$$M(t_0) = Ae^{-kt_0} = m;$$

因此

$$A = me^{kt_0}.$$

則

$$M(t) = me^{kt_0}e^{-kt} = me^{-k(t-t_0)}$$

由此式可得任何時刻t的質量。

範例4 墜落體運動

現在考慮的問題爲在重力影響下的墜落體運動。假設類似風阻等因素可以忽略，我

*實際上$\int dM/M = \ln|M|$，但質量恒爲正，因此$\ln|M| = \ln(M)$。

們從由實驗觀察得到以 g 表示的重力加速度爲一常數的事實著手，令 $y(t)$ 爲物體在 t 時刻的高度，如圖 4 所示。則

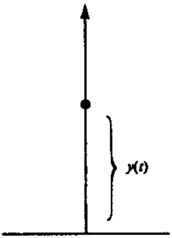

圖 4

$$\text{加速度} = \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

積分可得

$$\frac{dy}{dt} = gt + k$$

k 爲常數。再積分得

$$y(t) = g\frac{t^2}{2} + kt + C,$$

其中 C 爲第二個積分常數。

爲了求積分常數，須留意

$$y(0) = C.$$

因此，C 爲物體在 $t=0$ 時的高度。

其次，

$$y'(0) = k,$$

故 k 爲 $t=0$ 時的速度。

所以，在任何 $t>0$ 的時刻，物體的位置爲

$$y(t) = g\frac{t^2}{2} + y'(0)t + y(0),$$

則若我們知道起始位置 $y(0)$ 及初速度 $y'(0)$，則可完全瞭解上式。

範例 5 擺的簡諧運動

假如我們將質量爲 m 的球，懸於長爲 L 的桿端並使桿來回擺動，試導出描述此球運動的方程式。

令 θ 爲量自垂線的角位移，如圖 5 所示。此處 θ 隨時間 t 變化，並以弳爲單位。重量 mg 在切線上的分量爲 $-mg\sin(\theta)$（由於此力傾向於使擺恢復平衡而爲負