

计算机算法导引

——设计与分析

卢开澄 等编著

清华大学出版社

目 录

绪论	IX
第 1 章 动态规划	1
1.1 最短路径问题	1
1.2 最佳原理	3
1.3 流动推销员(或旅行商)问题.....	11
1.4 矩阵链乘问题.....	14
1.5 最长公共子序列.....	16
1.6 图的任意两点间的最短距离.....	18
1.7 整数规划问题.....	20
1.8 同顺序流水作业的任务安排问题.....	25
1.9 可靠性问题.....	27
1.10 设备更新问题	29
习题	33
第 2 章 优先策略	36
2.1 最短树的 Kruskal 算法.....	36
2.2 求最短树的 Prim 算法	37
2.3 求最短路径的 Dijkstra 算法.....	38
2.4 文件存储问题.....	39
2.5 有期限的任务安排问题.....	41
习题	42
第 3 章 分治策略	45
3.1 二分查找.....	45
3.2 整数乘法.....	46
3.3 矩阵乘积的 Strassen 算法	47
3.4 矩阵乘积的 Winograd 算法	50
3.5 布尔矩阵的乘法问题.....	51
习题	53
第 4 章 Huffman 编码、FFT 算法和数据压缩	55
4.1 Huffman 编码	55

4.2	快速傅里叶变换(FFT)	58
4.3	卷积及其应用	70
4.4	数论变换	72
	习题	74
第5章	线性规划的分解原理	76
5.1	线性规划和单纯形法简介	76
5.2	Dantzig-Wolfe 分解算法	81
	习题	89
第6章	最佳二分树	91
6.1	二分树	91
6.2	最佳二分树	94
	习题	100
第7章	内存分类法之一: 插入分类法、Shell 分类法	101
7.1	分类	101
7.2	分类的下界估计	101
7.3	二分插入分类法	104
7.4	Shell 分类法	106
	习题	108
第8章	内存分类法之二: 递选分类法、堆集分类	111
8.1	递选分类法	111
8.2	二分树递选分类法	112
8.3	堆集分类法	113
	习题	117
第9章	内存分类法之三: 下溢分类法、快速分类法	118
9.1	下溢分类法	118
9.2	快速分类法	121
	习题	125
第10章	内存分类法之四: 归并分类法和基数分类法	127
10.1	归并分类法	127
10.2	Ford-Johnson 归并插入分类法	129
10.3	基数分类法	133
	习题	134

第 11 章 求第 k 个元素	135
11.1 求最小及第二小元素	135
11.2 求第 k 个元素	136
习题	138
第 12 章 外存分类法	139
12.1 外存归并分类法	139
12.2 置换选择段的构造	141
12.3 三条带的外存归并分类法	143
12.4 阶式归并法	147
习题	148
第 13 章 分类网络	149
13.1 分类网络举例	149
13.2 0-1 原理	150
13.3 归并网络	153
13.4 Batcher 奇偶归并网络	154
习题	156
第 14 章 查找及均衡树	157
14.1 AVL 树——关于高度均衡的二分树	157
14.2 关于高度均衡的二分树的插入和删除	161
习题	164
第 15 章 2-3 树和 2-3-4 树	165
15.1 2-3 树	165
15.2 2-3-4 树	167
15.3 红黑树	169
习题	170
第 16 章 B-树	171
16.1 B-树概念	171
16.2 插入和删除	172
习题	175
第 17 章 哈希表	176
17.1 什么是哈希表	176

17.2	哈希函数的构造方法	176
17.3	解决冲突的方法	177
17.4	哈希算法的分析(线性探测法分析)	180
17.5	二重哈希法	181
	习题	182
第 18 章	DFS 算法和 BFS 算法	184
18.1	概述	184
18.2	DFS 算法	185
18.3	无向图的 DFS 算法	187
18.4	有向图的 DFS 算法	189
18.5	互连通块问题	192
18.6	强连通块问题	193
18.7	BFS 算法	197
	习题	198
第 19 章	α-β 剪技术和分支定界法	200
19.1	α - β 剪技术	200
19.2	分支定界法和流动推销员问题	200
19.3	同顺序加工任务安排问题	204
	习题	207
第 20 章	整数规划	208
20.1	概述	208
20.2	0-1 规划和它的 DFS 搜索(隐枚举)解法	210
20.3	分支定界法在解整数规划中的应用	218
	习题	220
第 21 章	串匹配	221
21.1	概述	221
21.2	KMP(Knuth-Morris-Pratt)算法	222
21.3	BM(Boyer-Moore)算法	224
21.4	RK(Rabin-Karp)算法	225
	习题	226
第 22 章	概率算法	228
22.1	概率算法举例	228
22.2	随机数产生法	231

22.3	素数的概率判定算法	232
	习题	233
第 23 章	并行算法	234
23.1	并行计算机和并行算法的基本概念	234
23.2	递推关系的并行计算	237
23.3	图的并行算法举例	238
23.4	矩阵乘积的并行计算	242
23.5	分布计算	244
	习题	245
第 24 章	脉动阵列的并行处理	246
24.1	矩阵和向量乘法的并行处理	246
24.2	矩阵乘法的并行处理	247
24.3	带状矩阵的并行乘法	249
	习题	252
第 25 章	计算几何	253
25.1	关于线段问题	253
25.2	求凸包问题	257
	习题	259
第 26 章	NP 完备理论	260
26.1	确定型图灵机	260
26.2	可满足性问题	263
26.3	非确定型图灵机与 Cook 定理	265
26.4	几个 NP 完备的例子	269
26.5	复杂度类	277
	习题	279
第 27 章	近似算法	281
27.1	任务安排的近似算法	281
27.2	装箱问题的近似算法	285
27.3	流动推销员问题的近似算法	287
27.4	顶点覆盖问题的近似算法	294
	习题	295
第 28 章	密码学简介	297

28.1 什么是密码?	297
28.2 背包公钥密码	300
28.3 RSA 公钥密码	301
28.4 数字签名	303
28.5 Hash 算法	303
习题	304
第 29 章 LP 问题的多项式算法	305
29.1 Klee 和 Minty 举例	305
29.2 Хаццял(哈奇扬)算法	308
29.3 Karmarkar 算法	311
习题	321

第1章 动态规划

1.1 最短路径问题

数学规划是研究最优化的一类数学问题,包含有线性规划,非线性规划等内容。和动态规划有什么关系呢?动态规划实际上是研究一类最优化问题的算法,应用范围十分广。下面通过若干实例,介绍如何将一个最优化问题通过动态规划来求解的基本原理。

如图 1.1.1,从 A_0 点要铺设一条管道到 A_6 点,中间必须经过 5 个中间站,第一站可以在 A_1, B_1 两地中任选一个,类似地,第二、三、四、五站可供选择的地点分别是: $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}, \{A_3, B_3, C_3\}, \{A_4, B_4, C_4\}, \{A_5, B_5\}$ 。连接两地间管道的距离(或造价)用连线上的数字表示,要求选一条从 A_0 到 A_6 的铺管线路,使总距离最短(或总造价最小)。

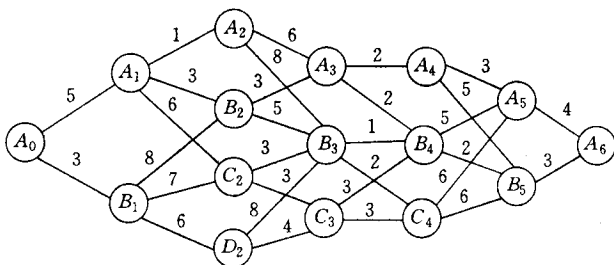


图 1.1.1

我们首先想到使用穷举法。在第一段,有两种路径选择: A_0A_1, A_0B_1 。在第二段,若选 A_0A_1 ,第二段路径有三种选择: A_1A_2, A_1B_2, A_1C_2 ;若选 A_0B_1 ,也有三种选择: B_1B_2, B_1C_2, B_1D_2 。所以两段共有 6 种选择。依次类推,从 A_0 到 A_6 共有 $2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 48$ 种不同路径。可通过 $48 \times 5 = 240$ 次加法,47 次比较,即通过各种可能方案的穷举,最后可求出从 A_0 到 A_6 的最短路径是:

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$$

相应的最短距离是 18。

但我们注意到最短路径有这样一个特性,即如果最短路径的第 k 站通过 P_k ,则这一最短路径在由 P_k 出发到达终点的那一部分路径,对于始点为 P_k 到终点的所有可能的路径来说,必定也是距离最短的。这一特性很容易证明。读者可自己来完成它。

根据最短路径这一特性,启发我们计算时从最后一段开始,从后向前逐步递推的方法,求出各点到 A_6 的最短路径,最后求得从 A_0 到 A_6 的最短路径。步骤如下:

$k=6$ 时

设 $f(A_5)$ 表示由 A_5 到 A_6 的最短距离, $f(B_5)$ 表示由 B_5 到 A_6 的最短距离,显然有:

$$f(A_5) = 4, \quad f(B_5) = 3.$$

$k=5$ 时

$$\begin{aligned} f(A_4) &= \min\{d(A_4, A_5) + f(A_5), d(A_4, B_5) + f(B_5)\} \\ &= \min\{\underline{3 + 4}, 5 + 3\} = 7 \end{aligned}$$

这里括号里的底线表示最小值所取的项。即 $f(A_4)$ 取的是 $A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$ ，而不是 $A_4 \rightarrow B_5 \rightarrow A_6$ 。以后同此，不再说明。

$$\begin{aligned} f(B_4) &= \min\{d(B_4, A_5) + f(A_5), d(B_4, B_5) + f(B_5)\} \\ &= \min\{5 + 4, \underline{2 + 3}\} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(C_4) &= \min\{d(C_4, A_5) + f(A_5), d(C_4, B_5) + f(B_5)\} \\ &= \min\{6 + 4, \underline{6 + 3}\} = 9 \end{aligned}$$

$k=4$ 时

$$\begin{aligned} f(A_3) &= \min\{d(A_3, A_4) + f(A_4), d(A_3, B_4) + f(B_4)\} \\ &= \min\{2 + 7, \underline{2 + 5}\} = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(B_3) &= \min\{d(B_3, B_4) + f(B_4), d(B_3, C_4) + f(C_4)\} \\ &= \min\{\underline{1 + 5}, 2 + 9\} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(C_3) &= \min\{d(C_3, B_4) + f(B_4), d(C_3, C_4) + f(C_4)\} \\ &= \min\{\underline{3 + 5}, 3 + 9\} = 8 \end{aligned}$$

$k=3$ 时

$$\begin{aligned} f(A_2) &= \min\{d(A_2, A_3) + f(A_3), d(A_2, B_3) + f(B_3)\} \\ &= \min\{\underline{6 + 7}, 8 + 6\} = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(B_2) &= \min\{d(B_2, A_3) + f(A_3), d(B_2, B_3) + f(B_3)\} \\ &= \min\{\underline{3 + 7}, 5 + 6\} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(C_2) &= \min\{d(C_2, B_3) + f(B_3), d(C_2, C_3) + f(C_3)\} \\ &= \min\{\underline{3 + 6}, 3 + 8\} = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(D_2) &= \min\{d(D_2, B_3) + f(B_3), d(D_2, C_3) + f(C_3)\} \\ &= \min\{8 + 6, \underline{4 + 8}\} = 12 \end{aligned}$$

$k=2$ 时

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \min\{d(A_1, A_2) + f(A_2), d(A_1, B_2) + f(B_2), d(A_1, C_2) + f(C_2)\} \\ &= \min\{1 + 13, \underline{3 + 10}, 6 + 9\} = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(B_1) &= \min\{d(B_1, B_2) + f(B_2), d(B_1, C_2) + f(C_2), d(B_1, D_2) + f(D_2)\} \\ &= \min\{8 + 10, \underline{7 + 9}, 6 + 12\} = 16 \end{aligned}$$

$k=1$ 时

$$\begin{aligned} f(A_0) &= \min\{d(A_0, A_1) + f(A_1), d(A_0, B_1) + f(B_1)\} \\ &= \min\{\underline{5 + 13}, 3 + 16\} = 18 \end{aligned}$$

上述计算结果可表示如图 1.1.2, 其中 $\textcircled{A_5}$ 表示从 A_5 出发到终点的最短路径长度为

4, 即 $A_5 \xrightarrow{4} A_6$, 余此类推。

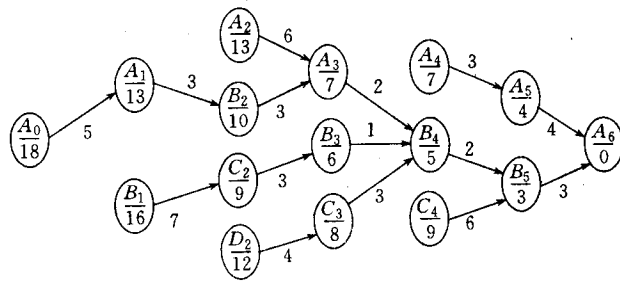


图 1.1.2

一共要用 15 次比较运算和 28 次加法运算就可得到从 A_0 到 A_6 的最短距离,而且在这过程中,还得到其它各点到 A_6 的最短路径和最短距离。

一般地,若我们考虑如图 1.1.3 所示从始点 $O(0,0)$ 到终点 $E(m,n)$ 的最短路径(也称格路)问题。若用穷举法,则需

$$(m+n-1)C(n+m,n) = \frac{(n+m-1)(n+m)!}{n!m!}$$

次加法及 $\frac{(n+m)!}{n!m!} - 1$ 次比较运算。组合数 $C(n+m,n)$

为从 O 点到 E 点的路径数,这是考虑到图 1.1.3 的每一格路和 m 个 x, n 个 y 的任一排列一一对应。比如排列 $\underbrace{x \cdots x}_m \underbrace{y \cdots y}_n$, 对应于从 O 点先沿 x 方向走 m 块,后沿 y 方向走 n 块到 E 点。相当于由 m 个 y, n 个 x 构成的长度为 $m+n$ 的符号串数目,即从 $m+n$ 个格子中任选 m 个格子作为 x ,其余为 y 的方案数。

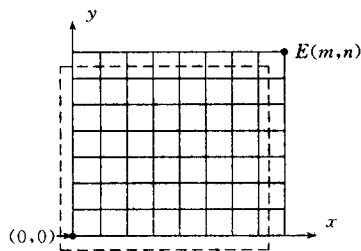


图 1.1.3

但用后一种方法只需 $2mn+m+n$ 次加法及 mn 次比较就够了。不难知道图 1.1.3 由虚线包围的矩形域内的点要作 2 次比较,2 次加法,在这以外的点只需 1 次加法,无需作比较。

当 $m=n$ 时,穷举法需进行 $(2n-1) \cdot (2n)! / (n!)^2$ 次加法, $(2n)! / (n!)^2 - 1$ 次比较。后一种方法只要作 $2(n^2+n)$ 次加法, n^2 次比较。由 Stirling 公式

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

可知穷举法的运算量是 n 的指数函数,后一种算法则只是 n^2 量级。

1.2 最佳原理

从前节例子知道:一个最短路径问题可变成多段判决问题,利用了最短路径的一个性质:从起点到终点的最短路径也是该路径上各点到终点的最短路径。与此类似的问题

很多,故可抽象成组合优化问题中的一个重要的最佳原理:假设为了解决某一优化问题,需要依次作出 n 个决策 D_1, D_2, \dots, D_n , 如若这个决策序列是最优的,对于任何一个整数 $k, 1 < k < n$, 不论前面 k 个决策是怎样的,以后的最优决策只取决于由前面决策所确定的当前状态,即以以后的决策 $D_{k+1}, D_{k+2}, \dots, D_n$ 也是最优的。

本章的这节和以后各节主要举例说明如何灵活运用最佳原理。动态规划与线性、非线性规划不尽相同,实际它是算法的一种。最佳原理说起来很简单,如何灵活应用它则又是另一回事。它用途很广,利用它来解决一个新问题的本身也就是一种创造。我们希望下面的例子能帮助读者掌握它的技巧,并达到举一反三。

例 1 某工厂购进 1000 台机器,准备生产 P_1, P_2 两种产品,若生产产品 P_1 , 每台机器每年可收入 50 千元,损坏率达 65%;若生产产品 P_2 , 每台机器年收入为 40 千元,但损坏率仅有 40%;估计三年后将有新的机器出现,旧的机器将全部淘汰,试问应如何安排生产,使三年内收入最多? 计划以一年为周期。

以上的问题原可以化为整数规划问题求解。设 x_1, x_2, x_3 分别是第 1、2、3 年中用以生产产品 P_1 的机器数, y_1, y_2, y_3 分别是第 1、2、3 年用以生产产品 P_2 的机器数。则得到求

$$\max z = 50000(x_1 + x_2 + x_3) + 40000(y_1 + y_2 + y_3)$$

约束条件

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 1000 \\ x_2 + y_2 = 0.35x_1 + 0.60y_1 \\ x_3 + y_3 = 0.35x_2 + 0.60y_2 \end{cases}$$

$x_i, y_i \geq 0$ 的整数, $i=1, 2, 3$

现应用最佳原理变成多段判决问题如下:

设 $P_i(n)$ 为 n 台机器在以后 i 年内的最大收益。若只考虑安排一年的生产, x_3 为生产 P_1 的机器数目。从 $i=1$ 开始,即一年后的最大收益为:

$$\begin{aligned} P_1(n) &= \max_{0 \leq x_3 \leq n} \{50000x_3 + 40000(n - x_3)\} \\ &= 50000n \end{aligned}$$

即

$$x_3 = n$$

进而考虑 $i=2$, 即若考虑两年的生产, x_2 为两年中第一年生产 P_1 的机器数目, 则一年后机器剩余数为 $0.35x_2 + 0.60(n - x_2)$, 故有

$$P_2(n) = \max_{0 \leq x_2 \leq n} \{50000x_2 + 40000(n - x_2) + P_1(0.35x_2 + 0.60(n - x_2))\}$$

由于 $P_1(k) = 50000k$, 故

$$\begin{aligned} P_2(n) &= \max_{0 \leq x_2 \leq n} \{50000x_2 + 40000n - 40000x_2 + 50000(0.60n - 0.25x_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq n} \{-2500x_2 + 70000n\} \\ &= 70000n \end{aligned}$$

即

$$x_2 = 0$$

最后考虑 $i=3$, 若考虑三年的生产, 第一年生产 P_1 的机器数目设为 x_1 , 则有

$$P_3(1000) = \max_{0 \leq x_1 \leq 1000} \{50000x_1 + 40000(1000 - x_1) + P_2(0.35x_1 + 0.60(1000 - x_1))\}$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{0 \leq x_1 \leq 1000} \{50000x_1 + 4000000 - 40000x_1 + 70000(0.35x_1 + 600 - 0.60x_1)\} \\
&= \max_{0 \leq x_1 \leq 1000} \{4000000 + 4200000 + 10000x_1 - 17500x_1\} \\
&= \max_{0 \leq x_1 \leq 1000} \{8200000 - 7500x_1\} \\
&= 82000000
\end{aligned}$$

即 $x_1 = 0$

故三年中生产计划要安排如下:

第一年 1000 台机器一律生产产品 P_2 ,

第二年把余下的机器继续生产产品 P_2 ,

第三年把所有的机器改为生产产品 P_1 。

总收入为 82000000 元。

另外,有些数学问题也可以利用最佳原理将它转化为多段判决来解决。

例 2 在 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ 的约束条件下,求 x_1, x_2, \dots, x_n 的值使

$$z = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}$$

取极大值。

$$f_1(a) = \max_{0 < x \leq a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

$$f_2(a) = \max_{0 \leq x \leq a} (\sqrt{x} + f_1(a-x)) = \max_{0 \leq x \leq a} (\sqrt{x} + \sqrt{a-x})$$

令 $y = \sqrt{x} + \sqrt{a-x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x(a-x)}} = 0$$

$$a-x = x, \quad x = \frac{a}{2}, \quad \text{即 } x_1 = x_2 = x = \frac{a}{2}。$$

所以

$$f_2(a) = \left[\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{a}{2}} \right] = \sqrt{2a}$$

同样

$$\begin{aligned}
f_3(a) &= \max_{0 \leq x \leq a} (\sqrt{x} + f_2(a-x)) \\
&= \max_{0 \leq x \leq a} (\sqrt{x} + \sqrt{2(a-x)})
\end{aligned}$$

令 $y = \sqrt{x} + \sqrt{2(a-x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{2x}}{2\sqrt{2}\sqrt{x(a-x)}} = 0$$

$$a-x = 2x, \quad x = \frac{a}{3}, \quad \text{即 } x_1 = x_2 = x_3 = \frac{a}{3}。$$

故

$$f_3(a) = \sqrt{\frac{1}{3}a} + 2\sqrt{\frac{1}{3}a} = \sqrt{3a}$$

用数学归纳法可以证明有:

$$f_n(a) = \sqrt{na}, x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}$$

设 $f_{n-1}(a) = \sqrt{(n-1)a}$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{a}{(n-1)}$, 成立,

$$\begin{aligned} f_n(a) &= \max_{0 \leq x \leq a} (\sqrt{x} + f_{n-1}(a-x)) \\ &= \max_{0 \leq x \leq a} (\sqrt{x} + \sqrt{(n-1)(a-x)}) \end{aligned}$$

令 $y = \sqrt{x} + \sqrt{(n-1)(a-x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{(n-1)x}}{2\sqrt{x(a-x)}} = 0$$

$$(n-1)x = a-x, \quad x = \frac{a}{n}$$

所以

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \cdots = x_n &= \frac{a}{n} \\ f_n(a) &= \sqrt{\frac{a}{n}} + (n-1)\sqrt{\frac{a}{n}} = \sqrt{na} \end{aligned}$$

例 3 把正数 a 分成 n 个部分, 使其乘积为最大。即 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$, 使 $P_n(a) = x_1 x_2 \cdots x_n$ 达到最大。

设 $P_n(a)$ 为将 $a > 0$ 分成 n 个部分的乘积的最大值。比如:

$$\begin{aligned} P_1(a) &= a \\ P_2(a) &= \max_{0 \leq x \leq a} \{xP_1(a-x)\} \\ &= \max_{0 \leq x \leq a} \{x(a-x)\} \end{aligned}$$

令 $y = x(a-x)$, $y' = a - 2x$, 即 $x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$

所以, $P_2(a) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

利用最佳原理得:

$$P_n(a) = \max_{0 \leq x \leq a} \{xP_{n-1}(a-x)\}$$

并通过数学归纳法证明:

$$x_n^* = \frac{a}{n}, \quad P_n(a) = \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

由于 $P_1(a) = a$ 成立。

设 $P_{n-1}(x) = \left(\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}$, $x_{n-1}^* = \frac{a}{n-1}$ 成立, 则

$$P_n(a) = \max_{0 \leq x \leq a} \left\{ x \left(\frac{a-x}{n-1} \right)^{n-1} \right\}$$

$$y = x \left(\frac{a-x}{n-1} \right)^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{n-1} \right)^{n-2} \left[\frac{a-nx}{n-1} \right] = 0$$

所以 $x_n^* = \frac{a}{n}$, 即 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{a}{n}$

$$P_n(a) = \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{a}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

下面我们再来看一个离散型的问题, 原理和上面的一样。

例 4 资源分配问题

设有资源 a 分配给 n 个项目, $g_i(x)$ 为将数量为 x 的资源分配给项目 i 所能得到的利润, $i=1, 2, \dots, n$ 最合理的资源分配导致解下面的问题:

$$\max z = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_n(x_n)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

若 $g_i(x_i)$ 是 x_i 的线性函数, 则是一般的线性规划问题。下面介绍如何利用最佳原理将其转化为多段判决问题:

设 $f_k(a)$ 为资源 a 分配给前 k 个项目所得的最大利润。

$$f_1(a) = \max_{0 \leq x \leq a} g_1(x)$$

$$f_2(a) = \max_{0 \leq x \leq a} \{g_2(x) + f_1(a - x)\}$$

$$f_3(a) = \max_{0 \leq x \leq a} \{g_3(x) + f_2(a - x)\}$$

.....

$$f_n(a) = \max_{0 \leq x \leq a} \{g_n(x) + f_{n-1}(a - x)\}$$

例如有 7 万元资本投资到 A、B、C 三种项目, 其利润见表 1.2.1。

表 1.2.1

项目 \ 投资额	1	2	3	4	5	6	7
A	0.12	0.15	0.20	0.21	0.24	0.30	0.36
B	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.33	0.34
C	0.18	0.22	0.26	0.28	0.30	0.34	0.36

1. 考虑投入产品 A 的生产资金 a 与利润 $f_1(a)$ 的关系见表 1.2.2。

表 1.2.2

$f \ a$	1	2	3	4	5	6	7
$f_1(a)$	0.12	0.15	0.20	0.21	0.24	0.30	0.36

2. 若考虑投到 A、B 两种产品的生产, 资金 a 与利润 $f_2(a)$ 关系如下, 其中 x_2 为投到产品 B 的生产资金。

$$f_2(a) = \max_{0 \leq x_2 \leq a} \{g_2(x_2) + f_1(a - x_2)\}$$

其利润见表 1.2.3。其中 * 表示利润最大的状态。

表 1.2.3

$x_2 \backslash a$	0	1	2	3	4	5	6	7	$f_2(a)$
1	0.12	0.22*							0.22
2	0.15	0.12+0.22 =0.34*	0.24						0.34
3	0.20	0.15+0.22 =0.37*	0.12+0.24 =0.36	0.26					0.37
4	0.21	0.20+0.22 =0.42*	0.15+0.24 =0.39	0.12+0.26 =0.38	0.28				0.42
5	0.24	0.21+0.22 =0.43	0.20+0.24 =0.44*	0.15+0.26 =0.41	0.12+0.28 =0.40	0.30			0.44
6	0.30	0.24+0.22 =0.46	0.21+0.24 =0.45	0.20+0.26 =0.46*	0.15+0.28 =0.43	0.12+0.30 =0.42	0.33		0.46
7	0.30	0.30+0.22 =0.52*	0.24+0.24 =0.48	0.21+0.26 =0.47	0.20+0.28 =0.48	0.15+0.30 =0.45	0.12+0.33 =0.45	0.34	0.52

3. 考虑投入 7 万元资金于三种产品 A、B、C 的生产, 利润与资金关系如下:

$$f_3(7) = \max_{0 \leq x_3 \leq 7} \{g_3(x_3) + f_2(7 - x_3)\}$$

其中 x_3 为投入到产品 C 的生产资金。利润表如表 1.2.4。

表 1.2.4

x_3	0	1	2	3	4	5	6	7
$g_3(x)$	0.00	0.18	0.22	0.26	0.28	0.30	0.34	0.36
$f_2(7-x)$	0.52	0.46	0.44	0.42	0.37	0.34	0.22	0.00
$g_3(x) + f_2(7-x)$	0.52	0.64	0.66	0.68	0.65	0.64	0.56	0.36

所以

$$f_3(7) = \max_{0 \leq x_3 \leq 7} \{g_3(x) + f_2(7 - x)\} = 0.68$$

即可获得最大利润 0.68 万元。从表 1.2.4 知 $x_3=3$ 。

$$f_2(7 - x_3) = f_2(4)$$

从表 1.2.3 可知 $f_2(4)=0.42$, 而且 $x_2=1$, 故 $x_1=3$ 。

例 5 有 n 块银币, 已知其中有一块是伪币, 它比正常的银币轻。现有一天平, 试求通过天平找出其中假币。要求在最坏情况下用天平的次数最少。

n 块银币取出 $2k$ 块来。天平两边各 k 块。有两种情况, 一是天平两边不平衡, 则伪币

必在轻的 k 个中,若天平两边相平衡,则伪币必在余下的 $n-2k$ 个中。故问题导至求动态规划问题:

$$S(n) = \min \{ \max_{1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \{S(k), S(n-2k)\} \} + 1$$

$$S(0) = 0, S(1) = 0$$

$n=2$ 时,

$$S(2) = \min \{ \max \{S(1), S(0)\} \} + 1$$

$$= \min \{ \max \{0, 0\} \} + 1$$

$$= 1$$

这说明 2 块银币用一次天平就够了。 $S(1)=0$ 。据题意它就是伪币,无需用天平。

$n=3$ 时

$$S(3) = \min \{ \max \{S(1), S(1)\} \} + 1$$

$$= 1$$

也就是说 3 块银币也只要用一次天平。有两种情况,若天平两边各 1 块,但不相等,则伪币为轻的一端;若相等,则伪币为余下的一块。

$n=4$ 时,

$$S(4) = \min \{ \max \{S(1), S(2)\}, \max \{S(2), S(0)\} \} + 1$$

$$= \min \{ \max \{0, 1\}, \max \{1, 0\} \} + 1$$

$$= 2$$

此时要用两次天平。也有两种情况,一是取 2 块,天平两边各一块,若不等,伪币一次找到;若相等,伪币在余下的两块中。考虑到最坏情况,故需要作两次比较。另一种取 4 块,天平两端各两块,必有一边轻的,伪币在轻的一边故任何情况都得用两次天平。

$n=5$ 时,

$$S(5) = \min \{ \max \{S(1), S(3)\}, \max \{S(2), S(1)\} \} + 1$$

$$= \min \{ \max \{0, 1\}, \max \{1, 0\} \} + 1$$

$$= 2$$

也有两种情况,但都要用 2 次天平。

$n=6$ 时,

$$S(6) = \min \{ \max \{S(1), S(4)\}, \max \{S(2), S(2)\}, \max \{S(3), S(0)\} \} + 1$$

$$= \min \{ 2, 1^*, 1^* \} + 1 = 2$$

* 表示最小项。可见 $n=6$ 时可采用两种策略:一是取 4 块,天平两端各两块,余下两块。这时仍用两次天平。也可以在天平两端各 3 块,这也要用两次天平。但不能用天平两边各一块。若不等,一次便找出伪币,但若出现相等,伪币在余下的 4 块中,最坏情况要用 3 次天平。

$n=7$ 时,

$$S(7) = \min \{ \max \{S(1), S(5)\}, \max \{S(2), S(3)\}, \max \{S(3), S(1)\} \} + 1$$

$$= \min \{ \max \{0, 2\}, \max \{1, 1\}, \max \{1, 0\} \} + 1$$

$$= \min \{ 2, 1^*, 1^* \} + 1 = 2$$