计算机算法导引

——设计与分析

卢开澄　等编著

清华大学出版社

目　录

第1章 动态规划

1.1 最短路径问题

数学规划是研究最优化的一类数学问题，包含有线性规划，非线性规划等内容。和动态规划有什么关系呢？动态规划实际上是研究一类最优化问题的算法，应用范围十分广。下面通过若干实例，介绍如何将一个最优化问题通过动态规划来求解的基本原理。

如图 1.1.1，从 A_0 点要铺设一条管道到 A_6 点，中间必须经过 5 个中间站，第一站可以在 A_1，B_1 两地中任选一个，类似地，第二、三、四、五站可供选择的地点分别是：$\{A_2,B_2,C_2,D_2\}$，$\{A_3,B_3,C_3\}$，$\{A_4,B_4,C_4\}$，$\{A_5,B_5\}$。连接两地间管道的距离（或造价）用连线上的数字表示，要求选一条从 A_0 到 A_6 的铺管线路，使总距离最短（或总造价最小）。

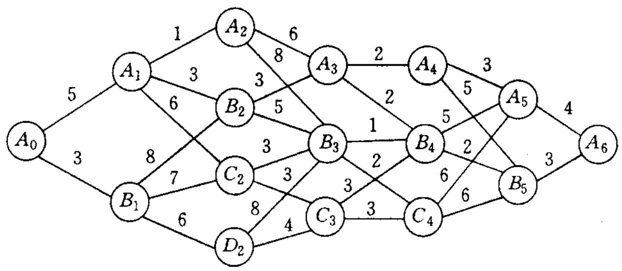

图 1.1.1

我们首先想到使用穷举法。在第一段，有两种路径选择：A_0A_1、A_0B_1。在第二段，若选 A_0A_1，第二段路径有三种选择：A_1A_2、A_1B_2、A_1C_2；若选 A_0B_1，也有三种选择：B_1B_2、B_1C_2、B_1D_2。所以两段共有 6 种选择。依次类推，从 A_0 到 A_6 共有 $2\times3\times2\times2\times2\times1=48$ 种不同路径。可通过 $48\times5=240$ 次加法，47 次比较，即通过各种可能方案的穷举，最后可求出从 A_0 到 A_6 的最短路径是：

$$A_0\rightarrow A_1\rightarrow B_2\rightarrow A_3\rightarrow B_4\rightarrow B_5\rightarrow A_6$$

相应的最短距离是 18。

但我们注意到最短路径有这样一个特性，即如果最短路径的第 k 站通过 P_k，则这一最短路径在由 P_k 出发到达终点的那一部分路径，对于始点为 P_k 到终点的所有可能的路径来说，必定也是距离最短的。这一特性很容易证明。读者可自己来完成它。

根据最短路径这一特性，启发我们计算时从最后一段开始，从后向前逐步递推的方法，求出各点到 A_6 的最短路径，最后求得从 A_0 到 A_6 的最短路径。步骤如下：

$k=6$ 时

设 $f(A_5)$ 表示由 A_5 到 A_6 的最短距离，$f(B_5)$ 表示由 B_5 到 A_6 的最短距离，显然有：

$$f(A_5) = 4, \qquad f(B_5) = 3。$$

$k=5$ 时

$$\begin{aligned} f(A_4) &= \min\{d(A_4,A_5) + f(A_5), d(A_4,B_5) + f(B_5)\} \\ &= \min\{\underline{3+4}, 5+3\} = 7 \end{aligned}$$

这里括号里的底线____表示最小值所取的项。即 $f(A_4)$取的是 $A_4 \to A_5 \to A_6$，而不是 $A_4 \to B_5 \to A_6$。以后同此，不再说明。

$$\begin{aligned} f(B_4) &= \min\{d(B_4,A_5) + f(A_5), d(B_4,B_5) + f(B_5)\} \\ &= \min\{5+4, \underline{2+3}\} = 5 \\ f(C_4) &= \min\{d(C_4,A_5) + f(A_5), d(C_4,B_5) + f(B_5)\} \\ &= \min\{6+4, \underline{6+3}\} = 9 \end{aligned}$$

$k=4$ 时

$$\begin{aligned} f(A_3) &= \min\{d(A_3,A_4) + f(A_4), d(A_3,B_4) + f(B_4)\} \\ &= \min\{2+7, \underline{2+5}\} = 7 \\ f(B_3) &= \min\{d(B_3,B_4) + f(B_4), d(B_3,C_4) + f(C_4)\} \\ &= \min\{\underline{1+5}, 2+9\} = 6 \\ f(C_3) &= \min\{d(C_3,B_4) + f(B_4), d(C_3,C_4) + f(C_4)\} \\ &= \min\{\underline{3+5}, 3+9\} = 8 \end{aligned}$$

$k=3$ 时

$$\begin{aligned} f(A_2) &= \min\{d(A_2,A_3) + f(A_3), d(A_2,B_3) + f(B_3)\} \\ &= \min\{\underline{6+7}, 8+6\} = 13 \\ f(B_2) &= \min\{d(B_2,A_3) + f(A_3), d(B_2,B_3) + f(B_3)\} \\ &= \min\{\underline{3+7}, 5+6\} = 10 \\ f(C_2) &= \min\{d(C_2,B_3) + f(B_3), d(C_2,C_3) + f(C_3)\} \\ &= \min\{\underline{3+6}, 3+8\} = 9 \\ f(D_2) &= \min\{d(D_2,B_3) + f(B_3), d(D_2,C_3) + f(C_3)\} \\ &= \min\{8+6, \underline{4+8}\} = 12 \end{aligned}$$

$k=2$ 时

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \min\{d(A_1,A_2) + f(A_2), d(A_1,B_2) + f(B_2), d(A_1,C_2) + f(C_2)\} \\ &= \min\{1+13, \underline{3+10}, 6+9\} = 13 \\ f(B_1) &= \min\{d(B_1,B_2) + f(B_2), d(B_1,C_2) + f(C_2), d(B_1,D_2) + f(D_2)\} \\ &= \min\{8+10, \underline{7+9}, 6+12\} = 16 \end{aligned}$$

$k=1$ 时

$$\begin{aligned} f(A_0) &= \min\{d(A_0,A_1) + f(A_1), d(A_0,B_1) + f(B_1)\} \\ &= \min\{\underline{5+13}, 3+16\} = 18 \end{aligned}$$

上述计算结果可表示如图 1.1.2，其中$\frac{A_5}{4}$表示从 A_5 出发到终点的最短路径长度为 4，即 $A_5 \xrightarrow{4} A_6$，余此类推。

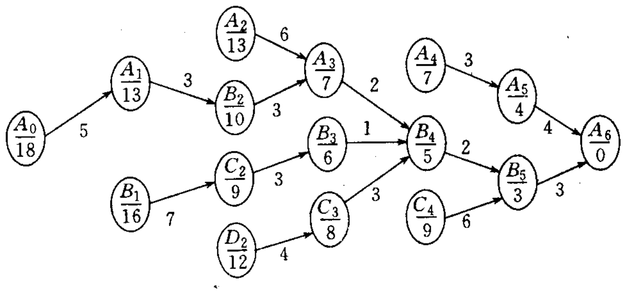

图 1.1.2

一共要用 15 次比较运算和 28 次加法运算就可得到从 A_0 到 A_6 的最短距离，而且在这过程中，还得到其它各点到 A_6 的最短路径和最短距离。

一般地，若我们考虑如图 1.1.3 所示从始点 $O(0,0)$ 到终点 $E(m,n)$ 的最短路径（也称格路）问题。若用穷举法，则需

$$(m+n-1)C(n+m,n)=\frac{(n+m-1)(n+m)!}{n!m!}$$

次加法及 $\frac{(n+m)!}{n!\ m!}-1$ 次比较运算。组合数 $C(n+m,n)$ 为从 O 点到 E 点的路径数，这是考虑到图 1.1.3 的每一格路和 m 个 x，n 个 y 的任一排列一一对应。比如排列 $\underbrace{x\ x\cdots x}_{m个}\underbrace{y\ y\cdots y}_{n个}$，对应于从 O 点先沿 x 方向走 m 块，后沿 y 方向走 n 块到 E 点。相当于由 m 个 y，n 个 x 构成的长度为 $m+n$ 的符号串数目，即从 $m+n$ 个格子中任选 m 个格子作为 x、其余为 y 的方案数。

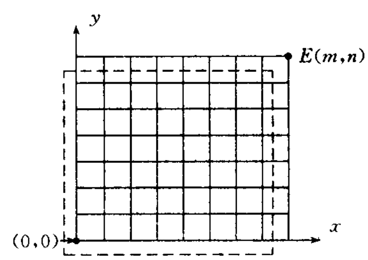

图 1.1.3

但用后一种方法只需 $2mn+m+n$ 次加法及 mn 次比较就够了。不难知道图 1.1.3 由虚线包围的矩形域内的点要作 2 次比较，2 次加法，在这以外的点只需 1 次加法，无需作比较。

当 $m=n$ 时，穷举法需进行 $(2n-1)\cdot(2n)!\ /(n!)^2$ 次加法，$(2n)!\ /(n!)^2-1$ 次比较。后一种方法只要作 $2(n^2+n)$ 次加法，n^2 次比较。由 Stirling 公式

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

可知穷举法的运算量是 n 的指数函数，后一种算法则只是 n^2 量级。

1.2 最佳原理

从前节例子知道：一个最短路径问题可变成多段判决问题，利用了最短路径的一个性质：从起点到终点的最短路径也是该路径上各点到终点的最短路径。与此类似的问题

很多，故可抽象成组合优化问题中的一个重要的最佳原理：假设为了解决某一优化问题，需要依次作出 n 个决策 $D_1,D_2,\cdots,D_n$，如若这个决策序列是最优的，对于任何一个整数 k，$1<k<n$，不论前面 k 个决策是怎样的，以后的最优决策只取决于由前面决策所确定的当前状态，即以后的决策 $D_{k+1},D_{k+2},\cdots,D_n$ 也是最优的。

本章的这节和以后各节主要举例说明如何灵活运用最佳原理。动态规划与线性、非线性规划不尽相同，实际它是算法的一种。最佳原理说起来很简单，如何灵活应用它则又是另一回事。它用途很广，利用它来解决一个新问题的本身也就是一种创造。我们希望下面的例子能帮助读者掌握它的技巧，并达到举一反三。

例 1 某工厂购进 1000 台机器，准备生产 P_1、P_2 两种产品，若生产产品 P_1，每台机器每年可收入 50 千元，损坏率达 65%；若生产产品 P_2，每台机器年收入为 40 千元，但损坏率仅有 40%；估计三年后将有新的机器出现，旧的机器将全部淘汰，试问应如何安排生产，使三年内收入最多？计划以一年为周期。

以上的问题原可以化为整数规划问题求解。设 x_1,x_2,x_3 分别是第 1、2、3 年中用以生产产品 P_1 的机器数，y_1,y_2,y_3 分别是第 1、2、3 年用以生产产品 P_2 的机器数。则得到求

$$\max z = 50000(x_1+x_2+x_3)+40000(y_1+y_2+y_3)$$

约束条件

$$\begin{cases} x_1+y_1=1000 \\ x_2+y_2=0.35x_1+0.60y_1 \\ x_3+y_3=0.35x_2+0.60y_2 \end{cases}$$

$x_i,y_i\geqslant 0$ 的整数，$i=1,2,3$

现应用最佳原理变成多段判决问题如下：

设 $P_i(n)$ 为 n 台机器在以后 i 年内的最大收益。若只考虑安排一年的生产，x_3 为生产 P_1 的机器数目。从 $i=1$ 开始，即一年后的最大收益为：

$$P_1(n)=\max_{0\leqslant x_3\leqslant n}\{50000x_3+40000(n-x_3)\}$$
$$=50000n$$

即
$$x_3=n$$

进而考虑 $i=2$，即若考虑两年的生产，x_2 为两年中第一年生产 P_1 的机器数目，则一年后机器剩余数为 $0.35x_2+0.60(n-x_2)$，故有

$$P_2(n)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant n}\{50000x_2+40000(n-x_2)+P_1(0.35x_2+0.60(n-x_2))\}$$

由于 $P_1(k)=50000k$，故

$$P_2(n)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant n}\{50000x_2+40000n-40000x_2+50000(0.60n-0.25x_2)\}$$
$$=\max_{0\leqslant x_2\leqslant n}\{-2500x_2+70000n\}$$
$$=70000n$$

即
$$x_2=0$$

最后考虑 $i=3$，若考虑三年的生产，第一年生产 P_1 的机器数目设为 x_1，则有

$$P_3(1000)=\max_{0\leqslant x_1\leqslant 1000}\{50000x_1+40000(1000-x_1)+P_2(0.35x_1+0.60(1000-x_1))\}$$

$$=\max_{0\leq x_1\leq 1000}\{50000x_1+40000000-40000x_1+70000(0.35x_1+600-0.60x_1)\}$$

$$=\max_{0\leq x_1\leq 1000}\{40000000+42000000+10000x_1-17500x_1\}$$

$$=\max_{0\leq x_1\leq 1000}\{82000000-7500x_1\}$$

$$=82000000$$

即 $$x_1=0$$

故三年中生产计划要安排如下：

第一年 1000 台机器一律生产产品 P_2，

第二年把余下的机器继续生产产品 P_2，

第三年把所有的机器改为生产产品 P_1。

总收入为 82000000 元。

另外，有些数学问题也可以利用最佳原理将它转化为多段判决来解决。

例 2 在 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ 的约束条件下，求 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值使

$$z=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}$$

取极大值。

$$f_1(a)=\max_{0\leq x\leq a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$$

$$f_2(a)=\max_{0\leq x\leq a}(\sqrt{x}+f_1(a-x))=\max_{0\leq x\leq a}(\sqrt{x}+\sqrt{a-x})$$

令 $y=\sqrt{x}+\sqrt{a-x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x(a-x)}}=0$$

$$a-x=x,\quad x=\frac{a}{2},\quad \text{即 } x_1=x_2=x=\frac{a}{2}。$$

所以 $$f_2(a)=\left(\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=\sqrt{2a}$$

同样

$$f_3(a)=\max_{0\leq x\leq a}(\sqrt{x}+f_2(a-x))$$

$$=\max_{0\leq x\leq a}(\sqrt{x}+\sqrt{2(a-x)})$$

令 $y=\sqrt{x}+\sqrt{2(a-x)}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{2x}}{2\sqrt{2}\sqrt{x(a-x)}}=0$$

$$a-x=2x,\ x=\frac{a}{3},\quad \text{即}\quad x_1=x_2=x_3=\frac{a}{3}。$$

故 $$f_3(a)=\sqrt{\frac{1}{3}a}+2\sqrt{\frac{1}{3}a}=\sqrt{3a}$$

用数学归纳法可以证明有：

$$f_n(a) = \sqrt{na}, x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}$$

设 $f_{n-1}(a) = \sqrt{(n-1)a}$，$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{a}{(n-1)}$，成立，

$$\begin{aligned} f_n(a) &= \max_{0 \leqslant x \leqslant a}\left(\sqrt{x} + f_{n-1}(a-x)\right) \\ &= \max_{0 \leqslant x \leqslant a}\left(\sqrt{x} + \sqrt{(n-1)(a-x)}\right) \end{aligned}$$

令 $y = \sqrt{x} + \sqrt{(n-1)(a-x)}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{(n-1)x}}{2\sqrt{x(a-x)}} = 0$$

$$(n-1)x = a - x, \quad x = \frac{a}{n}$$

所以
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}$$

$$f_n(a) = \sqrt{\frac{a}{n}} + (n-1)\sqrt{\frac{a}{n}} = \sqrt{na}$$

例 3 把正数 a 分成 n 个部分，使其乘积为最大。即 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$，使 $P_n(a) = x_1 x_2 \cdots x_n$ 达到最大。

设 $P_n(a)$ 为将 $a > 0$ 分成 n 个部分的乘积的最大值。比如：

$$\begin{aligned} P_1(a) &= a \\ P_2(a) &= \max_{0 \leqslant x \leqslant a}\{xP_1(a-x)\} \\ &= \max_{0 \leqslant x \leqslant a}\{x(a-x)\} \end{aligned}$$

令 $y = x(a-x)$，$y' = a - 2x$，即 $x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$

所以，
$$P_2(a) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

利用最佳原理得：

$$P_n(a) = \max_{0 \leqslant x \leqslant a}\{xP_{n-1}(a-x)\}$$

并通过数学归纳法证明：

$$x_n^* = \frac{a}{n}, \quad P_n(a) = \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

由于 $P_1(a) = a$ 成立。

设 $P_{n-1}(x) = \left(\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}$，$x_{n-1}^* = \frac{a}{n-1}$成立，则

$$P_n(a) = \max_{0 \leqslant x \leqslant a}\left\{x\left(\frac{a-x}{n-1}\right)^{n-1}\right\}$$

$$y = x\left(\frac{a-x}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{x}{n-1}\right)^{n-2}\left[\frac{a-nx}{n-1}\right] = 0$$

所以 $x_n^* = \frac{a}{n}$，即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}$

$$P_n(a) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{a}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

下面我们再来看一个离散型的问题，原理和上面的一样。

例 4 资源分配问题

设有资源 a 分配给 n 个项目，$g_i(x)$ 为将数量为 x 的资源分配给项目 i 所能得到的利润，$i=1,2,\cdots,n$ 最合理的资源分配导致解下面的问题：

$$\max z = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_n(x_n)$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$$

$$x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n$$

若 $g_i(x_i)$ 是 x_i 的线性函数，则是一般的线性规划问题。下面介绍如何利用最佳原理将其转化为多段判决问题：

设 $f_k(n)$ 为资源 n 分配给前 k 个项目所得的最大利润。

$$f_1(a) = \max_{0\leqslant x\leqslant a} g_1(x)$$

$$f_2(a) = \max_{0\leqslant x\leqslant a} \{g_2(x) + f_1(a-x)\}$$

$$f_3(a) = \max_{0\leqslant x\leqslant a} \{g_3(x) + f_2(a-x)\}$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$f_n(a) = \max_{0\leqslant x\leqslant a} \{g_n(x) + f_{n-1}(a-x)\}$$

例如有 7 万元资本投资到 A、B、C 三种项目，其利润见表 1.2.1。

表 1.2.1

项目 \ 投资额	1	2	3	4	5	6	7
A	0.12	0.15	0.20	0.21	0.24	0.30	0.36
B	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.33	0.34
C	0.18	0.22	0.26	0.28	0.30	0.34	0.36

1. 考虑投入产品 A 的生产资金 a 与利润 $f_1(a)$ 的关系见表 1.2.2。

表 1.2.2

f \ a	1	2	3	4	5	6	7
$f_1(a)$	0.12	0.15	0.20	0.21	0.24	0.30	0.36

2. 若考虑投到 A、B 两种产品的生产，资金 a 与利润 $f_2(a)$ 关系如下，其中 x_2 为投到产品 B 的生产资金。

$$f_2(a) = \max_{0 \leq x_2 \leq a} \{g_2(x_2) + f_1(a - x_2)\}$$

其利润见表 1.2.3。其中 * 表示利润最大的状态。

表　1.2.3

a \ x_2	0	1	2	3	4	5	6	7	$f_2(a)$
1	0.12	0.22*							0.22
2	0.15	0.12+0.22 =0.34*	0.24						0.34
3	0.20	0.15+0.22 =0.37*	0.12+0.24 =0.36	0.26					0.37
4	0.21	0.20+0.22 =0.42*	0.15+0.24 =0.39	0.12+0.26 =0.38	0.28				0.42
5	0.24	0.21+0.22 =0.43	0.20+0.24 =0.44*	0.15+0.26 =0.41	0.12+0.28 =0.40	0.30			0.44
6	0.30	0.24+0.22 =0.46	0.21+0.24 =0.45	0.20+0.26 =0.46*	0.15+0.28 =0.43	0.12+0.30 =0.42	0.33		0.46
7	0.30	0.30+0.22 =0.52*	0.24+0.24 =0.48	0.21+0.26 =0.47	0.20+0.28 =0.48	0.15+0.30 =0.45	0.12+0.33 =0.45	0.34	0.52

3. 考虑投入 7 万元资金于三种产品 A、B、C 的生产，利润与资金关系如下：

$$f_3(7) = \max_{0 \leq x_3 \leq 7} \{g_3(x_3) + f_2(7 - x_3)\}$$

其中 x_3 为投入到产品 C 的生产资金。利润表如表 1.2.4。

表　1.2.4

x_3	0	1	2	3	4	5	6	7
$g_3(x)$	0.00	0.18	0.22	0.26	0.28	0.30	0.34	0.36
$f_2(7-x)$	0.52	0.46	0.44	0.42	0.37	0.34	0.22	0.00
$g_3(x)+f_2(7-x)$	0.52	0.64	0.66	0.68	0.65	0.64	0.56	0.36

所以

$$f_3(7) = \max_{0 \leq x_3 \leq 7} \{g_3(x) + f_2(7 - x)\} = 0.68$$

即可获得最大利润 0.68 万元。从表 1.2.4 知 $x_3=3$。

$$f_2(7 - x_3) = f_2(4)$$

从表 1.2.3 可知 $f_2(4)=0.42$，而且 $x_2=1$，故 $x_1=3$。

例 5　有 n 块银币，已知其中有一块是伪币，它比正常的银币轻。现有一天平，试求通过天平找出其中假币。要求在最坏情况下用天平的次数最少。

n 块银币取出 $2k$ 块来。天平两边各 k 块。有两种情况，一是天平两边不平衡，则伪币

必在轻的 k 个中，若天平两边相平衡，则伪币必在余下的 $n-2k$ 个中。故问题导至求动态规划问题：

$$S(n)=\min\{\max_{1\leqslant k\leqslant \lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\{S(k),S(n-2k)\}\}+1$$

$$S(0)=0,\ S(1)=0$$

$n=2$ 时，

$$\begin{aligned}S(2)&=\min\{\max\{S(1),S(0)\}\}+1\\&=\min\{\max\{0,0\}\}+1\\&=1\end{aligned}$$

这说明 2 块银币用一次天平就够了。$S(1)=0$。据题意它就是伪币，无需用天平。

$n=3$ 时

$$\begin{aligned}S(3)&=\min\{\max\{S(1),S(1)\}\}+1\\&=1\end{aligned}$$

也就是说 3 块银币也只要用一次天平。有两种情况，若天平两边各 1 块，但不相等，则伪币为轻的一端；若相等，则伪币为余下的一块。

$n=4$ 时，

$$\begin{aligned}S(4)&=\min\{\max\{S(1),S(2)\},\max\{S(2),S(0)\}\}+1\\&=\min\{\max\{0,1\},\max\{1,0\}\}+1\\&=2\end{aligned}$$

此时要用两次天平。也有两种情况，一是取 2 块，天平两边各一块，若不等，伪币一次找到；若相等，伪币在余下的两块中。考虑到最坏情况，故需要作两次比较。另一种取 4 块，天平两端各两块，必有一边轻的，伪币在轻的一边故任何情况都得用两次天平。

$n=5$ 时，

$$\begin{aligned}S(5)&=\min\{\max\{S(1),S(3)\},\max\{S(2),S(1)\}\}+1\\&=\min\{\max\{0,1\},\max\{1,0\}\}+1\\&=2\end{aligned}$$

也有两种情况，但都要用 2 次天平。

$n=6$ 时，

$$\begin{aligned}S(6)&=\min\{\max\{S(1),S(4)\},\max\{S(2),S(2)\},\max\{S(3),S(0)\}\}+1\\&=\min\{2,1^*,1^*\}+1=2\end{aligned}$$

* 表示最小项。可见 $n=6$ 时可采用两种策略：一是取 4 块，天平两端各两块，余下两块。这时仍用两次天平。也可以在天平两端各 3 块，这也要用两次天平。但不能用天平两边各一块。若不等，一次便找出伪币，但若出现相等，伪币在余下的 4 块中，最坏情况要用 3 次天平。

$n=7$ 时，

$$\begin{aligned}S(7)&=\min\{\max\{S(1),S(5)\},\max\{S(2),S(3)\},\max\{S(3),S(1)\}\}+1\\&=\min\{\max\{0,2\},\max\{1,1\},\max\{1,0\}\}+1\\&=\min\{2,1^*,1^*\}+1=2\end{aligned}$$