

地震波动力学理论讲义

应用地球物理专业

研究生适用

一九八三年二月

华东石油学院物探教研室

82 应用地球物理专业研究生

地震波动力学理论授课大纲

第一讲 拉普拉斯变换

拉氏变换定义。拉氏变换积分收敛条件。

拉氏逆变换积分收敛条件。利用留数定理求拉氏逆变换。拉氏变换的几个常用性质。某些简单函数的拉氏变换。

第二讲 拉氏积分近似展开式

近似展开式定义。拉普拉斯积分的近似展开式。沃特森定理及其应用。波前近似解。长时间稳态解。

第三讲 拉氏积分近似计算

拉普拉斯法。最陡降路法。例题。

第四讲 无限弹性介质中的球面波

波动方程的球面波解。球面波的合成。球面简谐波的积分公式。索墨菲积分。

附：付立叶-贝塞耳变换

第五讲 无限弹性介质中的柱面波

柱坐标系中的波动方程及其通解，柱面波合成。简谐震源柱面波积分表达式，轴对称与圆柱对称问题。

第六讲 球形空腔震源问题

控制方程及其初边值条件。问题的拉氏变换解。逆变换积分收敛条件。作用力为 $-6\sigma H(t)$ 的定解公式。波前近似解与稳态解。

第七讲 柱状空腔震源问题

控制方程及其初边值条件。问题的拉氏变换解。逆变换积分收敛条件。逆变换积分计标。波前近似解与稳态解。

第八讲 声波基本方程

运动方程。介质连续方程。状态方程。声波波动方程。速度位。边界条件的建立。两种液体分界面上平面波的反射与透射。

第九讲 格林函数

解微分方程的格林函数法。无界域求解标量波动方程的格林函数。格林函数的互易原理

。求解非齐次波动方程的格林函数法。波动方程的推迟位解。半无限空间中求解波动方程的格林函数。

第十讲 球面波的复变函数积分

Weyl 积分的推导。索墨菲积分的推导。射线参考表示的球面波积分推导。

第十一讲 球面波(声波)在平界面上的反射与透射

球面波入射时的波系统。球面入射波、球面反射波和球面透射波表达式。球面反射波的计标。球面反射波的一级近似值及其校正量。当 $\alpha_1 < \alpha_2$ 时对球面波积分的分析。

第十二讲 首波理论

当 $\alpha_1 < \alpha_2$ ，入射角大于临界角时球面波积分的计标。首波公式的近似形式。首波特莫分析。

第十三讲 半无限空间中的轴对称问题

集中作用力及其积分表达式。轴对称情况

下的波动方程及其通解。 λ 位函数。简谐作用力下的波动方程定解。简谐集中作用力下的波动方程定解。任意形状集中作用力下的波动方程定解。半无限空间中的波场分析。瑞雷面波。

第十讲 表面法向线源简切问题的积分变换解

控制方程及其初边值条件。拉普拉斯—付立叶双积分变换。付立叶逆变换积分及其 Cagniard-de-Hoop 解法。积分路径变换。Cagniard 路径选择。与纵波有关的位移拉氏变换及其逆变换。与横波有关的位移拉氏变换及其逆变换。与 Schmidt 波有关的位移拉氏变换及其逆变换。

自由表面上的位移场。瑞雷极美及其对积分的贡献。与瑞雷波有关的地面位移输出的计算。

表面切向线源简切问题的积分变换解。与 SH 波有关的位移计算。

自学专题

一、空间付立叶变换及其在求解波动方程时的应用。(§2-2)

二、波动方程的克其霍夫积分解。(§3-2, §3-3, §3-4)

三、平面波在半无限空间自由表面上的反射。(§4-1)

四、临界角外反射波及其特角。(§5-1)

五、平面波在多层介质中的反射与透射。(§5-2)

六、薄层反射波及反射系数计算。(§5-2-三)

七、粘弹性介质中的波。(§6-2)

地震波动力学理论

目 录

第一章 弹性动力学基本方程

§1-1, 应变分析

§1-2, 应力分析

§1-3, 应力与应变的关系

§1-4, 运动平衡方程式

§1-5, 弹性介质的机械能

第二章 弹性动力学中的基本波 P57

§2-1, 体波及其控制方程

§2-2, 均匀各向同性无限弹性介质中的
平面波§2-3, 均匀各向同性无限弹性介质中的
球面波

§2-4, 球面波的合成与分解

§2-5, 均匀各向同性无限弹性介质中的
柱面波

第三章 波动方程的积分解 P65

§3-1, 预备知识

§3-2, 波动方程的克其霍夫积分解

§3-3, 克其霍夫衍射公式

§3-4, 格林函数法求解波动方程

第四章 半无限空间中的弹性波 P167

§4-1, 平面波在自由表面上的反射

§4-2, 瑞雷面波

§4-3, 半无限空间中的轴对称问题

第五章 层状介质中的弹性波 P225

§5-1, 平面波在两个半无限弹性介质分界面上的反射与透射

§5-2, 平面波在多层介质中的反射与透射

§5-3, 层状介质中的面波

第六章 实际介质中的地震波 P293

§6-1, 过渡层的反射

§6-2, 非理想弹性介质中的波

§6-3, 几何地震学的应用条件

§6-4, 地震问题的声学近似

地震波动力学理论 (第 = P 分)

目 录

第七章 拉氏变换方法

§7-1. 拉氏变换及其性质

§7-2. 积分近似展开式

§7-3. 拉氏积分近似计算

附: 多值函数、支美与支线、黎曼叶面

第八章 空腔震源问题

§8-1. 受突然起始的均匀压力作用下的球形
空腔震源问题§8-2. 受突然起始的均匀压力作用下的柱状
空腔震源问题

第九章 球面波理论中的复变函数方法

§9-1. 球面波的复变函数积分

§9-2. 球面波在平界面上的反射与透射

§9-3. 首波理论

第十章 简姆问题积分变换解法

§10-1. 表面法向线源的简姆问题及其拉普拉

斯——付主叶双积分变换解

§10-2, 瑞雷极类

§10-3, 表面切向线源的兰姆问题及其拉普拉

斯——付主叶双积分变换解

参考文献目

Julius Miklowitz, The Theory of Elastic Wave and Wave-guides, 1978.

Keiti Aki & Paul G. Richards, Quantitative Seismology — Theory and Methods, 1981.

Philip M. Morse, Herman Feshbach, Methods of Theoretical Physics, 1953.

А.Н.Тихонов и А.А.Сомарский, Уравнения Математической Физики, 1953.

Lee A. Segel, Mathematics Applied to Continuum Mechanics, 1977.

第一章 弹性动力学基本方程

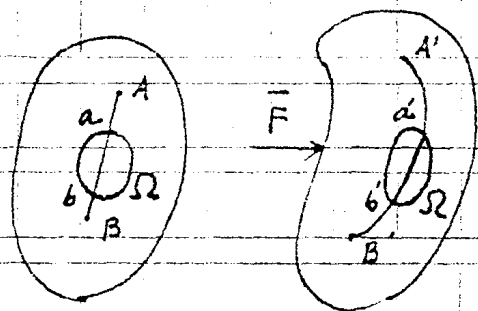
自然界中的物体，根据它们对外力作用的反应，可以划分为刚体、弹性体和塑性体。当一个物体受到外力作用，在它的质点间发生位置的相对变化，从而使其形状改变，我们称为形变或应变。为保持这种应变状态，发生质点间力的作用。这样的力不同于外力，称之为内力或应力。当外力作用取消后，物体的应力应变状态立刻消失，并且恢复原有的形状。这类物体称之为弹性体。但若外力取消后，物体不能恢复其原有形状，而保留一定的形变。这类物体称之为塑性体。与上述两种物体不同，外力作用不使物体内部质点位置发生相对变化，所施加的作用力可以无畸变地传播，即力的作用方向和大小不变，力的作用点可以沿力的作用方向移动。这类物体称之为刚体。

机械振动在弹性体中传播的过程，称为弹性波。空气是一种特殊状态的物质（气体），在声压条件下，可视为弹性体。以空气为传播介质的声波，可视为弹性波。地震波是机械振动在

岩石中传播的过程。在一定条件下，如温度、压力、作用力大小适当，岩石具有弹性性质，可视作弹性体，地震波可视作岩石中传播的弹性波。应该说明的是，把物体分为刚体、弹性体和塑性体，不是绝对的。除了与物体本身组成的成分有关外，物体所处条件，决定了物体对外力作用的反应。一般说，在小的外力作用下，作用时间短暂，大多数物体，包括岩石在内，表现为弹性体性质。相反，在大的外力作用下，作用时间较长，物体又会表现为塑性体性质。在激发地震波时，在震源附近，作用力很强，岩石发生破坏性变化；离开震源后，作用力急剧衰减，岩石发生塑性变化，即当作用力消失后，它不能恢复原有形状，而保持一定残余应变；进一步远离震源后，作用力继续减弱，岩石表现为弹性体性质，即在外力作用下的应变状态，在作用力取消后，可以完全消失，这就是所谓的弹性带。地震勘探中我们研究的是远离震源时弹性波传播规律及其特点。因此，弹性波理论是地震勘探的理论基础。

§1-1. 应变分析

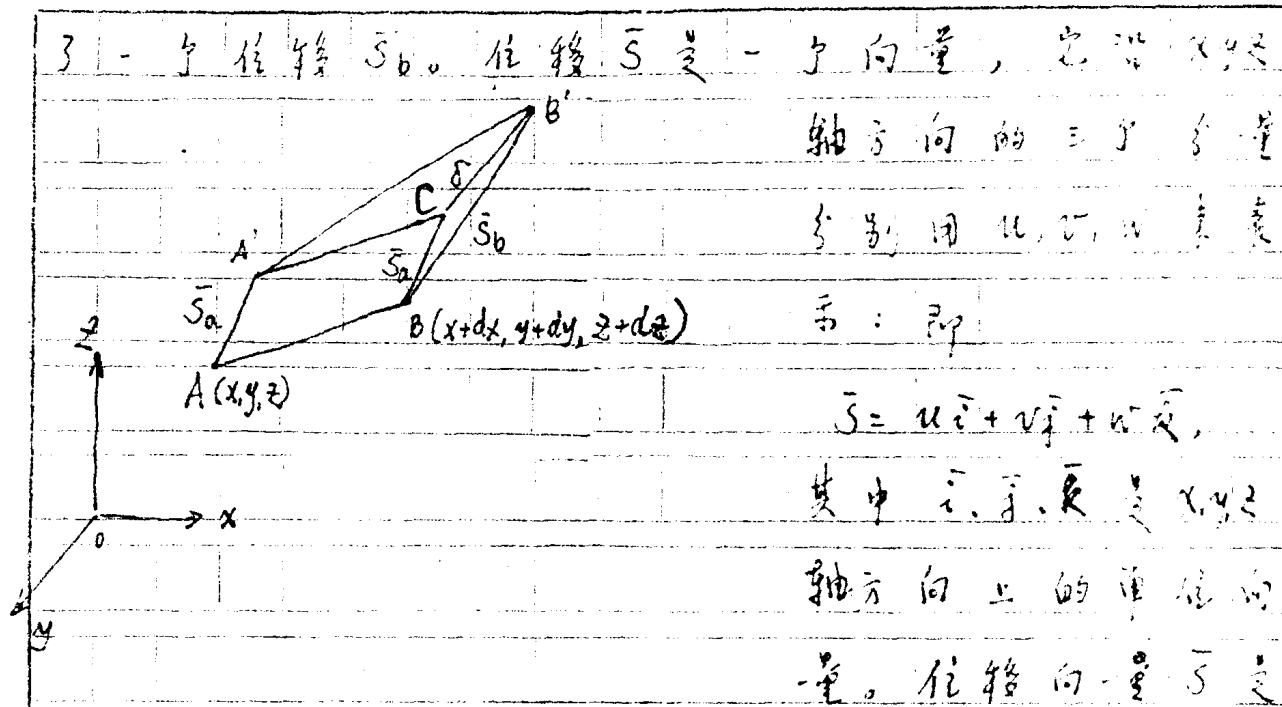
一. 弹性应变状态分析 在外力作用下, 弹性体内各质点间其位置发生相对变化, 导致物体形状的改变。这种变化称为弹性应变。为定量描述弹性介质应变状态, 我们讨论弹性体内任意一条直线段 $\overline{AB}$ 。在受到外力 F 作用时



, 随着物体形状的变化, 该线段由 $\overline{AB}$ 变为 $\overline{A'B'}$ 。在一般情况下, 它是一条曲线。为

了方便起见, 我们从弹性体中取一微小体积元 Ω , 使其中包括的直线段, 在发生应变过程中仍保持直线性质。由此导出一套线性理论, 适合于微小应变状态的分析。

我们取直角坐标, 讨论弹性体内某一直线段及其在应变过程中的变化。设直线段 $\overline{AB}$, 其端点坐标为 (x, y, z) 及 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ 。当物体处于应变状态时, 直线段 $\overline{AB}$ 变为 $\overline{A'B'}$, 根据题设条件, 仍为直线段。在应变状态下, A 点移到 A' 点, 做了位移 $\bar{u}_a$; B 点移到 B' 点, 做



质点坐标的函数， $\vec{S} = \vec{S}(x, y, z)$ 。对 A 质点而言，

$$\vec{S}_a = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k};$$

对 B 质点而言，

$$\begin{aligned}\vec{S}_b &= u(x+dx, y+dy, z+dz)\vec{i} + v(x+dx, y+dy, z+dz)\vec{j} \\ &\quad + w(x+dx, y+dy, z+dz)\vec{k};\end{aligned}$$

考虑到 $\vec{AB}$ 是一微小体微元中的线段，其长度是一微量，因此， dx, dy, dz 是微量，我们对 $\vec{S}_b$ ，按泰勒级数展开，取其多至一阶偏导数项：

$$\begin{aligned}\vec{S}_b &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\vec{i} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)\vec{j} \\ &\quad + \left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\vec{k}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{S}_b &= (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\vec{i} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\vec{k}\end{aligned}$$

另一方面，因为 AB 取在一个微元体上，它们的座标相差一个微量，自然可以认为其位移之差亦是一个微量，设为 $\bar{\delta}$ ，即

$$\bar{S}_b = \bar{S}_a + \bar{\delta}$$

在上图中，过 B 点作 $\bar{BC}$ 平行于 $\bar{AA'}$ ，则 $\bar{BC} = \bar{AA'}$ ，联 $\bar{CB'}$ 。在三角形 $\triangle BCB'$ 中 $\bar{BB'} = \bar{S}_b$ ， $\bar{BC} = \bar{S}_a$ ，则 $\bar{CB'} = \bar{\delta}$ 。 $\bar{\delta}$ 用其分量形式表示为：

$$\bar{\delta} = \delta u \bar{i} + \delta v \bar{j} + \delta w \bar{k}$$

所以
$$\bar{S}_b = \bar{S}_a + \bar{\delta} = (u + \delta u) \bar{i} + (v + \delta v) \bar{j} + (w + \delta w) \bar{k}$$

与前式比较，可得：

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = du$$

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = dv$$

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz = dw$$

显然，这是质点位移与微元体全微分公式，即相邻质点位移向量之差或相邻质点位置的相对变化可用位移分量的全微分表示：

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v' &= v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w' &= w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \right.$$

由上述关系，已知 A 点位移及其偏导数，可以

位移场相对于质点 B 的位移 $\bar{s}_b$,

$$\bar{s}_b = u'\bar{i} + v'\bar{j} + w'\bar{k}$$

二位移场的分解 我们讨论 u', v', w' 式中各项的物理意义, 分析弹性体在应变状态下其质点运动形式。对式中 九 个偏导数, 取记号 e_{ij} , $i, j = x, y, z$, 即

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$e_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad e_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z};$$

e_{ij} 称为应变分量, 由它们组成的张量称为应变张量。在各应变分量中, $e_{xy} = e_{yx}$; $e_{yz} = e_{zy}$; $e_{zx} = e_{xz}$ 。

我们将 u', v', w' 三式改造一下:

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz =$$

$$= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} dz - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} dz =$$

$$= u + e_{xx} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz$$

$$= u + e_{xx} dx + \frac{1}{2} e_{xy} dy + \frac{1}{2} e_{xz} dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$$

(2) 理可 (3) :

$$u' = u + \frac{1}{2} \epsilon_{yx} dx + \epsilon_{yy} dy + \frac{1}{2} \epsilon_{yz} dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz;$$

$$w' = w + \frac{1}{2} \epsilon_{zx} dx + \frac{1}{2} \epsilon_{zy} dy + \epsilon_{zz} dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx;$$

其中取记号: $\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$; $\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$; $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$,

我们有:

$$u' = u + \epsilon_{xx} dx + \frac{1}{2} \epsilon_{xy} dy + \frac{1}{2} \epsilon_{xz} dz + \omega_y dy - \omega_z dz;$$

$$v' = v + \frac{1}{2} \epsilon_{yx} dx + \epsilon_{yy} dy + \frac{1}{2} \epsilon_{yz} dz + \omega_z dx - \omega_x dz;$$

$$w' = w + \frac{1}{2} \epsilon_{zx} dx + \frac{1}{2} \epsilon_{zy} dy + \epsilon_{zz} dz + \omega_x dy - \omega_y dx;$$

由上式可以看出处于应变状态下的弹性体位移由三部分组成:

1, 平移: u, v, w , 这是和参考点 A 一起作同样的运动, 它不使物作形状改变;

2, 弹性应变: ϵ_{ij} , $i, j = x, y, z$, 这是一种使物作形状发生改变的运动, 称为应变或形变。 ϵ_{ij} 称为应变张量,

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

它有九个分量。考虑到应变分量对称性, 它只有六个独立分量。 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ 称为正应变, $\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$ 称为切应变。