

强迫布鲁塞尔振子周期解的普适序列

王 光 瑞 张 淑 誉 郝 柏 林

(北京 8009 信箱) (中国科学院物理研究所) (中国科学院理论物理研究所)

1983年8月4日收到

提 要

本文用细致的数值研究证实,沿参数空间中某些方向,强迫布鲁塞尔振子周期解的出现顺序与一维单峰映象的普适序列(U 序列)一致.我们给出了周期解与两个字母的符号动力学对应的简单方法,说明了此类研究中为看到分岔和混沌“谱”的整体结构,必须适当扩大参数空间.

一、引 言

当控制参数连续变化时,由确定的非线性演化方程描述的物理系统可能经过突变而进入两大类状态之一.第一类状态具有一定的时间和(或)空间有序.六十年代中期以来,在非平衡相变,耗散结构,协同学等各种名目下对这类转变进行了较为系统的研究.另一类转变则进入更为混沌的状态.所谓“混沌”并不是简单的无序,而是某种不具有时空周期结构的序,它是不必借助随机的外因而从系统的动力学中自发产生的内在随机性.自从发现混沌转变具有普适和标度性质^[1,2],并且在实验室中观察到不少实例之后,混沌转变才被作为一类新的自然现象加以研究.关于这个蓬勃发展的领域可以参看综述文献[3]及其引文.

对于混沌转变的多数研究工作基于线段或平面的自映象.这些映象作为离散时间的演化方程,可以进行若干解析处理,数值研究也比较省时间.然而实际的物理系统多由非线性微分方程描述,这里数值实验几乎成为唯一的研究手段.为了区分细致的运动类型,需要有很高的频率分辨本领,而这只有靠增加计算时间来达到.临界慢化^[4]使计算时间更为延长.因此,关于微分方程的研究报道至今为数不多.即使对于已经研究了二十年的 Lorenz 系统^[5],也还没有分岔和混沌“谱”的完整图象,现有的知识仅仅限于参数空间中的少数线段和特殊方向.这是我们着意仔细地研究一个微分方程的原因.

我们主要关心耗散系统中的分岔和混沌.耗散是一种整体性的稳定因素,它使相体积收缩,使轨道的局部不稳定只能在压缩了的相体积内表现,从而导致形成奇怪吸引子.在一定意义上,模型的选择并不十分重要,因为只要物理上比较合理,各种模型的分岔和混沌行为具有某种“普适性”.实际上对于普适性的理解,仍是基于和一维映象的类比,那里通常分出两大类:测度普适性和结构普适性.测度普适性依赖于单峰映象在峰值附近的形状,对于不同阶的极大,这包括分岔序列的收敛速率 δ ,标度因子 α 等等.测度普适性

已经部分地和一些常微分方程中验证过(见文献[3]所引文献). 结构普适性则只由映象具有单峰这一基本性质决定, 与它在峰值附近的函数形状无关. 这首先是指各种周期轨道的数目和出现顺序^[6-8]. 就我们所知, 结构普适性迄今尚未在常微分方程中看到, 本文是关于此事的首次报道¹⁾. 但在化学湍流的实验中已经看到过 U 序列^[9].

我们所研究的模型仍是周期外力作用下的三分子反应动力学方程(即所谓强迫布鲁塞尔振子). 数值计算中把它写成自治形式

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y + \alpha U, \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y, \quad \dot{U} = -\omega Z, \quad \dot{Z} = \omega U,\end{aligned}\quad (1)$$

并固定两个初始条件 $U(0) = 1, Z(0) = 0$. 这个系统的参数空间 (A, B, α, ω) 和状态空间 (X, Y, Z, U) 都是四维的. 不过由于 Z 和 U 只差相位, 状态空间实质上是三维的. 关于这种自治化的好处, 以及所用的方法(分频采样, 功率谱分析和直接观察运动轨道), 均见之于我们以前的工作^[10-13], 这里不再重述.

二、符号动力学和 U 序列

非平衡态的统计物理学在数学方法上左右逢源, 从动力系统理论和随机过程理论两方面吸取营养. 一维单峰映象中各种周期轨道的出现顺序, 作为数学问题已经研究得比较透彻. 它是两个字母组成的符号动力学, 即最简单的非平庸的符号动力学的一种应用. 由于符号动力学对物理学工作者比较陌生, 而它在物理学中可能有重要应用(参看 Ford 为文献[14]写的前言), 我们以单峰映象为例, 稍作描述, 详情可以参看文献[8]及其所引文献.

把含参数 μ 的单峰映象

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) \quad (2)$$

的 p 次迭代所得的函数记为

$$F(p, \mu, x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ 次}}(\mu, x). \quad (3)$$

如果对某个参数值 μ , (2) 式经迭代后达到一个 p 点周期, 即 $\{x_i, i = 1, \cdots, p\}$ 互不相同, 但 $x_{p+i} = x_i, \forall i$, 则这 p 个 x_i 都是 (3) 式的不动点:

$$x_i = F(p, \mu, x_i) \quad i = 1, 2, \cdots, p. \quad (4)$$

这些不动点的稳定条件相同, 即导数绝对值应小于 1:

$$|F'(p, \mu, x)| = \left| \prod_{i=1}^p f'(\mu, x_i) \right|. \quad (5)$$

事实上, 满足 (5) 式的 μ 值在参数轴上连续地充满一个小区间, 在区间两端 F' 达到 ± 1 , 而在中间某个 $\tilde{\mu}$ 值处经过零:

$$F'(p, \tilde{\mu}, x) = 0, \quad (6)$$

相应的轨道通常称为超稳定轨道. 满足 (5) 式的 μ 区间又称为周期为 p 的“周期窗口”.

1) 我们发过英文简报^[10], 并向第十五次国际统计物理会议提出报告^[11].

超稳定轨道可以看作整个周期窗口的代表.

如果恰当标度映象 f , 使得其最大值对应 $x = 0$, 则由于 $f'(\mu, 0) = 0$ 对于一切 p 都导致 $F'(p, \mu, 0) = 0$, 寻求超稳定轨道时可以只考虑经过 $x = 0$ 点的周期. 取 $x = 0$ 点为中心, 观察此后的迭代结果, 如果某个点落在中心的左面, 即 $x_i < 0$, 则以字母 L 标记; 相反, $x_i > 0$ 时标以字母 R (右). 一个从 $x = 0$ 开始的周期为 p 的轨道, 在回到 $x = 0$ 之前必须经过 $(p-1)$ 个 R 或 L 组成的序列, 即由字母 R 和 L 组成的一个“字”. 并非任何字都对应可以出现的周期轨道 (例如, 第一个字母必须是 R). 十年前人们证明的一个重要结果是^[6]: 可以为全部允许的字定义一个顺序, 即为它们编排一本字典, 字典中各个字的位置和单峰映象中相应的周期轨道在参数轴上的位置对应. 如果字 P 对应一个周期, 则另一个紧靠着的字是 PxP , 其中 x 等于 R 或 L , 视 P 中含有偶数还是奇数个字母 R 而定. PxP 对应从轨道 P 经过倍周期分岔而产生的轨道. 对于相当广泛的一大类单峰映象, 这本字典都是适用的, 因此在文献 [6] 中称它为普适序列或 U 序列 (有时根据文献 [6] 的作者姓氏, 称为 MSS 序列).

表 1 中列举了所有周期小于或等于 7 的字. 此表取自文献 [6], 我们加了一些注释. 注释中的一些缩写的意义如下: nP 指周期为 n 的轨道, nl 指周期为 n 的混沌带^[12], PDB 代表倍周期分岔序列. 关于嵌在一级序列中的二级序列, 亦可参看文献 [12].

从表 1 看出, RL^n 对应最后一个周期为 $(n+2)$ 的轨道, 而 RL^n 排在 RL^{n-1} 的前面. 通常 RL^n 对应比较宽一些的频率窗口, 在实验中较易看到. 同时还应当指出, 表 1 中的排列顺序应在局部意义上理解. 虽然这一顺序与单峰现象

表 1 周期小于等于 7 的字

字	周 期	注 释
R	2	唯一的 $2P$, 2×2^n PDB 的开始
RLR	4	R 的倍周期, 2×2^n PDB 的第二个
RLR^3	6	嵌在 $2I$ 中的 $3P$, $2 \times 3 \times 2^n$ 二级 PDB 的开始
$RRLR^4$	7	第一个 $7P$
RLR^5	5	嵌在 $1I$ 中的 $5P$, $1 \times 5 \times 2^n$ 二级 PDB 的开始
RLR^3LR	7	第二个 $7P$
RL	3	唯一的 $3P$, 3×2^n PDB 的开始
RL^2RL	6	RL 的倍周期, 2×2^n PDB 的第二个
RL^2RLR	7	第三个 $7P$
RL^2R	5	嵌在 $1I$ 中的 $5P$, 另一个 $1 \times 5 \times 2^n$ PDB 的开始
RL^2R^3	7	第四个 $7P$
RL^2R^2	6	第三个 $6P$
RL^2R^2L	7	第五个 $7P$
RL^2	4	第二个也是最后一个 $4P$, 4×2^n PDB 的开始
RL^3RL	7	第六个 $7P$
RL^3R	6	第四个 $6P$
RL^3R^2	7	第七个 $7P$
RL^3	5	第三个也是最后一个 $5P$, 5×2^n PDB 的开始
RL^4R	7	第八个 $7P$
RL^4	6	第五个也是最后一个 $6P$, 6×2^n PDB 的开始
RL^5	7	第九个也是最后一个 $7P$, 7×2^n PDB 的开始

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 \quad (7)$$

中各个周期的出现顺序完全一致, 但表 1 中的顺序作为一个整体并不一定是普适的. 例如, 只须在 (7) 式中把 μ 换成一个非单调的函数 $\mu = \mu(\lambda)$, 则新的以 λ 为参数的映象在 λ 的单调变化过程中, 某些 μ 值及相应的周期可以重复出现. 换言之, U 序列对应的字典装订质量可能出问题: 某些页可被重复装订, 但页码的局部顺序以及页内字的顺序仍保持与表 1 的局部一致. U 序列的这种折迭在强迫布鲁塞尔振子中将很常见.

符号动力学实际上是描述时间演化过程时归并自由度的一种方法. 最详尽的描述要求列举各个时刻系统经历的相点. 如果把相空间恰当地分为有限个区, 每个区用一个字母代表, 然后记录下演化过程所经历的字母序列, 就得到与原来的动力学过程对应的一个符号动力学. 在单峰映象情形下, 相空间是一维线段, 它只分成了左右两个区间, 于是得到两个字母组成的符号动力学. 相空间的恰当区分所导致的符号动力学, 仍然反映了原有演化过程的一些本质特点, 提供了对它们分类的手段.

三、强迫布鲁塞尔振子中的 U 序列

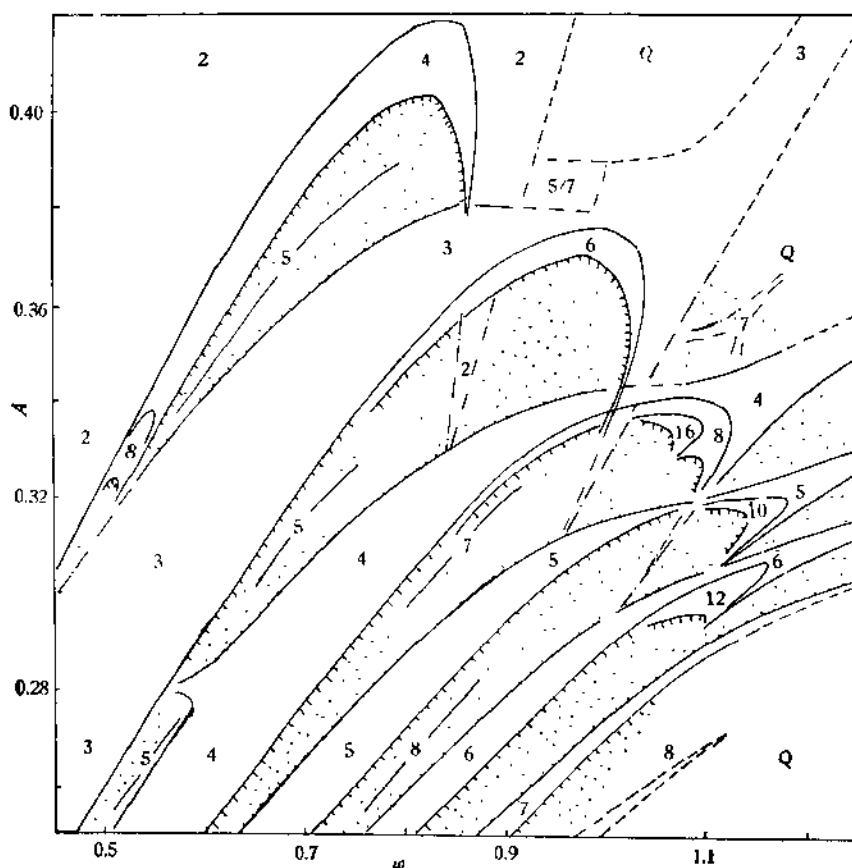
U 序列的概念本身以及表 1 所反映的字的排列顺序, 严重地依赖于映象的一维性. 微分方程组当然可能对应更多字母构成的符号动力学. 出现与一维映象一致的 U 序列, 则是远非平庸的事实. 在强迫布鲁塞尔振子这类耗散系统中, 由于相体积的收缩使得吸引子的某些截面接近一维, 这在我们发现测度普适性的过程中已经看到^[12], 因此应当进一步寻求结构普适性的证据.

图 1 为参数空间中固定 $\alpha = 0.05$, $B = 1.2$ 后得到的截面. 这个 $A-\omega$ 相图的一部份曾经在文献 [15] 中出现过. 在图 1 中从左上角往右下角走, 经过 $2P$, $3P$, $\dots$ 直到 $8P$, 它们可以和表 1 中 R , RL , $\dots$ 直到 RL^6 对应. 我们沿 $A = 0.46 - 0.2\omega$ 斜线作了更细致的研究, 发现了 U 序列中 $6P$ 以内的一切周期(除了表 1 中第四个 $6P$, 即 RL^3R), 而且它们的顺序也与表 1 一致. 表 2 中开列出这些周期窗口的位置和宽度.

怎样把所观察到的周期与 U 序列中的字对应, 即给每个点赋予字母 R 或 L 呢? 我们采用了如下的简单方法. 取 (X, Y) 表内一个 $5P$ 采样图, 可见各个点沿 Y 方向分布较宽, 而沿 X 方向分布窄得多. 可把 $\{Y_i\}$ 看作某种一维映象的输出. 令 Y_i 中最大者对应一维线段最右端的 R , 则它的前一个值 Y_{i-1} 就对应中心点 C , 这是因为一维映象从中心点出发后, 第一步总是跨到 R 区的最右端处. 这样以 C 点为基准, 其它一切 Y_i 都单值地赋给了字母 R 和 L . 我们用这种方法给观察到的每个周期赋予一个字. 表 3 中列出了三种 $5P$ 的确认过程. 为了使周期轨道接近超稳定点的情形, 表 3 中参数 ω 均取在相应周期窗口的中段.

为了进行对比, 我们在表 4 中给出一维映象 (7) 式中所有超稳定的 $5P$ 轨道. 可见不仅字母顺序, 而且周期点的数值大小, 都与表 3 一致.

事实上按表 3 中的 $\{X_i\}$ 值, 也可以赋给同样的字母. 这反映了吸引子的结构具有凸性, 即接近于一维单峰映象. 为了对这个映象得到一些概念, 可以选择一个靠近的非周期的参数值, 并且画出 (Y_i, Y_{i+1}) 或者 (X_i, X_{i+1}) 的图(更确切的作法应在吸引子上构造单

图1 $A-\omega$ 相图 ($B=1.2, \alpha=0.05$)

—— 为周期区边界; 为阵发混沌边界; --- 为周期与准周期的边界;
 为倍周期分岔序列; - · - · - 为性质不明的边界;

图中数字指出周期, Q 代表准周期, 打点的是混沌区, 其中还嵌有高阶周期

表2 沿图1中 $A=0.46-0.2\omega$ 斜线的周期窗口

字	周 期	ω 的 范 围	窗口宽度
R	2	—0.554	0.2
RLR	4	0.555—0.5777	0.0227
RLR ³	6	0.58249—0.58251	0.00002
RLR ⁴	5	0.5845—0.5848	0.0003
RL	3	0.5947—0.654	0.0593
RL ³ RL	6	0.6545—0.7025	0.048
RL ² R	5	0.7068—0.7115	0.0047
RL ³ R ²	6	0.718—0.7185	0.0005
RL ²	4	0.7323—0.792	0.0595
RL ³ RL	7	0.8035—0.8056	0.0021
RL ³ R	6	未找到	
RL ³ R ²	7	0.8194	
RL ⁴	5	0.8295—0.8675	0.038
RL ⁴	6	0.9015—0.923	0.0215
RL ⁵	7	0.959—0.974	0.015

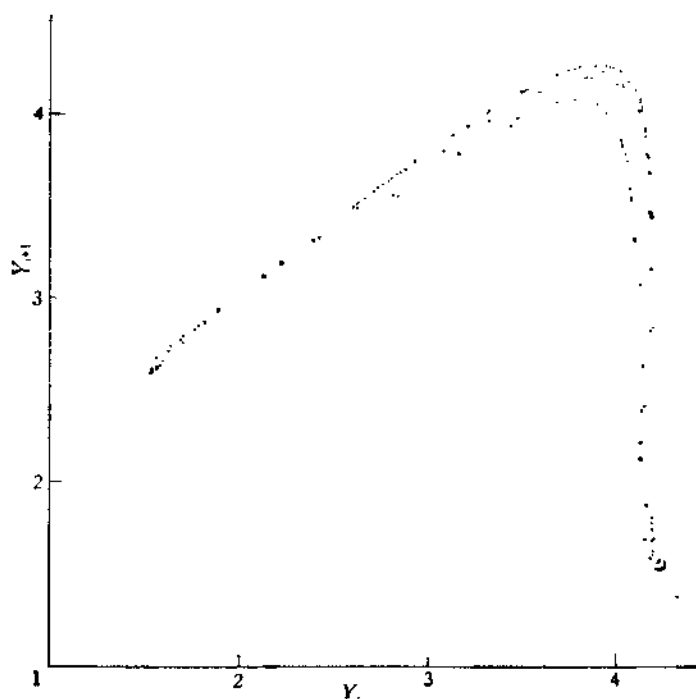
图2 在 $A = 0.46 - 0.2\omega$ 直线上 $\omega = 0.81601$ 处的 (Y_i, Y_{i+1}) 映象

表3 周期点和字母的对应(5P情形)

ω	周 期 点 (X_i, Y_i)						字
0.5847	0.433, 3.749	0.225, 2.284	0.317, 3.521	0.336, 3.548	0.285, 3.248		RLR^2
	R	L	R	R	C		
0.7095	0.294, 3.537	0.323, 3.982	0.194, 1.843	0.230, 3.034	0.294, 3.858		RL^2R
	C	R	L	L	R		
0.848	0.211, 3.64	0.245, 4.036	0.285, 4.333	0.190, 1.478	0.187, 2.492		RL^3
	L	C	R	L	L		

表4 一维映象(7)式的5P超稳定轨道

$\bar{\mu}$	周 期 点 X_i						字
1.6254137	0.0	1.0	-0.62541	0.36423	0.78436		RLR^2
1.8607825	0.0	1.0	-0.86078	-0.3787	0.73308		RL^2R
1.9854242	0.0	1.0	-0.98542	-0.9279	-0.7096		RL^3

参数的曲线)。图2就是在 $A = 0.46 - 0.2\omega$ 斜线上, $\omega = 0.81601$ 处的 (Y_i, Y_{i+1}) 图, 它的轮廓接近一维单峰曲线, 但是具有一定宽度(图中画出了256个采样点)。

表5中给出了 RLR^3 , RL^2RL , RL^2R^2 和 RL^4 四种6P轨道的确定过程。没有找到的轨道显然是表1中唯一剩下的 RL^3R 。我们从表2中已经看到, 三种5P窗口的宽度有数量级的差别(分别为0.038, 0.0047和0.0003), 因此, 如果 RL^3R 窗口的宽度窄于 RLR^3

的 0.00002, 则几乎不可能用 $\Delta\omega = 0.0001$ 的搜寻间隔找到它. 事实上为了寻找这个 $6P$ 轨道, 我们先发现了它两侧的 $7P$, 即表 2 中的 RL^3RL 和 RL^3R^2 , 但始终未能看到 RL^3R 本身.

在周期窗口的宽度和相应的字之间并无简单关系. 例如, 并不是周期愈长, 窗口就一定更窄. 在寻找 RL^3R 的过程中, 我们遇到了一个 $17P$, 范围在 $\omega = 0.8147-0.81495$, 它的宽度大于某些 $6P$. 在它附近应存在着大量 $12P$ 至 $16P$ 的轨道, 但是都未能看到, 可见这些周期窗口的宽度都太小.

表 5 周期点和字母的对应 ($6P$ 情形)

ω	周 期 点 (Y_i)						字
1.582497	3.527	3.498	3.548	3.229	3.744	2.293	RL^3R^1
	R	R	R	C	R	L	
0.698	3.881	2.318	3.413	3.996	1.877	3.081	RL^3RL
	R	L	C	R	L	L	
0.7183	3.835	3.829	3.445	4.007	1.813	2.994	RL^3R^2
	R	R	C	R	L	L	
0.913	3.071	3.782	4.313	4.489	1.263	2.239	RL^4
	L	L	C	R	L	L	

现在讨论参数空间中分岔“谱”的整体结构. 图 1 的明显特点, 是某些倍周期带弯曲并穿透到下一个混沌区中. 图中可以明确分辨的至少有五处弯曲和三处穿透. 过去对强迫布鲁塞尔振子的研究多是局限于图 1 中 $A = 0.4$ 的水平线, 它正好经过第一个 2×2^n 倍周期带弯曲部分的顶部, 因而并不典型. 甚至取更低的 $A = 0.35$ 水平线, 穿过更多的其它倍周期分岔带, 也很难看出所遇见的各种周期均是 U 序列的成员. 这一情况说明, 在我们的研究中必须适当增加参数空间的维数, 扩大搜寻范围, 才能见到复杂的分岔“谱”的全貌.

在文献 [13] 中存疑的一个问题, 是大片 $3P$ 的来源. 当时曾怀疑它与方程组 (1) 中的立方非线性项有关, 即属于这个模型所特有. 现在看到, 它乃是 U 序列中唯一的 $3P$ 区. 其实早在富田和久等的相图 (文献 [16] 中的图 2a) 中就有了一个称为周期 3 的小“泡”, 人们怎么能认识到它竟是一个普适的分类中必然出现的周期呢?

文献 [3] 中存疑的另一个问题, 是各种不同制度相交区域的性质. 在这些区域中自然应当期待出现双稳现象或对初始条件的依赖性. 计算整个图 1 时所用的初值均为 $X_0 = 0.4$, $Y_0 = 3.0$ 或相近的值, 即自由布鲁塞尔模型原有不动点附近. 我们在图 1 中最为复杂的几个小区域中考察了改变初始条件的影响. 对于选定的每组参数, 从 (X, Y) 平面上一个方区中选用初值, 这个方区大于典型的吸引子的尺寸. 在 $2P$ 穿过 $3P$ 的区域, 并没有发现对初值的依赖性. 所看到的情景很可能是 $2P$ 和 $3P$ 互相交错, 说明趋向 $2P$ 极限环和 $3P$ 极限环的“流域”有复杂的穿插关系. 然而在靠近准周期制度的区域, 我们确实看到了对初始条件的依赖性. 例如, 在 $A = 0.385$, $\omega = 0.94$ 处, 对于初值 $(X_0, Y_0) = (1, 10)$ 和 $(10, 1)$ 均得到 $7P$, 而对 $(9, 9)$ 得到 $5P$. 这是图 1 中标注 $5/7$ 的原因. 这个问题的彻底研究, 涉及 $(X, Y, Z, U) \otimes (A, B, \alpha, \omega)$ 的乘积空间, 超乎现代电子计算机的可能.

四、讨 论

我们的工作表明,无论在计算机实验还是在实际实验中,为了阐明非线性系统分岔和混沌“谱”的整体结构,只考察单个参数是不够的. 必须适当扩大参数空间,然而又不要引入多余的参数,以保持合理的工作量. 这涉及分岔和混沌谱的分类这个艰深的数学问题. 在我们的模型中,看来四个参数中保留三个(例如 A , α 和 ω)就足以揭示“谱”的全部复杂性.

在常微分方程描述的系统中看到 U 序列,并不是一个平庸的事实. 它说明关于一维单峰映象的某些数学定理有可能推广到更为普遍的情形.

数字电子计算机只能表示有限个有理数,能否用数值实验来研究涉及无理比值的准周期运动和更为复杂的混沌现象,这是一个原则问题. 实际上仍要依靠周期解作为骨架,来逼近非周期的现象. 动力系统理论中以“周期轨道稠密”作为“公理 A”^[17] 的一条, U 序列提出时^[6]对于一维单峰映象中的混沌带尚无认识,我们的工作也从数值实验角度说明了周期解及其分类的重要性.

参 考 文 献

- [1] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, **19** (1978), 25; *ibid.*, **21** (1979), 669.
- [2] P. Coullet, J. Tresser, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **287A** (1978), 577; *J. de Phys.* **C5** (1978), 25.
- [3] 郝柏林, 物理学进展, **3**(3)(1983).
- [4] B. L. Hao (郝柏林), *Phys. Lett. A*, **86** (1981), 267.
- [5] E. N. Lorenz, *J. Atmosph. Sci.*, **20** (1963), 130; C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer-Verlag, (1982).
- [6] N. Metropolis, M. L. Stein, P. R. Stein, *J. Combinatorial Theory*, **15** (1973), 25.
- [7] B. Derriada, A. Gervois, Y. Pomeau, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **A29** (1978), 305.
- [8] P. Collet, J. P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, (1980).
- [9] R. H. Simoyi, A. Wolf, H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 245.
- [10] Hao Bai-lin (郝柏林), Wang Guang-rui (王光瑞), Zhang Shu-yu (张淑誉), Institute of Theoretical Physics Preprint AS-ITP-83-004 and *Commun. Theo. Phys.*, to appear.
- [11] Chen Shi-gang (陈式刚), Hao Bai-lin (郝柏林), Wang Guang-rui (王光瑞), Zhang Shu-yu (张淑誉), *Inst. Theor. Phys. preprint AS-ITP-83-024*, (1983).
- [12] B. L. Hao, S. Y. Zhang, *Phys. Lett. A*, **87** (1982), 267; *物理学报* **32** (1983), 198.
- [13] B. L. Hao, S. Y. Zhang, *J. Stat. Phys.*, **28** (1982), 769.
- [14] V. M. Alekseev, M. V. Yakobson, *Phys. Reports*, **75** (1981), 288.
- [15] 王光瑞、陈式刚、郝柏林, *物理学报*, **32**(1983), 1139.
- [16] K. Tomita, T. Kai, *J. Stat. Phys.*, **21** (1979), 65.
- [17] S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747.

***U*-SEQUENCE OF PERIODIC SOLUTIONS IN THE FORCED BRUSSELATOR**

WANG GUANG-RUI

(P. O. Box 8009, Beijing, China)

ZHANG SHU-YU

(Institute of Physics, Academia Sinica)

HAO BAI-LIN

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Detailed numerical study shows that along certain directions in the parameter space the periodicity of the forced Brusselator appears in the same order as that in one-dimensional unimodal mappings, i.e. in accordance with the *U*-sequence of Metropolis, Stein and Stein. We find a simple method to assign words from a symbolic dynamics of two letters to periods in the model. Our results show the necessity to enlarge the parameter space in similar research in order to have a global picture of the bifurcation and chaos "spectrum".