前　　言

这本教材是以编者近年来讲授《高等几何》所用的讲义为基础，根据高等师范院校《高等几何》教学大纲的要求，并参考兄弟院校的交流教材，几经修改编写而成。

本讲义可作为高等师范院校数学专业的试用教材或参考书；删去其中某些章节后，可作为师范专科学校的教材；也可供中学教师自学进修或函授学习之用。

在编写时注意到了以下几点：

（1）根据近代克莱因的群论观点，以射影变换为基本线索，把射影几何的基本内容连缀起来，试图使系统严谨一点。以便学生能在较短的教学时间内，基本上掌握平面射影几何的基本理论和基本技能。

（2）解析法和综合法并用，以解析法为主。注意培养和发展抽象思维的能力，同时，也注意保持几何学直观的特点。

（3）除阐述概念和定理时尽可能联系初等几何和解析几何外，在第二、三、四各章的最后还安排了“初等几何中的应用”专节。旨在培养学生以较高的观点理解中学几何教材和处理初等几何问题的能力，但这几节的内容多半是学生已经接触过的东西，也可作为自学阅读的材料。

全书分八章，前面六章是基本的，最后两章一般可以不作要求。前六章中，以第二、三、四章的份量较重，主要内容是直线上的射影变换，平面直射变换和配极变换，以及圆锥曲线射影理论等内容，这些内容吃透了，其余几章的问题是容易

解决的，所以这三章应是全书的重点。前面的第一章主要是给出射影几何的直观形象，第五、六章主要内容是仿射几何和欧氏几何的射影形式，学习它们对于提高观点起着重要作用。

在编写和付印过程中，院系领导同志给以大力支持和鼓励；几何教研室主任许柱红和全体同志给了很多帮助，特别是陈灿辉、陈智荣同志作了许多工作，提出了宝贵意见。修改手稿时，本校79、80、81年级的同学代表以及使用过本讲义的部分兄弟院校的老师，也提出了不少宝贵意见，使我改正了一些错误，提高了编写质量。还有张菊娥、程杭生同志以及院印刷厂的同志也给了很多帮助，在此一并表示衷心感谢。

限于水平，错误和缺点在所难免，恳请读者提供宝贵意见，以便改正。

程其坚

1982年10月于浙江师范学院数学系

目　录

（带‘*’号的内容，可以根据具体情况删减）

第一章 欧氏平面的拓广

本章采用阐述射影几何的传统方法，从中心射影入手，引进理想点和理想直线，拓广欧氏平面，为建立射影平面的概念提供直观形象。

§1 中心射影法

1.1 什么是射影几何学

高等几何是高等师范院校数学专业的基础课程之一，主要内容是系统地学习射影几何的基础知识。什么是射影几何呢？在系统地学习之前，先作一点粗略的说明，可能有些好处。我们知道，初等几何里所研究的是几何图形的形状和大小，例如线段的长度、角度、面积和体积等等。这些东西与几何图形的位置没有关系。就是说，把几何图形从一个位置搬到另一个位置时，图形的形状和大小是不改变的。这种不变性以及与图形有关的量叫做移动变换下的不变性和不变量。所以，初等几何乃是研究移动变换下图形的不变性和不变量的学科。

移动变换是一种简单的物质运动形式在数学上的反映。客观世界的物质运动有多种不同的形式和特点，反映在几何上就产生多种不同的几何变换。例如，太阳的光线照在物体上，地面会出现影子，随着时间的推移，影子不仅改变它的位置，而且形状和大小也在不断地变化。这是物质运动的另一种形式。但是，在这种运动形式下，仍然有保持不变的性质。例如，考察两根竖立在地面的电线杆，在阳光下它们的影子，无论何时总是平行的。保持平行性不变是阳光照射下影子运动中的一个

特点．由于太阳发出的光线通常认为是平行的，所以，由阳光照射在物体上而得影子，叫做平行射影．于是，保持平行性不变就是平行射影下的不变性．几何图形经过若干次平行射影的结果，构成所谓仿射变换．显然，在仿射变换下，图形的平行性依然不变，研究仿射变换下图形的不变性的几何叫仿射几何．

黑夜里，桌面上的小灯发出的光线照射在物体上，也会出现影子，这叫中心射影．根据生活经验，在中心射影下，影子的位置、形状和大小，固然都要变化，甚至于连平行性也不能保持了，然而，仍然有保持不变的东西．仔细观察一下，容易发现物体上任何点，在灯光照射下的影子总是在整个物体的影子上．换句话说，图形上元素间的结合关系，在中心射影下保持不变．图形经过若干次中心射影的结果构成射影变换．研究射影变换下图形不变性的几何就是射影几何．

1.2 中心射影法

中心射影法是射影几何的基础．

设 α 和 α' 是平面上两条不同的直线，在这平面上任取一点 s，点 s 既不在直线 α 上，也不在 α' 上．如果 a_1 是直线 α 上的一个点，连接 s 和 a_1 的直线 sa_1 交直线 α' 于点 a_1'，那么点 a_1' 叫做点 a_1 从点 s 到直线 α' 上的**中心射影**(图1.1.1)．点 s 叫做**射影中心**．直线 sa_1 叫做**投射线**．a_1 叫做**原象点**，a_1' 叫做与原象点 a_1 对应的**映象点**．由中心 s 和原象点 a_1 求得映象点 a_1' 的运算，叫做**中心射影法**．

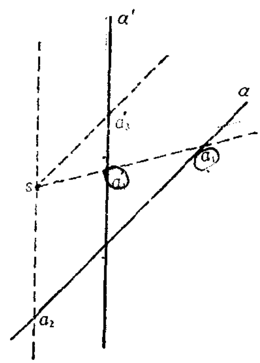

图 1.1.1

但是，在欧几里得平面（指初等几何里所讲的平面）上，

中心射影法不是经常能够实施的．就是说，不能经常做到：每一个原象点都能确定一个映象点；或者每个映象点都能确定一个原象点．例如，在图1.1.1中，从射影中心s引一条平行于直线α'的直线交α于点a_2，那么按中心射影法，a_2的映象点应是直线sa_2与直线α'的交点，可是，由于sa_2和α'是平行的，它们的交点并不存在．又若从s作直线α的平行线交α'于点a'_3，那么a'_3的原象点应是直线sa'_3与α的交点，这个交点也不存在．这两种情况说明，原象点和映象点之间的对应，不是一对一的对应．这是一个很大的缺点，必须消除它，才能利用中心射影法研究几何图形的射影性质．产生这个缺点的原因，是欧几里得平面上两条平行的直线没有交点．要想在欧几里得平面上消除这一缺点，根本是不可能的．所以，要使中心射影法得到完全的实现，必须对欧几里得平面进行某些改造或扩张才行．

§2　理想点和理想直线

怎样改造或扩张欧几里得平面呢？

大家知道，在实数集里，负数的偶次方根是不存在的．为了求出这种方根，使开方运算能够普遍实行，我们的办法是，约定i是一个平方等于-1的数，即$i^2=-1$；并且约定引进这个新的数以后，实数运算的基本规律保持不变．这样实数集便扩张成为复数集，从而解决了求负数的偶次方根的问题．与这个情形很相似，为了使平面上中心射影法能够完全实现，就要扩展欧几里得平面．于是约定：

“两条平行的直线相交于一个点，这个点叫做**‘无穷远点’**或**‘理想点’**，并使下列关系成立：

（Ⅰ）任何两个不同的点决定一条并且只决定一条直线；

（Ⅱ）平面上任何两条不同的直线相交于一个并且只相交于一个点。”

根据这个约定显然可知：

(1.2.1) 两条平行的直线只能相交于同一个无穷远点（理想点）。

就是说，无穷远点添在二平行直线的随便哪一端都可以。

新引进的“无穷远点”常用 a_∞，b_∞，p_∞ 等记号表示。为了区别起见，把欧几里得平面（或空间）里原有的点称为**“普通点”**或**“有穷远点”**。两条相交（不平行）的直线的交点是普通点。

(1.2.2) 定理：设 α_1 和 α_2 是两条相交于无穷远点 a_∞ 的平行直线（不同的），那么

（1）无穷远点 a_∞ 在平行于 α_1 或 α_2 的所有直线上；

（2）不相同的无穷远点属于不同的平行直线组。

证明：（1）设点 a 是既不在直线 α_1 上也不在直线 α_2 上的任意一个普通点，则点 a 和 a_∞ 决定一条并且只决定一条直线，设此直线是 α_3。因为 α_3 不可能与 α_1 或 α_2 第二次相交，所以 α_3 必定平行于 α_1 和 α_2，交点 a_∞ 属于三条平行的直线。重复同样的论证，可知 a_∞ 在平行于 α_1 或 α_2 的所有直线上。换句话说，a_∞ 属于由 α_1 和 α_2 所确定的平行直线组中的任何直线。

（2）设 β_1 是与 α_1 不相同并与 α_1 相交于一个普通点 m 的直线，而 β_2 是与 β_1 平行的直线。则 β_1 与 β_2 决定一个无穷远点 b_∞（据约定）。因为 β_1 与 α_1 不可能有第二个交点，所以 b_∞ 与 a_∞ 是不相同的。再由已经证明的第（1）款，可知不相同的无穷远点 a_∞ 与 b_∞ 分别属于不相同的平行直线组。

推论1 如果一个无穷远点在一条直线上，则必定在平行于这条直线的所有直线上。

以后，我们用“**属于**”这个词来代替“在…上”、“…通过…”和“…决定…”等说法。例如，“两个不同的点决定一条直线”说成“两个不同的点属于一条直线”；再如，上面的推论1可说成：“如果一个无穷远点属于一条直线，则必属于平行于这条直线的所有直线。”

引进无穷远点以后，欧几里得平面上（或空间里）原有的直线称为**普通直线**。对于普通直线，下面的推论2成立。

推论2 普通直线上有一个而且只有一个无穷远点。

事实上，因为任何一条普通直线，必有与它平行的直线，所以，总有无穷远点。另一方面，若普通直线α上有两个不相同的无穷远点a_∞和b_∞，则由本定理的结论（2），它们应该分别属于两个不相同的平行直线组。可是由推论1，因为它们属于同一条直线α，只能属于同一个平行直线组，即平行于α的那一组平行线。这是矛盾。

(1.2.3) *定理：两个不相同的无穷远点所确定的直线，不可能通过普通点。*

证明：设a_∞和b_∞是两个不相同的无穷远点，则由约定的关系(Ⅰ)，它们确定一条直线α。若a是任何一个普通点，则a和a_∞确定一条直线α_1，而a和b_∞确定另一条直线α_2。因为a_∞与b_∞不相同，所以，直线α_1与α_2也不相同。现在，假定直线α通过普通点a，则α_1和α_2都与α重合，而成为同一条直线。于是引出矛盾。所以α不可能通过任何普通点。

(1.2.4) *定理：平面上所有的无穷远点在一条直线上。*

证明：设ζ是平面上不通过任何普通点的直线，并且设平面上所有的无穷远点不都在这条直线ζ上，那么这个平面上ζ外至少还有一个无穷远点。连结这个无穷远点与ζ上任意一个无穷远点得到直线η，则由(1.2.3)可知，η不通过任何普通点，

而且ζ与η不相同．若a是任意一个普通点，显然，a既不在ζ上也不在η上．通过a但不通过ζ与η的交点作一条直线α，则α与ζ和η分别相交于点a_∞和a'_∞，则a_∞和a'_∞是两个不相同的无穷远点．于是两个不相同的无穷远点a_∞和a'_∞所确定的直线α通过一个普通点a．这与定理（1.2.3）矛盾．

既然平面所有无穷远点在同一条直线上，而且这条直线的所有点都是无穷远点（定理(1.2.3)），所以平面上无穷远点的轨迹（集合）是一条直线．这条直线叫做**无穷远直线**或**理想直线**．

推论：平面上有一条而且只有一条无穷远直线．

含有一条无穷远直线的平面叫做**拓广的平面**．

可以认为，拓广的平面上有两种元素：一种是普通点和普通直线，叫做普通元素；另一种是理想点和理想直线，叫做理想元素或无穷远元素．把拓广的平面上的元素区分为理想的和普通的两种，这种看法叫做**欧几里得观点**．

到此为止，改造欧几里得平面的工作，已经完成了．只要回过头去考察一下图1.1.1，把这张图所在平面理解为拓广的平面，立即可以看出，直线α上点a_2的映象点是唯一存在的，那就是平行直线sa_2与α'的交点，也就是直线α'上的无穷远点．同样，α'上点a'_3的原象点也是唯一存在的，就是直线α上的无穷远点．于是直线α与α'的点之间的对应，是一对一的对应．所以，在拓广的平面上，中心射影法能够完全实现．

在图1.1.1中，还可以看到一个重要的事实，那就是：一个无穷远点（如α上的无穷远点）的中心射影可以是普通点（a'_3）；一个普通点（如a_2）的中心射影也可以是无穷远点．换句话说，无穷远点与普通点可以互相变换．可见在这种意义下，二者并无本质差异，因此，可以一视同仁，不加区别，统

称之为**射影点**。既然理想点和普通点可以笼统地处理，毋庸赘言，对待理想直线与普通直线必然也可一视同仁，不加区别，通常统称之为**射影直线**。对于拓广的平面上的理想元素与普通元素一视同仁，不加区别的态度，称为**射影观点**。射影几何里所持的正是这个观点。在射影观点之下，拓广的平面就是**射影平面**（正式的定义在下一章给出）。

综合以上所述，中心射影法是射影几何学的基础，为使它经常能够施行，我们规定两条平行直线相交于一点，从而引进理想元素，把欧氏平面扩张成为拓广的平面。这为正式建立射影平面的概念提供了直观形象。

在扩张平面的过程中，从两条平行直线相交于一个无穷远点这个约定出发，已经推演出拓广的平面上关于点与直线结合关系的三条定理。然而，照此方法推演下去会不会产生矛盾呢？这是下一章一开头就要回答的问题。

习 题 一

［1.1］什么叫中心射影法？为什么说在欧几里得平面上中心射影法不能经常施行？

［2.1］试证：拓广的平面上，一组直线互相平行的充要条件，是它们通过同一个无穷远点。

［2.2］试证：拓广的平面上，不同的平行直线组属于不同的无穷远点。

第二章　平面射影几何的基本概念（上）

本章首先用实数构成的数组定义射影平面、点和直线；建立射影坐标系；导出坐标变换公式；然后阐述两个最重要的概念：射影变换与射影变换下的基本不变量——交比.

§1　射影平面

1.1　引言

在前一章里，从两条平行的直线相交于一个无穷远点这个约定出发，已经推演出一些几何命题，这样推演下去，会产生矛盾吗？几何学中处理这个问题时，常常采用实数系作为对照的基础．把几何的基本元素点、直线和平面与实数联系起来，就是说给点、直线和平面以“实数的解释”，然后，几何关系变成实数之间的关系，把这两种关系加以对照，就可以看出几何结构要么是不相容的，要么像实数系那样相容.

怎样用实数来解释射影平面、点与直线呢？根据第一章的启发，关键性的步骤是：如何用数或数组去表示两条平行直线的交点．下面的工作就按照这一要求去进行．在笛卡尔平面上，直线是用线性方程 $u\bar{x}+v\bar{y}+w=0$（u、v不全为零）表示的．三个实数 u，v，w 完全确定了这条直线．与这三个实数成比例的任何三数组也能确定这条直线．因此，一条确定的直线可用所有的三数组 $(\lambda u,\lambda v,\lambda w)$ 来表示，其中 $\lambda\neq0$，而且 u、v 中至少有一个不为零．如果两条直线是不相同的并且是不平行的，它们对应的三数组各为 (u,v,w) 和 (u',v',w')，那么由克莱姆法则给出它们的交点 $(\bar{x},\bar{y})$：

$$(2.1.1)\quad \bar{x}=\frac{\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}},\ \bar{y}=\frac{\begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}},\ \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}\neq 0.$$

或者令 $\bar{x}=x/z$，$\bar{y}=y/z$，写作：

$$(2.1.2)\quad x:y:z=\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}.$$

如果两直线平行且不相同，则三数组 (u,v,w) 和 (u',v',w') 不成比例，但数对 u,v 和 u',v' 成比例。换句话说，在(2.1.2)式的右边第三个行列式 $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}=0$，其余两个行列式至少有一个不为零。这便是交点为理想点的情形。如果用 (2.1.1) 的形式表示理想点，就会出现用零作除数的除法运算，这是不能允许的。然而，用 (2.1.2) 的形式，即用三个数构成的数组 (x, y, z) 表示点，就会顺利地克服这一困难。在这个形式里：

当 $z\neq 0$ 时，不论 x, y 如何，(x, y, z) 表示普通点；

当 $z=0$ 时，x, y 不全为零，则 (x, y, z) 表示理想点。

当三个数都等于零时，就出现了 $(0, 0, 0)$ 这个形式，而 $(0,0,0)$ 不表示任何点，也就是没有意义，应排除在外。这个例外情形，必须加以注意。此外还有一点应该注意，成比例的三数组表示同一个点，就是说，(x,y,z) 与 $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$，$\lambda\neq 0$ 是同一个点的不同表示法。道理很简单，因为在 (2.1.2) 里，成比例的各组解表示二直线的同一个交点。

刚才已经提到，可以用三数组 (u,v,w) 或 $(\lambda u,\lambda v,\lambda w)$，$\lambda\neq 0$ 表示直线（其中 u, v 不全为零）。这时没有考虑到理想直