板与壳习题解答

徐　鹰编　　梁　杰校

南 京 航 空 学 院

1981.6.

前　　言

本书系徐芝纶教授所编《弹性力学》下册（即板与壳部分）全部习题的解答。书中所引公式号、章节号等凡未注明出处的都系引自徐氏原书。习题仍保留原来的编号，以便查对。为了使手头没有该书的读者也能利用本书，所以也注意了适当的独立性，或补全习题所需绘图，或在叙述中作了必要的变动，在解答中引录了徐氏原书的某些公式。

本书对极值、最大值作了较详细的讨论。所得到的答案与徐氏原书所附答案大多一致，不一致之处并未一一注明。

由于时间仓促和我们的水平有限，一定存在不少错误和缺点，恳请读者批评指正。邓宗彦同志、龚德华同志及南航印刷所对本书的出版给予很大的帮助，特此致谢。

编校者

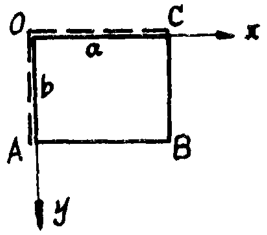
1981年4月于南京航空学院
材料力学教研室

目　　录

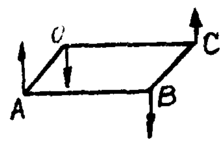
第十三章　习　题

——薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法

13—1　矩形薄板$OABC$，如图(a)，其OA边及OC边为简支边，AB边及BC边为自由边，在B点受横向集中荷载P。试证$w=mxy$能满足一切条件，并求出挠度、内力及反力。



图(a)



图(b)

题13—1图

解：(1) 它显然满足边界条件

$$(w)_{x=0}=(w)_{y=0}=0。$$

∵在$x=0$处恒为零，即在$x=0$处w不随y而变，故必有

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0}=0。\tag{a}$$

在$x=0$处为简支边，∴$M_x=0$，由(13—12)，

$$(M_x)_{x=0}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0}=0。\tag{b}$$

由(a)即知

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0}=0。\tag{c}$$

$w=mxy$能满足(a)，(c)。在$y=0$处类似。故$w=mxy$满足所有的边界条件。

(2) $\nabla^4(mxy)=0$。薄板上无分布荷载，即$q=0$，故$w=mxy$满足弹性曲面微分方程(13—10)

$$D\nabla^4 w=q。$$

由(13—22)，令

$$-P=-2D(1-\mu)\left[\frac{\partial^2(mxy)}{\partial x\partial y}\right]_B,\tag{d}$$

得

$$m=\frac{P}{2D(1-\mu)},$$

$$w=\frac{Pxy}{2D(1-\mu)}。\tag{e}$$

(d) 中 P 前加负号是设 P 向下即沿 z 正方向。在各角点的负方向的力如图 (b) 所示，这个规定与对 M_{xy} 的正负号规定有关，读者可参看 [2] 261 页图 9—9 或本书题 13—4 解答的附图。在此规定下在 B 点向下的力为负。求得的 w 为正，即沿 z 的正方向。

(3) 求内力 由(13—12)，(13—20)，

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0,$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0,$$

$$M_{xy}=M_{yx}=-D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=-\frac{P}{2},$$

$$Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w=0,$$

$$Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w=0,$$

$$V_x=Q_x+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=0,$$

$$V_y=Q_y+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=0。$$

(4) 求反力 由 (13—22) 及 (e)，

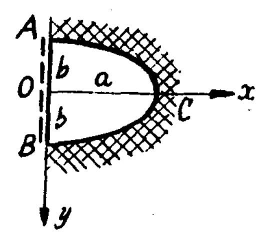
$$R_{A,O,C}=-2D(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{A,O,C}=-P。$$

所有角点反力皆为负，但应注意它们的方向并不相同，如图 (b) 所示。

13—2 半椭圆形薄板 $AOBC$，直线边界 AOB 为简支边，曲线边界 ACB 为夹支边，受有横向荷载 $q=\frac{q_1}{a}x$，其中 q_1 为常量。试证

$$w=mx\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2$$

能满足一切条件，并求出挠度及内力。



题 13—2 图

解：(1) 在全部边界上，w 满足 $w_S=0$ 的条件。

$$\frac{\partial w}{\partial x}=m\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2+\frac{4m}{a^2}x^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),\tag{a}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{4mx}{a^2}\left(\frac{5x^2}{a^2}+\frac{3y^2}{b^2}-3\right), \tag{b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{4mxy}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right), \tag{c}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{4mx}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)。 \tag{d}$$

在 $x=0$ 处，由 (b)，(d)，

$$(M_x)_{x=0}=(M_y)_{x=0}=0。$$

在椭圆边界上，由 (a)，(c)，

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_S=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_S=0,$$

$$\therefore\quad \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_S=0。 \tag{e}$$

这里 S，n 分别表示沿边界的切向， 法向。 (e) 即表示板绕夹支边的切线的转角为零。故，在全部边界上，边界条件均已满足。

(2)
$$\nabla^2 w=4mx\left[\left(\frac{5}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{3}{a^2}+\frac{3}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{3}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right],$$

$$\nabla^4 w=24m\left(\frac{5}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{1}{b^4}\right)x。$$

代入弹性曲面微分方程（13—10），得

$$D\cdot 24m\left(\frac{5}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{1}{b^4}\right)x=\frac{q_1}{a}x,$$

$$m=\frac{q_1a^3b^4}{24D(5b^4+2a^2b^2+a^4)},$$

$$w=\frac{q_1a^3b^4}{24D}\cdot\frac{x\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2}{5b^4+2a^2b^2+a^4}。 \tag{f}$$

(3) 求内力

$$M_x=-\frac{q_1a^3b^4x}{6(5b^4+2a^2b^2+a^4)}\left[\frac{5x^2}{a^4}+\frac{3y^2}{a^2b^2}-\frac{3}{a^2}+\mu\left(\frac{x^2}{a^2b^2}+\frac{3y^2}{b^4}-\frac{1}{b^2}\right)\right],$$

$$M_y=-\frac{q_1a^3b^4x}{6(5b^4+2a^2b^2+a^4)}\left[\frac{x^2}{a^2b^2}+\frac{3y^2}{b^4}-\frac{1}{b^2}+\mu\left(\frac{5x^2}{a^4}+\frac{3y^2}{a^2b^2}-\frac{3}{a^2}\right)\right],$$

$$Q_x=-\frac{q_1a^3b^4}{2(5b^4+2a^2b^2+a^4)}\left[\left(\frac{5}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3b^2}\right)\right],$$

$$Q_y=-\frac{q_1a^3b^4}{5b^4+2a^2b^2+a^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)xy。$$

(4) 求挠度与弯矩的最大值。

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0: \quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2+\frac{4x^2}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0,$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad \frac{5x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{g}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=0: \qquad 2x\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\frac{2y}{b^2}=0。 \tag{h}$$

由 (g)，(h) 可见，椭圆边界上的点都是稳定点，得到的是 $w=w_{min}=0$。剩下的是要考虑

$$\begin{cases} \dfrac{5x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0, \\ y=0。 \end{cases} \tag{i}$$

因此极大值必发生在 $x=a/\sqrt{5}$，$y=0$ 处：

$$w_{max}=\frac{2\sqrt{5}\,q_1a^4b^4}{375(5b^4+2a^2b^2+a^4)D}。$$

现在讨论弯矩的最大值与最小值。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_x}{\partial x}=0: \quad \dfrac{15x^2}{a^4}+\dfrac{3y^2}{a^2b^2}-\dfrac{3}{a^2}+\mu\left(\dfrac{3x^2}{a^2b^2}+\dfrac{3y^2}{b^4}-\dfrac{1}{b^2}\right)=0。 \\ \dfrac{\partial M_x}{\partial y}=0: \quad xy=0, \end{cases} \tag{j}$$

因为 $x=0$ 处 $M_x=0$，所以下面只考虑 $x>0$，于是 (j) 的解为

$$\begin{cases} x_1=a\cdot\sqrt{\dfrac{3b^2+\mu a^2}{15b^2+3\mu a^2}}, \\ y_1=0。 \end{cases} \tag{k}$$

$$\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\right)_{x_1,y_1}=-\frac{q_1a^3b^4}{5b^4+2a^2b^2+b^4}\left(\frac{5}{a^4}+\frac{\mu}{a^2b^2}\right)x_1<0, \tag{l}$$

$$\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\partial y}\right)_{x_1,y_1}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2}\right)_{x_1,y_1}=-\frac{q_1a^3b^4}{5b^4+2a^2b^2+a^4}\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{\mu}{b^4}\right)x<0,$$

$$\therefore \quad \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x\partial y}\right)^2\right]_{x_1,y_1}>0。 \tag{m}$$

由 (m) 知 M_x 有极值，由 (l) 知 M_x 有极大值：

$$(M_x)_{max}=\frac{q_1a^2b^2(3b^2+\mu a^2)}{9(5b^4+2a^2b^2+a^4)}\sqrt{\frac{3b^2+\mu a^2}{15b^2+3\mu a^2}}。 \tag{n}$$

M_x 必在椭圆边界上发生最小值。先求出 M_x 在椭圆边界上的值 $(M_x)_s$，为此只需要将方程

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

代入 M_x 的表达式中即可：

$$(M_x)_s=-\frac{q_1ab^4}{3(5b^4+2a^2b^2+a^4)}\left[\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\mu}{b^2}\right)x^3+\mu\frac{a^2}{b^2}x\right]。\tag{o}$$

如$\frac{1}{a^2}-\frac{\mu}{b^2}\geqslant 0$，则$M_x$将在$x=a$处达到最小值：

$$(M_x)_{min}=-\frac{q_1a^2b^4}{3(5b^4+2a^2b^2+a^4)}；\tag{p}$$

如$\frac{1}{a^2}-\frac{\mu}{b^2}<0$，令

$$\frac{d(M_x)_S}{dx}=0,$$

得

$$3\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\mu}{b^2}\right)x^2+\mu\frac{a^2}{b^2}=0,$$

$$\begin{cases}x=a^2\cdot\sqrt{\dfrac{\mu}{3(\mu a^2-b^2)}},\\ y=\pm b\cdot\sqrt{\dfrac{2\mu a^2-3b^2}{3(\mu a^2-b^2)}}。\end{cases}\tag{q}$$

$$(M_x)_{min}=-\frac{2\mu q_1a^5b^2}{9(5b^4+2a^2b^2+a^4)}\sqrt{\frac{\mu}{3(\mu a^2-b^2)}}。\tag{r}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M_y}{\partial x}=0: & \dfrac{3x^2}{a^2b^2}+\dfrac{3y^2}{b^4}-\dfrac{1}{b^2}+\mu\left(\dfrac{15x^2}{a^4}+\dfrac{3y^2}{a^2b^2}-\dfrac{3}{a^2}\right)=0,\\ \dfrac{\partial M_y}{\partial y}=0: & xy=0。\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=a\cdot\sqrt{\dfrac{a^2+3\mu b^2}{3a^2+15\mu b^2}},\\ y_2=0。\end{cases}\tag{s}$$

仿照对于 M_x 所作的讨论，可得在 x_2，y_2 处，

$$(M_y)_{max}=\frac{q_1a^2b^2(a^2+3\mu b^2)}{9(5b^4+2a^2b^2+a^4)}\sqrt{\frac{a^2+3\mu b^2}{3a^2+15\mu b^2}}。\tag{t}$$

在 M_y 的式子中引进椭圆边界的方程，得到

$$(M_y)_s=-\frac{q_1ab^4}{3(5b^4+2a^2b^2+a^4)}\left[\left(\frac{\mu}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^3+\frac{a^2}{b^2}x\right]。$$

如$\frac{\mu}{a^2}-\frac{1}{b^2}\geqslant 0$，则在 $x=a$ 处，M_y 有最小值：

$$(M_y)_{min}=-\frac{\mu q_1 a^2 b^4}{3(5b^4+2a^2b^2+a^4)}。\tag{u}$$

如$\frac{\mu}{a^2}-\frac{1}{b^2}<0$，令

$$\frac{d(M_y)_s}{dx}=0,$$

得

$$3\left(\frac{\mu}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2+\frac{a^2}{b^2}=0。$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{\sqrt{3(a^2-\mu b^2)}}, \\ y=\pm b\cdot\sqrt{\dfrac{2a^2-3\mu b^2}{3(a^2-\mu b^2)}}。\end{cases}\tag{v}$$

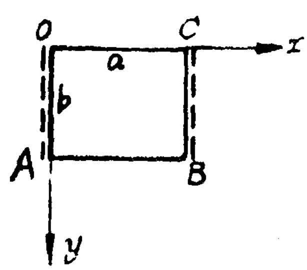
$$(M_y)_{min}=-\frac{2q_1 a^5 b^2}{9(5b^4+2a^2b^2+a^4)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3(a^2-\mu b^2)}}。\tag{w}$$

要得到进一步的结论，就要对参数a，b，μ，作进一步的限制。如果a，b，μ 是已知数字，则可以容易地确定 $|M_x|_{max}$和$|M_y|_{max}$和它们当中的最大者$|M_{x,y}|_{max}$。但是应当注意，一般地说，并不能肯定 $|M_{x,y}|_{max}$ 就是板内任何点，任何方向的最大弯矩。即使给定了a，b，μ 的具体数字，要求最大弯矩也是很困难的。类似于主应力，也可以求主弯矩，参阅[3]中第 10 节。因此，只有在板内到处都有 $M_{xy}=0$ 的特殊情况下（类似于求主应力中剪应力到处为零的情况），才能肯定 $|M_{x,y}|_{max}$ 就是板内任何点的任何方向的最大弯矩。[1] 中所提“最大弯矩”实际上只是本书中的 $|M_{x,y}|_{max}$。

如果只在某些点 $M_{xy}=0$，则只能肯定这些点的任何方向的弯矩都不超过 $|M_{x,y}|_{max}$，对其他点不能下结论，而 $|M_{x,y}|_{max}$ 此时还不一定是全板的最大弯矩。在本题中取 $a=b$，$\mu=1/3$ 可以求出 $|M_{x,y}|_{max}$，就属于这种情况。

对于一般情况去作一般推导，将导致无法求解的高次代数方程组，不再详述了。

13—3　矩形薄板 $OABC$，OA 边及 BC 边为简支边，OC 边及 AB 边为自由边，不受横向荷载，但在两个简支边上受大小相等而方向相反的均布弯矩 M。试证，为了薄板弯成柱面，即 $w=f(x)$，必须在自由边上施以均布弯矩 μM。试求挠度、内力及反力。



题13—3图

解：$\because (w)_{x=0}=(w)_{x=a}=0$，故设

$$w=x(a-x)f(y)。$$

在简支边上 $\partial^2 w/\partial^2 y=0$，故有

$$(M_x)_{x=0,a}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0,a}=2Df(y)=M。$$

由此可见 $f(y)$ 为常量，

$$w=\frac{M}{2D}x(a-x),$$

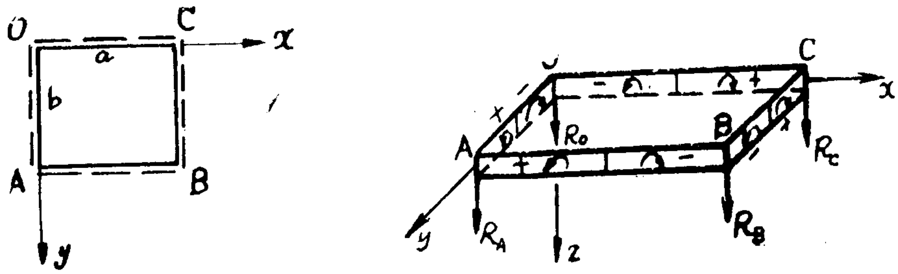
$$M_x=-D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=M;\qquad M_y=-D\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\mu M;$$

$$M_{xy}=M_{yx}=-D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0;$$

$$Q_x=Q_y=V_x=V_y=0,\ \ R=0。$$

由 M_y 的式子可知在自由边上必须施以均布弯矩 μM。

13—4　四边简支的矩形薄板，图 (a)，受有荷载



(a)　　　　(b)

题13—4图

$$q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

试证$w=m\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$能满足一切条件，并求出挠度、弯矩及反力以及它们的最大值。

解：(1) w 显然满足边界条件

$$(w)_{x=0,a}=(w)_{y=0,b}=0。$$

$$(M_x)_{x=0,a}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0,a}$$

$$=Dm\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\mu}{b^2}\right)\left(\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right)_{x=0,a}=0,$$

类似地有

$$(M_y)_{y=0,b}=0。$$

故 w 满足全部边界条件。

(2)
$$\nabla^2 w=-m\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

$$\nabla^4 w=m\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}。$$

代入弹性曲面微分方程（13—10）：

$$m\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}=\frac{q_0}{D}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

求出 m，代回 w 的式子，得到

$$w=\frac{q_0a^4b^4}{\pi^4D(a^2+b^2)^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}。$$

显然，在 $x=a/2$，$y=b/2$ 处有

$$w_{max}=\frac{q_0a^4b^4}{\pi^4D(a^2+b^2)^2}。$$

(3) 求内力及其最大值。

$$M_x=\frac{q_0a^2b^2}{\pi^2(a^2+b^2)^2}(b^2+\mu a^2)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

$$M_y=\frac{q_0a^2b^2}{\pi^2(a^2+b^2)^2}(a^2+\mu b^2)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}。$$

在板中点 $x=a/2$，$y=b/2$，

$$(M_x)_{max}=\frac{q_0a^2b^2}{\pi^2(a^2+b^2)^2}(b^2+\mu a^2),$$

$$(M_y)_{max}=\frac{q_0a^2b^2}{\pi^2(a^2+b^2)^2}(a^2+\mu b^2)。$$

当 $a<b$，则

$$(M_x)_{max}=M_{max}=\frac{q_0a^2b^2}{\pi^2(a^2+b^2)^2}(b^2+\mu a^2);$$

当 $a>b$，则

$$(M_y)_{max}=M_{max}=\frac{q_0a^2b^2}{\pi^2(a^2+b^2)^2}(a^2+\mu b^2)。$$

$$M_{xy}=M_{yx}=-(1-\mu)\frac{q_0a^3b^3}{\pi^2(a^2+b^2)^2}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}。$$

在角点上 $|M_{xy}|$ 有最大值

$$|M_{xy}|_{max}=(1-\mu)\frac{q_0a^3b^3}{\pi^2(a^2+b^2)^2}。$$

M_{xy}符号的规定见[2]261页图9-9，依照该规定，在边界上的扭矩方向及符号表示在图(b)中。

$$Q_x=\frac{q_0ab^2}{\pi(a^2+b^2)}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

$$Q_y=\frac{q_0a^2b}{\pi(a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}。$$

$|Q_x|$，$|Q_y|$ 分别在 OA，BC边和OC，AB 边的中点达到最大值，

$$|Q_x|_{max}=\frac{q_0ab^2}{\pi(a^2+b^2)},\qquad |Q_y|_{max}=\frac{q_0a^2b}{\pi(a^2+b^2)}$$

当 $a<b$，则

$$|Q_x|_{max}=|Q|_{max}=\frac{q_0ab^2}{\pi(a^2+b^2)};$$

当 $a>b$，则

$$|Q_y|_{max}=|Q|_{max}=\frac{q_0a^2b}{\pi(a^2+b^2)}。$$

$$V_x=\frac{q_0ab^2}{\pi(a^2+b^2)}[1+(1-\mu)\frac{a^2}{a^2+b^2}]\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

$$V_y=\frac{q_0a^2b}{\pi(a^2+b^2)}\left[1+(1-\mu)\frac{b^2}{a^2+b^2}\right]\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}。$$

Q 与V的符号与剪应力的符号的规定相同。在板的 4 个边上，V全部向上，虽然对边上的V符号不同。$|V_x|$，$|V_y|$ 分别在 OA、BC 边及 OC，AB 边的中点达到最大值，与 Q一致。

$$|V_x|_{max}=\frac{q_0ab^2}{\pi(a^2+b^2)}\left[1+(1-\mu)\frac{a^2}{a^2+b^2}\right],$$

$$|V_y|_{max}=\frac{q_0a^2b}{\pi(a^2+b^2)}\left[1+(1-\mu)\frac{b^2}{a^2+b^2}\right]。$$

当 $a<b$，则

$$|V_x|_{max}=|V|_{max};$$

当$a>b$，则

$$|V_y|_{max}=|V|_{max}。$$

对于任一角点，由（13—22），（13—12），

$$R=2M_{xy}=-2(1-\mu)\frac{q_0a^3b^3}{\pi^2(a^2+b^2)^2}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}。$$

式中 x，y 用各该角点坐标代入。负的 R 表示在题 13—1 图 (b) 中。本题虽然各 R 的符号不同，但 4 个 R 全都向下，如本题图 (b) 所示。

4 个向下的 R 与荷载在整个板上的向下的合力，和 4 个边上 V 的向上的合力平衡，可以通过计算加以校核。计算略。

13—5　正方形薄板，边长为 a，四边简支，在中点受集中荷载P，试求最大挠度。

解：采用 Navier 法，以 $\xi=\eta=\frac{a}{2}$代入[1]24页首公式

$$A_{mn}=\frac{4P}{\pi^4abD\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b},$$

得

$$w=\frac{4Pa^2}{\pi^4 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{(m^2+n^2)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}。$$

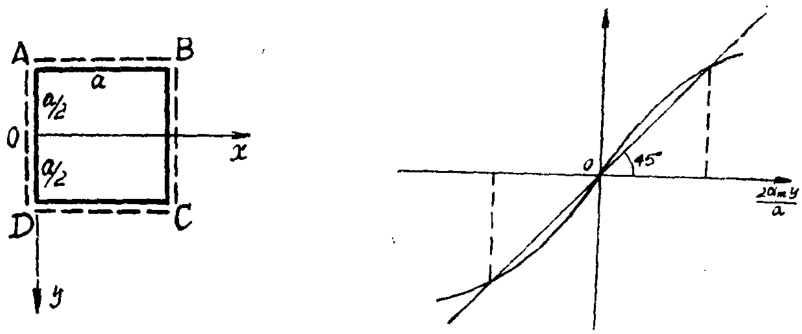
当 $x=y=\frac{a}{2}$，w达 极大值

$$w_{max}=\frac{4Pa^2}{\pi^4 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^2}。$$

取 4 项，

$$w_{max}\approx\frac{4}{\pi^4}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{100}+\frac{1}{324}\right)\frac{Pa^2}{D}\approx 0.0112\frac{Pa^2}{D}。$$

13—6　四边简支的正方形薄板，边长为 a，受均布荷载q_0，试由 § 13—7中的表达式(g)



(a)　　　　(b)

题13—6图

$$w=\frac{4q_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}\left(\frac{1}{m^5}\right)\left(1-\frac{2+\alpha_m th\alpha_m}{2ch\alpha_m}ch\frac{2\alpha_m y}{a}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_m y}{ach\alpha_m}sh\frac{2\alpha_m y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

导出弯矩、剪力，反力的表达式，求出它们的最大值， 并求出角点处的集中反力。式中 $\alpha_m=$ $=m\pi/2$，取 $\mu=0.3$。

解：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{4q_0a^2}{\pi^3 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}\left(\frac{1}{m^3}\right)\left(1-\frac{2+\alpha_m th\alpha_m}{2ch\alpha_m}ch\frac{2\alpha_m y}{a}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_m y}{ach\alpha_m}sh\frac{2\alpha_m y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{2q_0a^2}{\pi^3 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^3 ch\alpha_m}\left(-\alpha_m th\alpha_m ch\frac{2\alpha_m y}{a}\right.$$
$$\left.+\frac{2\alpha_m y}{a}sh\frac{2\alpha_m y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$M_x=\frac{2q_0a^2}{\pi^3}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\left(\frac{1}{m^3}\right)\left[2-\frac{2+\alpha_m th\alpha_m}{ch\alpha_m}ch\frac{2\alpha_m y}{a}\right.$$

$$\left.+\frac{2\alpha_m y}{ach\alpha_m}sh\frac{2\alpha_m y}{a}+\frac{\mu}{ch\alpha_m}\left(\alpha_m th\alpha_m ch\frac{2\alpha_m y}{a}-\frac{2\alpha_m y}{a}sh\frac{2\alpha_m y}{a}\right)\right]\sin\frac{m\pi x}{a}。$$

令

$$\frac{\partial M_x}{\partial y}=0,$$

化简后得

$$\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}+\alpha_m th\alpha_m\right)th\frac{2\alpha_m y}{a}-\frac{2\alpha_m y}{a}=0。\tag{a}$$

式 (a) 有三个根 $y_1=0$，y_2，$y_3=-y_2$。现在证明，

$$y_2>\frac{a}{2}, \qquad y_3<-\frac{a}{2},$$

故在 $-\frac{a}{2}\leqslant y\leqslant\frac{a}{2}$ 中只有一个根 $y=0$。由于对称，只需证明 $y_2>\frac{a}{2}$ 即已足够。由双曲正弦的性质

当 $\alpha_m>0$，　　　则 $sh2\alpha_m-2\alpha_m>0$.

$$\because\ \frac{1+\mu}{1-\mu}>1,\quad \therefore\frac{1+\mu}{1-\mu}sh2\alpha_m-2\alpha_m>0,\quad \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{sh\alpha_m}{ch\alpha_m}-\frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m}>0,$$

$$\frac{1+\mu}{1-\mu}th\alpha_m+\alpha_m(th^2\alpha_m-1)>0,\quad \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}+\alpha_m th\alpha_m\right)th\alpha_m-\alpha_m>0。$$

这就证明了，以 $y=a/2$ 代入式 (a)，式 (a) 左端为正，$\therefore a/2<y_2$，即 $y_2>a/2$。故在板内只有 $y_1=0$ 能使

$$\frac{\partial M_x}{\partial y}=0。$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}=0: \qquad \cos\frac{m\pi x}{a}=0。\tag{b}$$

$$\therefore\quad x=\frac{a}{2}\cdot\frac{2n+1}{m}。\tag{c}$$

式中 n 为任何整数，$m=1, 3, 5, \cdots$。显然，在 $0\leqslant x\leqslant a$ 中只有 $x=a/2$ 能对于任何 m 皆使 (b) 成立，而另外的值却不行。比如，如果 $x=a/6$，只当 $m=3, 9, 15, 21, \cdots$ 才能使 (b) 成立；当 $m=1$；5，7；11，13；17，19；…等，$x=a/6$ 即不能满足 (b)。从以上讨论可知，极大值发生在 $x=a/2$，$y=0$ 处。由于对称，对 M_y 的相似的讨论可略。故得

$$M_{max}=(M_{x,y})_{x=a/2,\,y=0}$$

$$=\frac{2q_0a^2}{\pi^3}\sum_{m=1,3,5,\cdots}\left(\frac{1}{m^3}\right)\left[2-\frac{2+(1+\mu)\alpha_m th\alpha_m}{ch\alpha_m}\right]\sin\frac{m\pi}{2}。$$

取至少 6 项，得 $M_{max} \approx 0.0479 q_0 a^2$。

$$Q_x = \frac{4q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2}\right)\left(1 - \frac{ch\frac{2\alpha_m y}{a}}{ch\alpha_m}\right)\cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$Q_y = -\frac{4q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2}\right)\frac{sh\frac{2\alpha_m y}{a}}{ch\alpha_m}\sin\frac{m\pi x}{a}。$$

$|Q_x|$、$|Q_y|$ 分别在 AD、BC 和 AB、DC 边中点达到最大值，由于对称它们是相等的，

$$|Q|_{max} = |Q_x|_{max} = |Q_y|_{max} \approx 0.338 q_0 a.$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1-\mu)\frac{2q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{m^3 ch\alpha_m}\left[-\left(1+\alpha_m th\alpha_m\right)sh\frac{2\alpha_m y}{a} + \frac{2\alpha_m y}{a}ch\frac{2\alpha_m y}{a}\right]\cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -\frac{2q_0 a}{\pi^2}(1-\mu) \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{m^2 ch\alpha_m}\left(-\alpha_m th\alpha_m ch\frac{2\alpha_m y}{a} + \frac{2\alpha_m y}{a}sh\frac{2\alpha_m y}{a}\right)\cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{2q_0 a}{\pi^2}(1-\mu) \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{m^2 ch\alpha_m}\left[-(1+\alpha_m th\alpha_m)sh\frac{2\alpha_m y}{a} + \frac{2\alpha_m y}{a}ch\frac{2\alpha_m y}{a}\right]\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$V_x = -\frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{m^2}\left[-2 + \frac{2-(1-\mu)\alpha_m th\alpha_m}{ch\alpha_m}ch\frac{2\alpha_m y}{a} + \frac{2(1-\mu)\alpha_m y}{a ch\alpha_m}sh\frac{2\alpha_m y}{a}\right]\cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$V_y = -\frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{m^2 ch\alpha_m}\left\{\left[(3-\mu) + (1-\mu)\alpha_m th\alpha_m\right]sh\frac{2\alpha_m y}{a} - \frac{2(1-\mu)\alpha_m y}{a}ch\frac{2\alpha_m y}{a}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}。$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0, \quad \sin\frac{m\pi x}{a} = 0, \quad x = 0,\ a; \tag{d}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{3-\mu}{1-\mu} - \alpha_m th\alpha_m\right)th\frac{2\alpha_m y}{a} + \frac{2\alpha_m y}{a} = 0, \quad y = 0。 \tag{e}$$

(d) 所以只有 0，a 二解是因为只有 $x=0$，a，对于任何 m 皆能使 (d) 满足；(e) 所以只有一解是因为 $m=1$ 时 (e) 只有一解 $y=0$。由于对称，对 V_y 的类似讨论可略。

$$|V|_{max}=|V_x|_{x=0,a;\ y=0}=|V_y|_{x=a/2,\ y=\pm a/2}\approx 0.420q_0a.$$

$$R_A=2(M_{xy})_A=-\frac{4q_0a^2}{\pi^3}(1-\mu)\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^3ch\alpha_m}\Big\{(1+\alpha_m th\alpha_m)sh\alpha_m$$

$$-\alpha_m ch\alpha_m\Big\}\approx 0.065q_0a^2。$$

仿前可证 $R_A>0$。类似地可得 $R_C=R_A>0$，$R_B=R_D=-R_A<0$。四个集中反力都向上，即与 Z 轴反向。

13—7 圆形薄板，半径为 a，边界自由，在一面上受锥形分布的横向荷载，由另一面上的均布反力维持平衡，试求弯矩及剪力。

解：由 § 13—9(b)

$$w=C_1lnr+C_2r^2lnr+C_3r^2+C_4+w_1。$$

因 $r=0$ 处 w 有限，$\therefore C_1=0$。如果 $C_2\neq 0$，则由罗必达法则，可证在 $r=0$ 处 w 仍为有限，但 d^2w/dr^2 却将成为无限大，从而弯矩、剪力在 $r=0$ 处成为无限大。既然 $r=0$ 处无集中力作用，故应取 $C_2=0$。

$$w=C_3r^2+C_4+w_1。$$

设横向荷载为 q'，均布反力为 q''，则 $q'=(1-r/a)q_0$，q'' 由 z 向平衡确定，

$$q''\pi a^2=\int_0^a\left(1-\frac{r}{a}\right)q_0\cdot 2\pi rdr=\frac{q_0\pi a^2}{3},$$

$$\therefore\quad q''=\frac{q_0}{3},$$

$$q=q'-q''=\left(\frac{2}{3}-\frac{r}{a}\right)q_0。$$

将特解 w_1 分成两部分，对于均匀荷载 $(2/3)q_0$，

$$w_{11}=\frac{\left(\frac{2}{3}q_0\right)r^4}{64D}=\frac{q_0r^4}{96D};$$

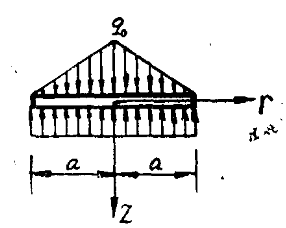
对于 $-q_0r/a$，可设 $w_{12}=mr^5$，代入 § 13—9(a)

$$D\nabla^4w=-\frac{q_0r}{a},$$

可得

$$w_{12}=-\frac{q_0r^5}{225Da},\qquad \therefore\ w_1=\frac{q_0r^4}{96D}-\frac{q_0r^5}{225Da},$$

$$w=C_3r^2+C_4+\frac{q_0r^4}{96D}-\frac{q_0r^5}{225Da}。$$



题13—7图

任意常数 C_4 对内力并无影响。如果选取坐标原点固连在圆板中面的中心，则 $(w)_{r=0}=0$，则 $C_4=0$。

$$M_r=-D\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right)=-D\left\{2C_3+\frac{q_0r^2}{8D}-\frac{4q_0r^3}{45Da}\right.$$

$$\left.+\mu\left(2C_3+\frac{q_0r^2}{24D}-\frac{q_0r^3}{45Da}\right)\right\},$$

$$(M_r)_{r=a}=0: \qquad 2C_3=-\frac{13+7\mu}{360(1+\mu)D}q_0a^2,$$

$$M_r=\frac{13+7\mu}{360}q_0a^2-\frac{3+\mu}{24}q_0r^2+\frac{4+\mu}{45a}q_0r^3。$$

类似地可得(注意[1]的答案中 M_θ 有错误)：

$$M_\theta=\frac{13+7\mu}{360}q_0a^2-\frac{1+3\mu}{24}q_0r^2+\frac{1+4\mu}{45a}q_0r^3。$$

$$\frac{dw}{dr}=2C_3r+\frac{q_0r^3}{24D}-\frac{q_0r^4}{45Da}, \qquad \frac{d^2w}{dr^2}=2C_3+\frac{q_0r^2}{8D}-\frac{4q_0r^3}{45Da},$$

$$\nabla^2\omega=4C_3+\frac{q_0r^2}{6D}-\frac{q_0r^3}{9Da},$$

$$Qr=-D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2w=-\frac{q_0r}{3}\left(1-\frac{r}{a}\right)。$$

Q_r 为负，方向向上，注意[1]的解答差一负号。

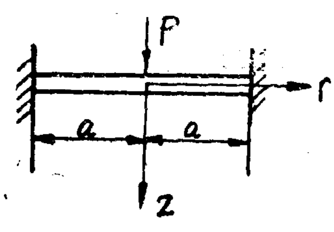
$$Q_\theta=0, \qquad M_{r\theta}=M_{\theta r}=0。$$

13—8　圆形薄板，半径为 a，边界夹支，在中心受集中荷载 P。试求薄板的挠度及内力。试证：在集中荷载的作用点($r=0$)，挠度为有限大（内力为无限大）。

解：由 § 13—9(b)，

$$w=c_1 lnr+C_2r^2 lnr+c_3r^2+c_4。$$

由于板上无分布荷载，故取 $w_1=0$。



题13—8图

$$\frac{dw}{dr}=\frac{C_1}{r}+C_2(2r lnr+r)+2C_3r, \qquad \frac{dw^2}{dr^2}=-\frac{C_1}{r^2}+C_2(2lnr+3)+2C_3,$$