

经全国中小学教材审定委员会

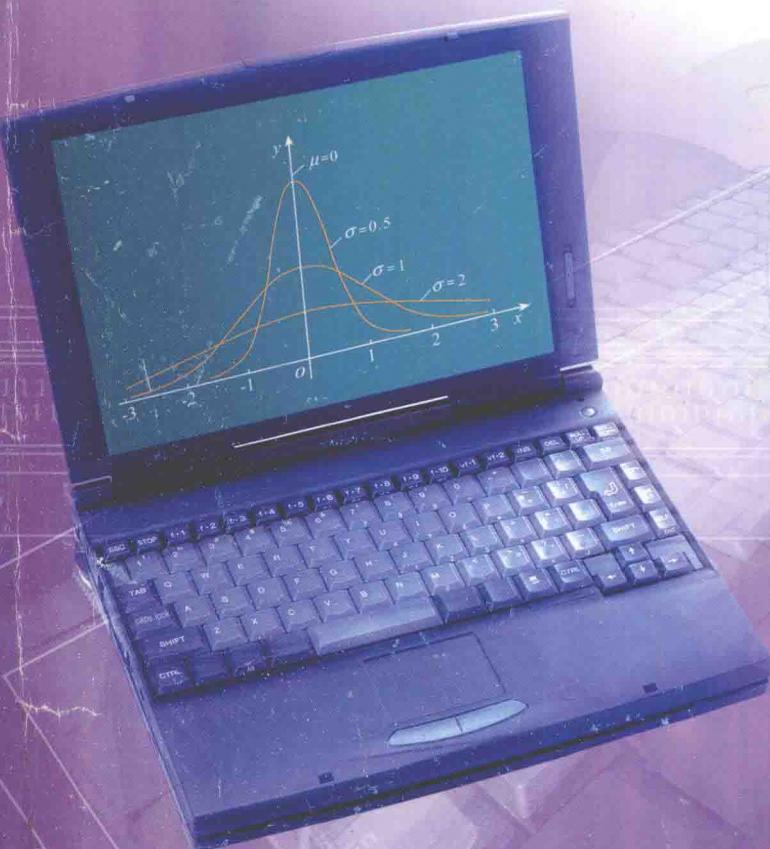
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-3

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

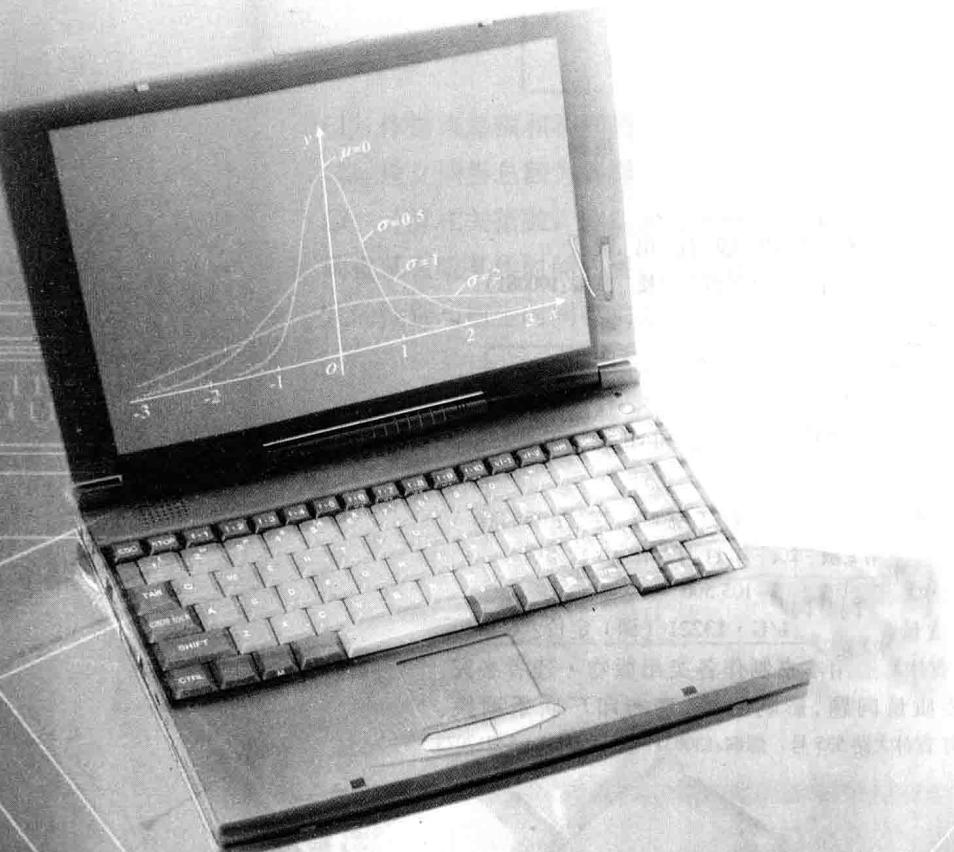
A 版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2—3

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 2 - 3

A 版

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

(北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编:100081)

网址: <http://www.pep.com.cn>

吉林出版集团教材出版公司重印

吉 林 省 新 华 书 店 发 行

长 春 新 华 印 刷 有 限 公 司 印 装

*

开本: 890 毫米 × 1 240 毫米 1/16 印张: 7 字数: 150 000

2006 年 12 月第 2 版 2008 年 11 月吉林第 1 次印刷

印数: 1 - 105 500

ISBN 978 - 7 - 107 - 20171 - 4/G · 13221 (课) 定价: 6.96 元

著作权所有 · 请勿擅用本书制作各类出版物 · 违者必究。

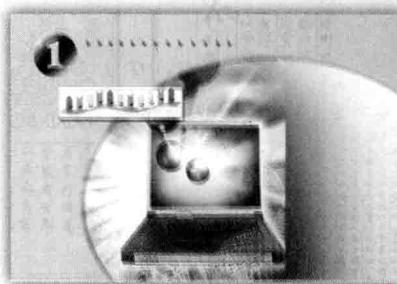
如发现印、装质量问题, 影响阅读, 请与印厂联系调换。

印厂地址:长春市吉林大路 535 号 邮编:130031 电话:0431 - 84917073

目 录

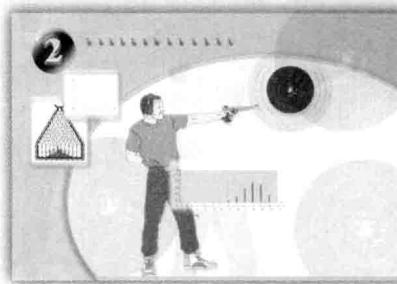
第一章 计数原理 1

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 2
探究与发现 子集的个数有多少 11
1.2 排列与组合 14
探究与发现 组合数的两个性质 25
1.3 二项式定理 29
探究与发现 “杨辉三角”中的一些秘密 35
小结 38
复习参考题 40



第二章 随机变量及其分布 43

2.1 离散型随机变量及其分布列 44
2.2 二项分布及其应用 51
阅读与思考 这样的买彩票方式可行吗 56



探究与发现 服从二项分布的随机变量取何值时概率最大	59
2.3 离散型随机变量的均值与方差	61
2.4 正态分布	70
信息技术应用 μ, σ 对正态分布的影响	74
小结	76
复习参考题	77

第三章 统计案例	79
3.1 回归分析的基本思想及其初步应用	80
3.2 独立性检验的基本思想及其初步应用	91
实习作业	99
小结	100
复习参考题	101



第一章

计数原理

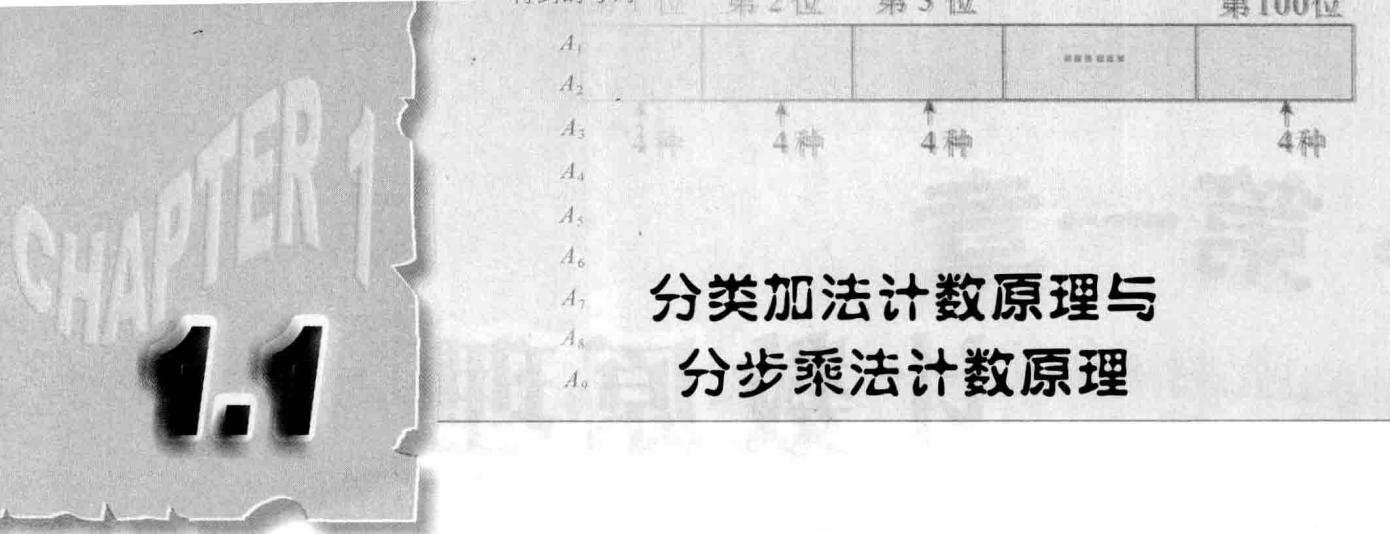
- 1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理
- 1.2 排列与组合
- 1.3 二项式定理



汽车牌照一般从 26 个英文字母、10 个阿拉伯数字中选出若干个，并按照适当顺序排列而成。随着人们生活水平的提高，家庭汽车拥有量迅速增长，汽车牌照号码需要扩容。另外，许多车主还希望自己的牌照“个性化”。那么，交通管理部门应如何确定汽车牌照号码的组成方法，才能满足民众的需求呢？这就需要“数出”某种汽车牌照号码组成方案下所有可能的号码数，这就是计数。日常生活、生产中类似的计数问题大量存在。例如幼儿会通过一个一个地数数的方法，计算自己拥有玩具的数量；学校要举行班际篮球比赛，在确定赛制后，体育组的老师要算一算共需要举行多少场比赛；用红、黄、绿三面旗帜组成航海信号，颜色的不同排列表示不同的信号，共可以组成多少种不同的信号……

虽然用列举所有各种可能性的方法，即一个一个地去数，可以求出相应的数，但当这个数很大时，列举的方法很难实施。本章所关心的是如何能不通过一个一个地数而确定出这个数。

在小学我们学了加法和乘法，这是将若干个“小的”数结合成“较大”数的最基本技巧。这种技巧经过推广就成了本章将要学习的分类加法计数原理和分步乘法计数原理。这是解决计数问题的两个最基本、最重要的方法。应用这两个计数原理，我们可以得到两类特殊计数问题的计数公式，即排列数公式和组合数公式，应用它们就可以方便地解决一些计数问题。作为计数原理与计数公式的一个应用，本章我们还将学习在数学上有广泛应用的二项式定理。



分类加法计数原理与 分步乘法计数原理



用一个大写的英文字母或一个阿拉伯数字给教室里的座位编号，总共能够编出多少种不同的号码？

因为英文字母共有 26 个，阿拉伯数字 0~9 共有 10 个，所以总共可以编出

$$26+10=36$$

种不同的号码。

探究

你能说说这个问题的特征吗？

完成这件事的方法

如何

上述问题中，最重要的特征是“或”字的出现：每个座位可以用一个英文字母或一个阿拉伯数字编号。由于英文字母、阿拉伯数字各不相同，因此用英文字母编出的号码与用阿拉伯数字编出的号码也是各不相同的。

一般地，有如下原理：

分类加法计数原理 完成一件事有两类不同方案①，在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法。那么完成这件事共有

$$N=m+n$$

种不同的方法。



你能举一些生活中类似的例子吗？

① 两类不同方案中的方法互不相同。

例 1 在填写高考志愿表时，一名高中毕业生了解到，A，B 两所大学各有一些自己感

兴趣的强项专业，具体情况如下：

A 大学	B 大学
生物学	数学
化学	会计学
医学	信息技术学
物理学	法学
工程学	

如果这名同学只能选一个专业，那么他共有多少种选择呢？

分析：由于这名同学在 A, B 两所大学中只能选择一所，而且只能选择一个专业，又由于两所大学没有共同的强项专业，因此符合分类加法计数原理的条件。

解：这名同学可以选择 A, B 两所大学中的一所。在 A 大学中有 5 种专业选择方法，在 B 大学中有 4 种专业选择方法。又由于没有一个强项专业是两所大学共有的，因此根据分类加法计数原理，这名同学可能的专业选择共有

$$5+4=9(\text{种})。$$



如果完成一件事有三类不同方案，在第 1 类方案中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类方案中有 m_2 种不同的方法，在第 3 类方案中有 m_3 种不同的方法。那么完成这件事共有多少种不同的方法？

如果完成一件事情有 n 类不同方案，在每一类中都有若干种不同方法，那么应当如何计数呢？



用前 6 个大写英文字母和 1~9 九个阿拉伯数字，以 $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ 的方式给教室里的座位编号，总共能编出多少个不同的号码？

这个问题与前一问题不同。在前一问题中，用 26 个英文字母中的任何一个或 10 个阿拉伯数字中的任何一个，都可以给出一个座位号码。而在这个问题中，号码必须由一个英文字母和一个作为下标的阿拉伯数字组成，得到一个号码必须经过先确定一个英文字母，后确定一个阿拉伯数字这样两个步骤。用图 1.1-1 的方法可以列出所有可能的号码。

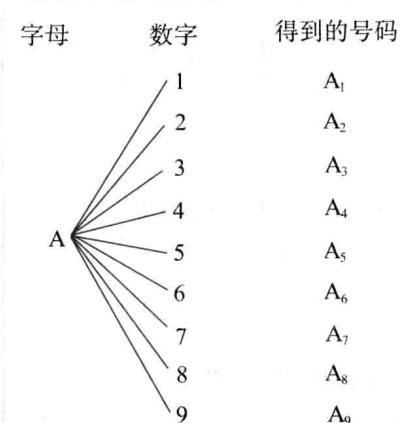


图 1.1-1 是解决计数问题常用的“树形图”。你能用树形图列出所有可能的号码吗？

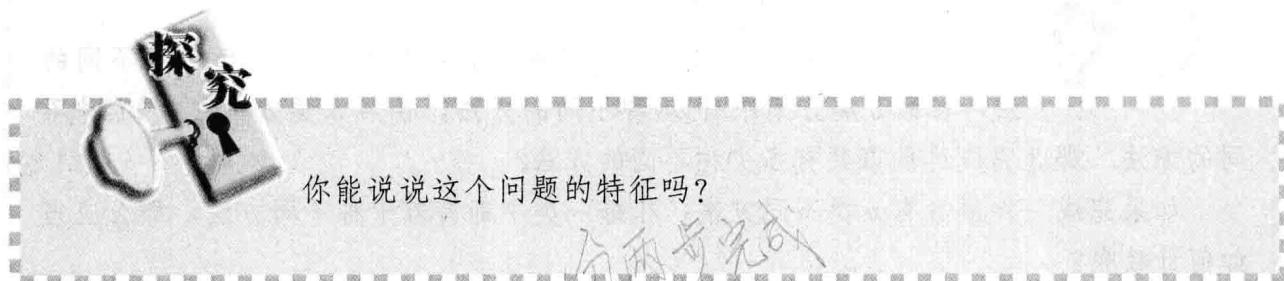
图 1.1-1

我们还可以这样来思考：

由于前 6 个英文字母中的任意一个都能与 9 个数字中的任何一个组成一个号码，而且它们各不相同，因此共有

$$6 \times 9 = 54$$

个不同的号码。



上述问题中，最重要的特征是“和”字的出现：每个座位由一个英文字母和一个阿拉伯数字构成，每一个英文字母与不同的数字组成的号码是各不相同的。

一般地，有如下原理：

分步乘法计数原理 完成一件事需要两个步骤①，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m \times n$$

种不同的方法。

① 无论第 1 步采用哪种方法，都不影响第 2 步方法的选取。

例 2 设某班有男生 30 名，女生 24 名。现要从中选出男、女生各一名代表班级参加比赛，共有多少种不同的选法？

分析：选出一组参赛代表，可以分两个步骤。第 1 步选男生，第 2 步选女生。

解：第 1 步，从 30 名男生中选出 1 人，有 30 种不同选择；

第 2 步，从 24 名女生中选出 1 人，有 24 种不同选择。

根据分步乘法计数原理，共有

$$30 \times 24 = 720$$

种不同的选法。

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & | & | & 3+2=5 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & | & | & 2 \end{array}$$

探究

如果完成一件事需要三个步骤，做第1步有 m_1 种不同的方法，做第2步有 m_2 种不同的方法，做第3步有 m_3 种不同的方法，那么完成这件事共有多少种不同的方法？

如果完成一件事情需要 n 个步骤，做每一步中都有若干种不同方法，那么应当如何计数呢？

例3 书架的第1层放有4本不同的计算机书，第2层放有3本不同的文艺书，第3层放有2本不同的体育书。

(1) 从书架中任取1本书，有多少种不同取法？

(2) 从书架的第1, 2, 3层各取1本书，有多少种不同取法？

解：(1) 从书架上任取1本书，有3类方法：第1类方法是从第1层取1本计算机书，有4种方法；第2类方法是从第2层取1本文艺书，有3种方法；第3类方法是从第3层取1本体育书，有2种方法。根据分类加法计数原理，不同取法的种数是

$$N = m_1 + m_2 + m_3 = 4 + 3 + 2 = 9;$$

(2) 从书架的第1, 2, 3层各取1本书，可以分成3个步骤完成：第1步从第1层取1本计算机书，有4种方法；第2步从第2层取1本文艺书，有3种方法；第3步从第3层取1本体育书，有2种方法。根据分步乘法计数原理，不同取法的种数是

$$N = m_1 \times m_2 \times m_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

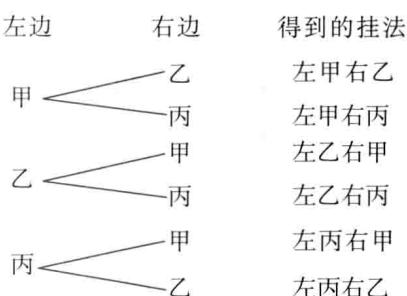
例4 要从甲、乙、丙3幅不同的画中选出2幅，分别挂在左、右两边墙上的指定位置，问共有多少种不同的挂法？

$$C_3^2 A_2^2 = 3 \times 2 \times 1$$

解：从3幅画中选出2幅分别挂在左、右两边墙上，可以分两个步骤完成：第1步，从3幅画中选1幅挂在左边墙上，有3种选法；第2步，从剩下的2幅画中选1幅挂在右边墙上，有2种选法。根据分步乘法计数原理，不同挂法的种数是

$$N = 3 \times 2 = 6.$$

6种挂法可以表示如下：



分类加法计数原理和分步乘法计数原理，回答的都是有关做一件事的不同方法的种数问题。区别在于：分类加法计数原理针对的是“分类”问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事；分步乘法计数原理针对的是“分步”问题，各个步骤中的方法互相依存，只有各个步骤都完成才算做完这件事。

练习

1. 填空：

- (1) 一件工作可以用 2 种方法完成，有 5 人只会用第 1 种方法完成，另有 4 人只会用第 2 种方法完成，从中选出 1 人来完成这件工作，不同选法的种数是_____；
 - (2) 从 A 村去 B 村的道路有 3 条，从 B 村去 C 村的道路有 2 条，从 A 村经 B 村去 C 村，不同的路线有_____条。
2. 现有高一年级的学生 3 名，高二年级的学生 5 名，高三年级的学生 4 名。
- (1) 从中任选 1 人参加接待外宾的活动，有多少种不同的选法？
 - (2) 从 3 个年级的学生中各选 1 人参加接待外宾的活动，有多少种不同的选法？
3. 在例 1 中，如果数学也是 A 大学的强项专业，则 A 大学共有 6 个专业可以选择，B 大学共有 4 个专业可以选择，那么用分类加法计数原理，得到这名同学可能的专业选择共有

$$6+4=10 \text{ (种)}.$$

 这种算法有什么问题？

例 5 给程序模块命名，需要用 3 个字符，其中首字符要求用字母 A~G 或 U~Z，后两个要求用数字 1~9. 问最多可以给多少个程序命名？

分析：要给一个程序模块命名，可以分三个步骤：第 1 步，选首字符；第 2 步，选中间字符；第 3 步，选最后一个字符。而首字符又可以分为两类。

解：先计算首字符的选法。由分类加法计数原理，首字符共有

$$7+6=13$$

种选法。

再计算可能的不同程序名称。由分步乘法计数原理，最多可以有

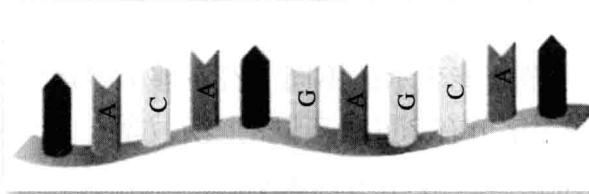


你还能给出不同的
解法吗？

$$13 \times 9 \times 9 = 1053$$

个不同的名称，即最多可以给 1053 个程序命名。

例 6 核糖核酸(RNA)分子是在生物细胞中发现的化学成分。一个 RNA 分子是一个有着数百个甚至数千个位置的长链，长链中每一个位置上都由一种称为碱基的化学成分所占据。总共有 4 种不同的碱基，分别用 A, C, G, U 表示。在一个 RNA 分子中，各种碱基能够以任意次序出现，所以在任意一个位置上的碱基与其他位置上的碱基无关。假设有 一类 RNA 分子由 100 个碱基组成，那么能有多少种不同的 RNA 分子？



分析：用图 1.1-2 来表示由 100 个碱基组成的长链，这时我们共有 100 个位置，每个位置都可以从 A, C, G, U 中任选一个来占据。

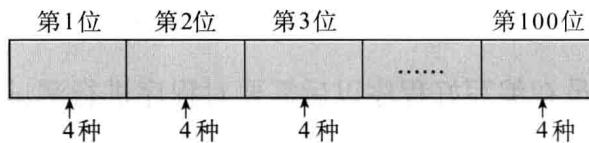


图 1.1-2

解：100 个碱基组成的长链共有 100 个位置，如图 1.1-2 所示。从左到右依次在每一个位置中，从 A, C, G, U 中任选一个填入，每个位置有 4 种填充方法。根据分步乘法计数原理，长度为 100 的所有可能的不同 RNA 分子数目有

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 4}_{100 \text{ 个 } 4} = 4^{100} (\text{个})$$

$4^{100} \approx 1.6 \times 10^{60}$ ，这是一个非常大的数。有兴趣的同学可以自己查阅一下 RNA 的有关资料。

例 7 电子元件很容易实现电路的通与断、电位的高与低等两种状态，而这也是最容易控制的两种状态。因此计算机内部就采用了每一位只有 0 或 1 两种数字的记数法，即二进制。为了使计算机能够识别字符，需要对字符进行编码，每个字符可以用一个或多个字节来表示，其中字节是计算机中数据存储的最小计量单位，每个字节由 8 个二进制位构成。问：

(1) 一个字节(8 位)最多可以表示多少个不同的字符？

(2) 计算机汉字国标码(GB 码)包含了 6 763 个汉字，一个汉字为一个字符，要对这些汉字进行编码，每个汉字至少要用多少个字节表示？

分析：由于每个字节有 8 个二进制位，每一位上的值都有 0, 1 两种选择，而且不同的顺序代表不同的字符，因此可以用分步乘法计数原理求解本题。

解：(1) 用图 1.1-3 来表示一个字节。

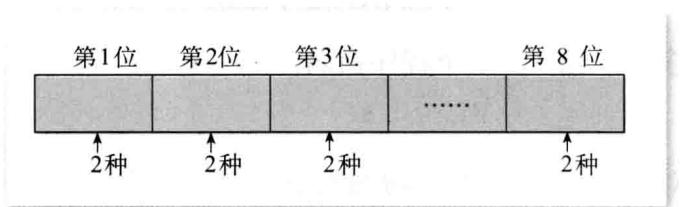


图 1.1-3

一个字节共有 8 位，每位上有 2 种选择。根据分步乘法计数原理，一个字节最多可以表示

$$2 \times 2 = 2^8 = 256$$

个不同的字符；

(2) 由(1)知，用一个字节所能表示的不同字符不够 6 763 个，我们就考虑用 2 个字节能够表示多少个字符。前一个字节有 256 种不同的表示方法，后一个字节也有 256 种表示方法。根据分步乘法计数原理，2 个字节可以表示

$$256 \times 256 = 65\,536$$

个不同的字符，这已经大于汉字国标码包含的汉字个数 6 763。所以要表示这些汉字，每个汉字至少要用 2 个字节表示。

例 8 计算机编程人员在编写好程序以后需要对程序进行测试。程序员需要知道到底有多少条执行路径（即程序从开始到结束的路线），以便知道需要提供多少个测试数据。一般地，一个程序模块由许多子模块组成。如图 1.1-4，它是一个具有许多执行路径的程序模块。问：这个程序模块有多少条执行路径？

另外，为了减少测试时间，程序员需要设法减少测试次数。你能帮助程序员设计一个测试方法，以减少测试次数吗？

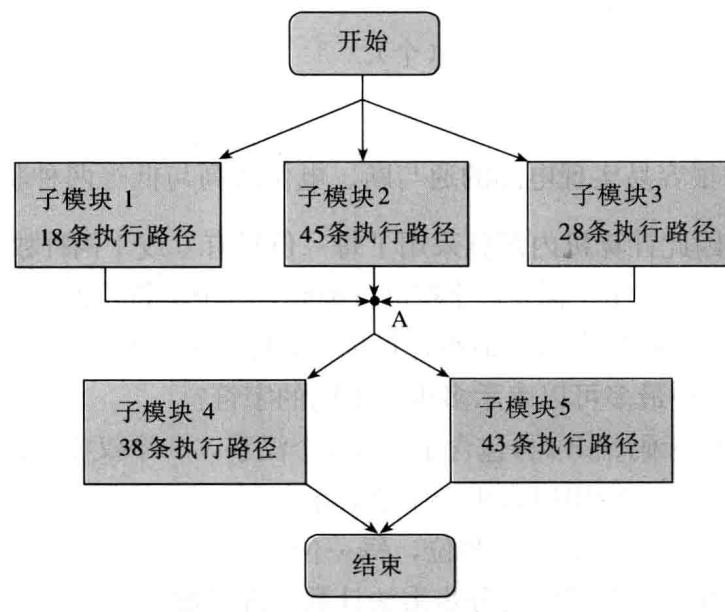


图 1.1-4

分析：整个模块的任意一条执行路径都分两步完成：第1步是从开始执行到A点；第2步是从A点执行到结束。而第1步可由子模块1或子模块2或子模块3来完成；第2步可由子模块4或子模块5来完成。因此，分析一条指令在整个模块的执行路径需要用到两个计数原理。

解：由分类加法计数原理，子模块1或子模块2或子模块3中的子路径共有

$$18+45+28=91(\text{条})；$$

子模块4或子模块5中的子路径共有

$$38+43=81(\text{条})。$$

又由分步乘法计数原理，整个模块的执行路径共有

$$91\times 81=7\ 371(\text{条})。$$

在实际测试中，程序员总是把每一个子模块看成一个黑箱，即通过只考察是否执行了正确的子模块的方式来测试整个模块。这样，他可以先分别单独测试5个模块，以考察每个子模块的工作是否正常。总共需要的测试次数为

$$18+45+28+38+43=172。$$

再测试各个模块之间的信息交流是否正常，只需要测试程序第1步中的各个子模块和第2步中的各个子模块之间的信息交流是否正常，需要的测试次数为

$$3\times 2=6。$$

如果每个子模块都工作正常，并且各个子模块之间的信息交流也正常，那么整个程序模块就工作正常。这样，测试整个模块的次数就变为

$$172+6=178(\text{次})。$$

显然，178与7 371的差距是非常大的。

你看出了程序员是如何实现减少测试次数的吗？

例9 随着人们生活水平的提高，某城市家庭汽车拥有量迅速增长，汽车牌照号码需要扩容。交通管理部门出台了一种汽车牌照组成办法，每一个汽车牌照都必须有3个不重复的英文字母和3个不重复的阿拉伯数字，并且3个字母必须合成一组出现，3个数字也必须合成一组出现。那么这种办法共能给多少辆汽车上牌照？

分析：按照新规定，牌照可以分为2类，即字母组合在左和字母组合在右。确定一个牌照的字母和数字可以分6个步骤。

解：将汽车牌照分为2类，一类的字母组合在左，另一类的字母组合在右。

字母组合在左时，分6个步骤确定一个牌照的字母和数字：

第1步，从26个字母中选1个，放在首位，有26种选法；

第2步，从剩下的25个字母中选1个，放在第2位，有25种选法；

第3步，从剩下的24个字母中选1个，放在第3位，有24种选法；

第4步，从10个数字中选1个，放在第4位，有10种选法；

第5步，从剩下的9个数字中选1个，放在第5位，有9种选法；

第6步，从剩下的8个字母中选1个，放在第6位，有8种选法。

根据分步乘法计数原理，字母组合在左的牌照共有

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 = 11\ 232\ 000 \text{ (个).}$$

同理，字母组合在右的牌照也有 11 232 000 个.

所以，共能给

$$11\ 232\ 000 + 11\ 232\ 000 = 22\ 464\ 000$$

辆汽车上牌照.



你能归纳一下用分类加法计数原理、分步乘法计数原理解决计数问题的方法吗？

用两个计数原理解决计数问题时，最重要的是在开始计算之前要进行仔细分析——需要分类还是需要分步.

分类要做到“不重不漏”. 分类后再分别对每一类进行计数，最后用分类加法计数原理求和，得到总数.

分步要做到“步骤完整”——完成了所有步骤，恰好完成任务，当然步与步之间要相互独立. 分步后再计算每一步的方法数，最后根据分步乘法计数原理，把完成每一步的方法数相乘，得到总数.



乘法运算是特定条件下加法运算的简化，分步乘法计数原理和分类加法计数原理也有这种类似的关系吗？

练习

- 乘积 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$ 展开后共有多少项？
- 某电话局管辖范围内的电话号码由八位数字组成，其中前四位的数字是不变的，后四位数字都是 0 到 9 之间的一个数字，那么这个电话局不同的电话号码最多有多少个？
- 从 5 名同学中选出正、副组长各 1 名，有多少种不同的选法？
- 某商场有 6 个门，如果某人从其中的任意一个门进入商场，并且要求从其他的门出去，共有多少种不同的进出商场的方式？



子集的个数有多少

问题 n 元集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的子集有多少个?

为了解决这个问题,一个可行的思路是先研究一下某些具体集合,如 $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的子集个数,从中获得启发,然后再对一般的情况进行研究.

由于 S 中的元素只有 3 个,因此我们可以用列举法列出它的所有子集:

$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, S$.
因此,一个含有 3 个元素的集合共有 8 个子集.

如果一个集合所含元素较少,可以用列举法确定其子集的个数.但如果集合中的元素较多,用这种方法确定子集个数就不太方便了.另外,从上述描述中较难发现 3 与 8 之间的关系.

为了发现规律,我们需要采取另外的方法.一个自然的想法是,应当设法用上两个计数原理.

显然,元素 $a_i (i=1, 2, 3)$ 与各子集的关系只有两种: a_i 属于子集或 a_i 不属于子集.这样,我们可以考虑用考察 S 中的每一个元素属不属于某个子集的方法来得到一个子集.因为 S 中有 3 个元素,所以要得到集合 S 的一个子集 S_1 ,可以分三个步骤:

第 1 步,考察元素 a_1 是否在 S_1 中,有 2 种可能($a_1 \in S_1$, $a_1 \notin S_1$);

第 2 步,考察元素 a_2 是否在 S_1 中,有 2 种可能($a_2 \in S_1$, $a_2 \notin S_1$);

第 3 步,考察元素 a_3 是否在 S_1 中,有 2 种可能($a_3 \in S_1$, $a_3 \notin S_1$).

只要完成上述三个步骤,那么集合 S_1 中元素就完全确定了.根据分步乘法计数原理,对于由 3 个元素组成的集合,共有

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

个不同的子集.

从上述过程我们看到了 3 与 8 之间的关系: 3 是 2^3 中的指数,而 8 是 2^3 的运算结果.

一般的,我们有:

n 元集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的不同子集有 2^n 个.

证明:要得到集合 A 的一个子集 S_1 ,可以分 n 个步骤:

虽然列举法较“笨”,但它是计数的基本方法.你可以列举一下 4 元集、5 元集的子集.



由此,你是否对把空集及原集合自身作为子集的规定有进一步的理解?



第1步，考察元素 a_1 是否在 S_1 中，有2种可能 ($a_1 \in S_1$, $a_1 \notin S_1$);

第2步，考察元素 a_2 是否在 S_1 中，有2种可能 ($a_2 \in S_1$, $a_2 \notin S_1$);

.....

第 k 步，考察元素 a_k 是否在 S_1 中，有2种可能 ($a_k \in S_1$, $a_k \notin S_1$);

.....

第 n 步，考察元素 a_n 是否在 S_1 中，有2种可能 ($a_n \in S_1$, $a_n \notin S_1$).

只要完成上述 n 个步骤，那么集合 S_1 中元素就完全确定了。根据分步乘法计数原理，对于由 n 个元素组成的集合，共有

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ 个 } 2} = 2^n$$

个不同的子集。



你还能用另外的方法证明上述结论吗？

习题 1.1

A 组

1. 一个商店销售某种型号的电视机，其中本地的产品有4种，外地的产品有7种，要买1台这种型号的电视机，有多少种不同的选法？

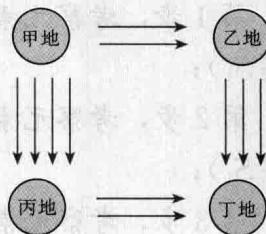
2. 如图，从甲地到乙地有2条路，从乙地到丁地有3条路；从甲地到丙地有4条路，从丙地到丁地有2条路。从甲地到丁地共有多少条不同的路线？

3. 用1, 5, 9, 13中的任意一个数作分子，4, 8, 12, 16中任意一个数作分母，可构成多少个不同的分数？可构成多少个不同的真分数？

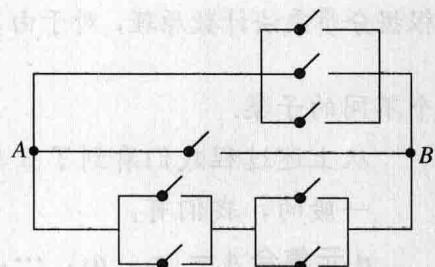
4. 如图，一条电路从A处到B处接通时，可有多少条不同的线路？

5. (1) 在平面直角坐标系内，横坐标与纵坐标均在 $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 内取值的不同点共有多少个？

- (2) 在平面直角坐标系内，斜率在集合 $B=\{1, 3, 5, 7\}$ 内取值，y轴上的截距在集合 $C=\{2, 4, 6, 8\}$ 内取值的不同直线共有多少条？



(第2题)



(第4题)