矿区控制测量

（下册）

焦作矿业学院

一九七七年

毛 主 席 语

马克思主义的哲学辩证唯物论有两个最显著的特点：一个是它的阶级性，公然申明辩证唯物论是为无产阶级服务的；再一个是它的实践性，强调理论对于实践的依赖关系，理论的基础是实践，又转过来为实践服务。

——《实践论》——

说　明

这份教材是在1973年“矿区控制测量”协编小组所编教材的基础上，总结我院矿山测量专业两届开门办学的实践，而重新编写的。

本教材述及的内容主要为矿区三等与三等以下的水平和高程控制测量工作，其中上册讲述矿区控制测量的野外作业及其有关理论，下册讲述内业平差计算的原理和方法以及矿区控制网的技术设计。有关电磁波测距仪、电子计算机等在矿区控制测量中的应用问题将另编专题教材，本书不再涉及。

编写本教材的技术依据为：（1）1974年国家测绘总局制定“国家三角测量和精密导线测量规范”；（2）1974年国家测绘总局制定“国家水准测量规范”；（3）1966年国家测绘总局主编“1：1000 1：2000 1：5000比例尺地形测量规范草案”（地质勘探专业）。

在编写中我们还注意了以下几个问题：（1）内容的组织与衔接应该符合“实践——理论——实践”的认识规律，同时力求与矿区控制测量的作业程序相一致，以便利于在生产实践中组织教学；（2）内容的选取应尽量便利于生产实践，减少学员在实际作业中查找更多书刊的困难；（3）各部分内容最好能有一定的独立性，以满足多种形式办学的需要；（4）学员在学完了普通测量方法与测量误差一般知识之后，就能够学习本教材的某些内容，以适应教育革命不断发展的需要。

本教材的编写是在教学工作的同时进行的，时间比较仓促，我们水平又很低，所以缺点和错处在所难免，希望批评指正。

焦作矿业学院《矿区控制测量》编写组

一九七六年二月

目　　　录

第十四章　方位角的测定与平面坐标系统换算

第十五章　矿区控制测量技术设计

第十章　三角网按条件观测平差

内容提要

三角测量的主要目的就是通过在地面上所进行的观测（长度测量、水平角观测）结果来推算三角形各边的边长和坐标方位角，从而求出三角点的坐标。为了提高三角点坐标测定精度，检查观测、计算中可能出现的错误以及对观测结果的精度作出评定，在观测时必须进行多余观测。由于观测值不可避免的带有误差，各观测结果之间必然存在矛盾。因此，用不同观测结果推算的边长、坐标方位角和坐标也就不能一致。为了消除多余观测之间的几何矛盾，求出三角测量中各推算元素的最或然值，并评定观测值与平差值函数的精度，应须根据最小二乘法原理进行三角测量的平差计算。

为此，必须先列出各个观测角度改正数应满足的几何条件方程式，再依此组成法方程式并进行解算，从而求出各改正数的最或然值，然后将这些改正数加于相应的观测值，就得到了平差角度。此后的工作就是根据起算数据和这些平差值来计算网中的其它元素，例如边长、方位角和点的坐标。这些就是本章所要阐述的三角网的条件观测平差。其主要内容包括：

1．条件观测平差的基本原理；

2．条件方程式的种类和组成；

3．法方程式的组成与解算；

4．观测值与平差值函数的精度评定。

通过本章的学习，要掌握条件观测平差的基本理论和基本方法，并为以后各章的学习打好基础。

§10—1　概　　述

我们知道，测量过程是人利用一定的仪器，在一定的自然条件下进行的，由于观测中不可避免地存在着误差，这就与我们要求得到的正确可靠结果产生了矛盾。为了揭露由于测量误差所产生的这种矛盾和减少误差的影响，我们通常要进行多余观测。譬如一平面三角形测两个内角就可以了，第三个角度可由180°减出，但实际上均是观测三个角度。

多余观测揭露了观测误差产生的矛盾，但揭露矛盾的目的是为了解决矛盾。因此，我们的任务就是运用辩证唯物主义的观点，研究和解决如何根据多余观测，来求出最可靠的结果（即最或然值），并且根据观测结果中的误差，来正确判断观测结果质量的好坏（即精度评定）。

一、最小二乘法原理的概念

我们先来介绍一下解决上述任务的基本方法问题，即所谓“最小二乘法原理”的概念。

先通过一个具体例子来说明。如图10—1，观测了平面三角形的三个内角，观测值分别为L_1、L_2和L_3，由于观测有误差，其和不为180°而等于180°00′06″，其中大于（或小于）180°的值称为闭合差。为了消除闭合差，可以将各观测值加上改正

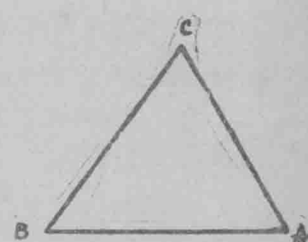


图10—1

数v_i，使它们满足理论上的要求。但这样的改正数可以有很多组，例如可使：

第一组，$v_1 = -2''$、$v_2 = -2''$、$v_3 = -2''$；

第二组，$v_1 = -1''$、$v_2 = -2''$、$v_3 = -3''$；

第三组，$v_1 = +1''$、$v_2 = -3''$、$v_3 = -4''$；

……………………………………………

那末到底取那一组改正数呢？由于三角形三个内角是在相同的条件下观测的，一般来说，没有理由随便对那个角度多改正或少改正。因此，从直观来看，取第一组比较合理，即将闭合差反号平均分配于各角中。

对于上例这样简单的问题，我们可以采取分配闭合差的方法找出一组比较合理的改正数。但是当问题复杂时，往往不能这样处理，如图10—2的大地四边形，在测站A、B、C、D上，分别观测了1、2、……8等角，这时三角形ABC、ACD、ABD、BCD均须满足三内角之和等于180°。显然，如果按上例分配闭合差的办法，就很难确定一组改正数使改正后的结果均满足各三内角之和等于180°这个理论上的要求；同时又是比较合理的。

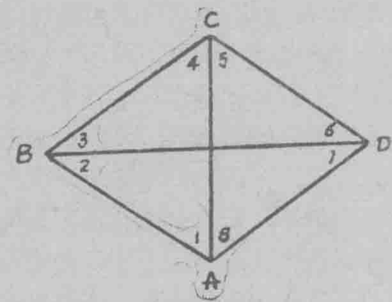


图10—2

从长期的测量实践及高等数学研究的结果表明：取各观测值的权与其改正数平方的乘积和为最小的那一组改正数最为合理，这个理论就叫“最小二乘法原理”。

设n个观测值的权分别用p_1、p_2、……p_n表示，其相应改正数分别用v_1、v_2、……v_n表示，则“最小二乘法原理”可用数学式子表示为：

$$p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \cdots\cdots + p_nv_n^2 = [pvv] = \text{最小} \tag{10—1}$$

根据上面条件确定的改正数称为“最或然改正数”。用这样的改正数改正的观测值称为“最或然值”或“平差值”。根据上述条件求最或然值的方法称为“最小二乘法”。

从前面的例子可以看出，用闭合差反号平均分配于各角中所得出的第一组改正数，是符合最小二乘法原理的。因为等精度观测情况下，令各观测值的权为1，则第一组的$[pvv]=12$，比其它任意一组的$[pvv]$都要小。

毛主席说：**“许多自然科学理论之所以被称为真理，不但在于自然科学家们创立这些学说的时候，而且在于为尔后的科学实践所证实的时候。”**最小二乘法原理自从产生以来已经有一百多年的历史了，经过长期的测量实践表明，根据此原理可以确定唯一的一组改正数，由这组改正数改正的观测结果就是最可靠的结果。因此，以后我们所研究的一切平差计算方法，都是以此原理为基础的。

二、条件观测平差基本概念

如前所述，当有多余观测的情况下就产生平差问题。例如对某三角形测得三内角的观测值为L_1、L_2及L_3，设其相应角的最或然值为$\overline{L}_1$、$\overline{L}_2$及$\overline{L}_3$，其相应的改正数为v_1、v_2及v_3，则可列出如下的方程组：

$$\left.\begin{aligned} \overline{L}_1 &= L_1 + v_1 \\ \overline{L}_2 &= L_2 + v_2 \\ \overline{L}_3 &= L_3 + v_3 \end{aligned}\right\} \tag{10—2}$$

显然，三个内角的最或然值之和应满足等于180°的几何条件，即：

$$\bar{L}_1+\bar{L}_2+\bar{L}_3-180°=0 \tag{10—3}$$

将(10—2)式代入上式得：

$$(L_1+v_1)+(L_2+v_2)+(L_3+v_3)-180°=0$$

$$v_1+v_2+v_3+(L_1+L_2+L_3-180°)=0$$

或：

$$\left.\begin{aligned} &v_1+v_2+v_3+w=0\\ &w=L_1+L_2+L_3-180° \end{aligned}\right\} \tag{10—4}$$

(10—3)式称为改正数条件方程式，简称条件方程式，w称为自由项，在这里也就是三角形闭合差。

由(10—2)式知道要获得各项观测量的最或然值，必须求出各改正数v_i。条件平差法确定这些改正数v_i的原则是：所有的v_i既要满足条件方程式又要使$[pvv]=$最小。按这个原则确定最或然值的平差方法称为条件观测平差。

矿区三、四等三角测量平差计算是在高斯投影平面上进行的。从第六章三角测量概算中可以得到化算至标石中心的高斯投影平面上的方向值，依据各方向值计算出各角度值，这些数据就作为平差中的观测值。此外，还要查出与平差有关的起算数据，如已知的高级控制网的边长、坐标方位角和坐标等。

三角网按条件观测平差时，如果条件方程式中改正数是角度改正数，称为按角度平差；如果改正数是方向改正数，则称按方向平差。由于三、四等三角测量主要采用方向观测法，此时各方向值是直接观测值，所以按方向平差是严密的；如果按角度平差，则各角度均由各相邻方向值计算得来，此时我们将角度看作是直接观测值。所以说，按角度平差是不严密的。两种平差结果在数值上和精度上稍有出入，但差异很小，这种差异对于三、四等三角网或更低等的加密控制网的平差来说是没有影响的。又因考虑到按角度平差比按方向平差简单，所以在实际作业中，三角网按条件平差时，多采用按角度平差。故在本章内主要是讲按角度平差。

§10—2 条件平差原理

通过上述分析，初步知道了什么是条件方程式，但是如何平差并求出最或然值，尚未解决。毛主席教导我们：**“要解决问题，还须作系统的周密的调查工作和研究工作，这就是分析的过程。”**为此，我们要进一步探讨条件平差的一般原理，找出解决问题的基本规律。

设在某个平差问题中有n个观测值，其中r个多余观测，因而就产生r个条件方程式，其一般形式为：

$$\left.\begin{aligned} &a_1\bar{L}_1+a_2\bar{L}_2+\cdots\cdots+a_n\bar{L}_n+a_0=0\\ &b_1\bar{L}_1+b_2\bar{L}_2+\cdots\cdots+b_n\bar{L}_n+b_0=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &r_1\bar{L}_1+r_2\bar{L}_2+\cdots\cdots+r_n\bar{L}_n+r_0=0 \end{aligned}\right\} \tag{10—5}$$

式中：a_i、b_i、……r_i为已知系数。

将(10—3)式与上式对照，则(10—3)式中的$-180°$就是a_0，而且$a_1=a_2=a_3=+1$；

因为（10—3）式只有一个条件方程式，所以，$b_i = c_i = \cdots\cdots = r_i = 0$。若将（10—2）式$\overline{L}_i = L_i + v_i$代入（10—5）式，则条件方程式变为：

$$
\begin{aligned}
&a_1(L_1+v_1)+a_2(L_2+v_2)+\cdots\cdots+a_n(L_n+v_n)+a_0=0\\
&b_1(L_1+v_1)+b_2(L_2+v_2)+\cdots\cdots+b_n(L_n+v_n)+b_0=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_1(L_1+v_1)+r_2(L_2+v_2)+\cdots\cdots+r_n(L_n+v_n)+r_0=0
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_1v_1+a_2v_2+\cdots\cdots+a_nv_n+(a_1L_1+a_2L_2+\cdots\cdots+a_nL_n+a_0)=0\\
&b_1v_1+b_2v_2+\cdots\cdots+b_nv_n+(b_1L_1+b_2L_2+\cdots\cdots+b_nL_n+b_0)=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_1v_1+r_2v_2+\cdots\cdots+r_nv_n+(r_1L_1+r_2L_2+\cdots\cdots+r_nL_n+r_0)=0
\end{aligned}
\right\}
$$

将（10—4）式与上式对照可知，上式中带括号的这一项即是自由项w，其值为：

$$
\left.
\begin{aligned}
&w_a=a_1L_1+a_2L_2+\cdots\cdots+a_nL_n+a_0\\
&w_b=b_1L_1+b_2L_2+\cdots\cdots+b_nL_n+b_0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&w_r=r_1L_1+r_2L_2+\cdots\cdots+r_nL_n+r_0
\end{aligned}
\right\}
\qquad (10—6)
$$

因此条件方程式（10—5）可写为：

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_1v_1+a_2v_2+\cdots\cdots+a_nv_n+w_a=0\\
&b_1v_1+b_2v_2+\cdots\cdots+b_nv_n+w_b=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_1v_1+r_2v_2+\cdots\cdots+r_nv_n+w_r=0
\end{aligned}
\right\}
\qquad (10—7)
$$

此式称为改正数条件方程式（简称条件方程式）。

这里条件方程式中的未知数是改正数v，其个数等于观测值的个数n；而方程式的个数等于多余观测的个数r，因此未知数的个数必多于方程式个数，即$n>r$。我们知道，当未知数个数等于方程式个数时（如二个未知数有二个方程式），这个方程组就只有唯一的解。当未知数的个数多于方程式的个数时，这个方程组就可以有多组解，它的解是不定的，但当我们确定下述原则：使所有的改正数v_i既要满足条件方程式，又要使这些改正数之平方乘以相应权的和为最小，即〔pvv〕＝最小，此时条件方程式的解就变成唯一的解了。这组唯一的解就是我们所要求的最或然改正数。

按照最小二乘法原理，在满足条件方程式及〔pvv〕＝最小的要求下求出改正数，这就需要利用数学中求“条件极值”的方法进行解算。

在高等数学中讨论条件极值时曾经指出：

欲求n元函数〔pvv〕$=p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2$在$r$个（$r<n$）附加条件〔式（10—7）〕

下的可能极值，可以用常数 $-2k_a$、$-2k_b$、……$-2k_r$ 依次乘各附加条件式，然后把结果与原函数〔pvv〕相加，得一新函数：

$$
\begin{aligned}
\varphi(v_1,\ v_2,\cdots\cdots v_n) = {} & p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots\cdots + p_n v_n^2 \\
& - 2k_a a_1 v_1 - 2k_a a_2 v_2 - \cdots\cdots - 2k_a a_n v_n - 2k_a w_a \\
& - 2k_b b_1 v_1 - 2k_b b_2 v_2 - \cdots\cdots - 2k_b b_n v_n - 2k_b w_b \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& - 2k_r r_1 v_1 - 2k_r r_2 v_2 - \cdots\cdots - 2k_r r_n v_n - 2k_r w_r
\end{aligned}
$$

上式中 k_a、k_b、……k_r 在数学上称为拉格朗日不定乘数，测量平差中称为联系数，其个数等于附加条件个数。若将上式依次对自变量 v_1、v_2、……v_n 取一阶偏导数，并令其等于零，就得到无附加条件时具有极值的必要条件：

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} &= 2p_1 v_1 - 2k_a a_1 - 2k_b b_1 - \cdots\cdots - 2k_r r_1 = 0 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial v_2} &= 2p_2 v_2 - 2k_a a_2 - 2k_b b_2 - \cdots\cdots - 2k_r r_2 = 0 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial \varphi}{\partial v_n} &= 2p_n v_n - 2k_a a_n - 2k_b b_n - \cdots\cdots - 2k_r r_n = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (10-8)
$$

这 n 个方程(10—8)与 r 个方程(10—7)联立解出 $n+r$ 个未知数 v_1、v_2、……v_n 及 k_a、k_b、……k_r，而其中 v_1、v_2、……v_n 就给出函数〔pvv〕的极值，即〔pvv〕＝最小。

上述 $n+r$ 个方程称为条件平差的基础方程，其解算方法是由(10—8)式求得改正数 v_i：

$$
\left.
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{p_1}(a_1 k_a + b_1 k_b + \cdots\cdots + r_1 k_r) \\
v_2 &= \frac{1}{p_2}(a_2 k_a + b_2 k_b + \cdots\cdots + r_2 k_r) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= \frac{1}{p_n}(a_n k_a + b_n k_b + \cdots\cdots + r_n k_r)
\end{aligned}
\right\} \quad (10-9)
$$

(10—9)式称为改正数方程式，其个数等于观测个数 n。将(10—9)式代入(9—7)式消去 v_i，然后按 k 值集项，经整理后得：

$$
\left.
\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right]k_a + \left[\frac{ab}{p}\right]k_b + \cdots\cdots + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r + w_a = 0 \\
\left[\frac{ab}{p}\right]k_a + \left[\frac{bb}{p}\right]k_b + \cdots\cdots + \left[\frac{br}{p}\right]k_r + w_b = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left[\frac{ar}{p}\right]k_a + \left[\frac{br}{p}\right]k_b + \cdots\cdots + \left[\frac{rr}{p}\right]k_r + w_r = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (10-10)
$$

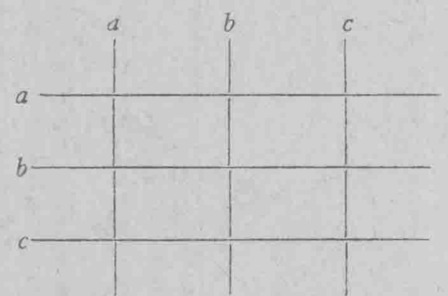
(10—10)式称为联系数法方程式，简称法方程式，其个数等于条件方程式个数，即有 r 个法方程式，足以解出 r 个 k。将解得的 k 值再代入(10—9)式中，即可求得 n 个 v。如果将 v_i 值加到各相应的观测值 L_i 中，就得到 n 个观测值的最或然值 $\overline{L}_i$。由于这样解算出来的

$\overline{L}_i = L_i + v_i$ 能满足条件方程式（10—7）式，又能满足〔pvv〕=最小，所以这些 $\overline{L}_i$ 就是我们要求的相应观测值的最或然值。至此，最或然值的解算问题就完全解决了。

（10—10）式中的〔$\frac{aa}{p}$〕、〔$\frac{bb}{p}$〕、……〔$\frac{rr}{p}$〕称为平方系数；其余的系数称为非平方系数；而 w_a、w_b、……w_r 等既是条件方程式(10—7)中的自由项，又是法方程式中的自由项。

从（10—10）式可以看出，法方程式具有下列特性：如果将法方程式中的平方系数用一直线连结起来，则对称于此直线两侧的系数，其数值与符号均两两相等。因此可以把法方程式（以三个方程式为例）缩写成下列形式：

$$
\begin{array}{c|c|c|l}
k_a & k_b & k_c & \\
\left(\frac{aa}{p}\right) & \left(\frac{ab}{p}\right) & \left(\frac{ac}{p}\right) & w_a=0 \rightarrow \\
\hline
 & \left(\frac{bb}{p}\right) & \left(\frac{bc}{p}\right) & w_b=0 \rightarrow \\
\hline
 & & \left(\frac{cc}{p}\right) & w_c=0 \rightarrow
\end{array}
$$

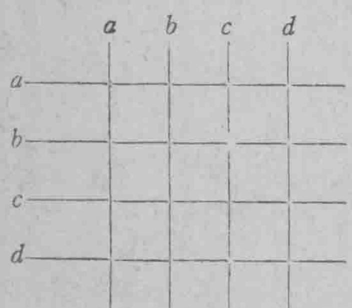


上面的直线和箭头表示读出法方程式的程序。法方程式中 k 前的系数可以通过右边的列线图来记忆。图中上面和左面的系数 a、b、c 表示改正数方程式中相应的系数，图中两线交点即表示两个字母乘积的位置，这样就可以顺利地写出法方程式了。

例如某平差问题有四个条件方程式，其改正数方程式的一般形式为：

$$v_i = \frac{1}{p_i}(a_ik_a + b_ik_b + c_ik_c + d_ik_d) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n)$$

按列线图即可写出相应的法方程式为：



$$
\left.
\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right]k_a + \left[\frac{ab}{p}\right]k_b + \left[\frac{ac}{p}\right]k_c + \left[\frac{ad}{p}\right]k_d + w_a = 0\\
\left[\frac{ab}{p}\right]k_a + \left[\frac{bb}{p}\right]k_b + \left[\frac{bc}{p}\right]k_c + \left[\frac{bd}{p}\right]k_d + w_b = 0\\
\left[\frac{ac}{p}\right]k_a + \left[\frac{bc}{p}\right]k_b + \left[\frac{cc}{p}\right]k_c + \left[\frac{cd}{p}\right]k_d + w_c = 0\\
\left[\frac{ad}{p}\right]k_a + \left[\frac{bd}{p}\right]k_b + \left[\frac{cd}{p}\right]k_c + \left[\frac{dd}{p}\right]k_d + w_d = 0
\end{aligned}
\right\}
$$

这里不仅说明了法方程式的记忆方法，更重要的是指出了法方程式的组成规律。因而在实际计算时，不需要由条件方程式及〔pvv〕组成新函数 φ，再求偏导数，便可直接组成法

方程式，解算法方程式即可求得联系数 k，再将 k 值代入改正数方程式中求得改正数 v_i，最后求出 $\overline{L}_i = L_i + v_i$。

在等精度观测情况下，因 $p_1 = p_2 = \cdots\cdots = p_n = 1$，所以法方程式为：

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\ k_a + [ab]\ k_b + \cdots\cdots + [ar]\ k_r + w_a &= 0 \\
[ab]\ k_a + [bb]\ k_b + \cdots\cdots + [br]\ k_r + w_b &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[ar]\ k_a + [br]\ k_b + \cdots\cdots + [rr]\ k_r + w_r &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{—}11)$$

其相应的改正数方程式为：

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= a_1 k_a + b_1 k_b + \cdots\cdots + r_1 k_r \\
v_2 &= a_2 k_a + b_2 k_b + \cdots\cdots + r_2 k_r \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= a_n k_a + b_n k_b + \cdots\cdots + r_n k_r
\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{—}12)$$

条件平差法的原理就是这样。从上面的讨论可以看出：条件平差法主要是抓住三组方程式，即条件方程式(10—7)，改正数方程式（10—9）或(10—12）和法方程式（10—10）或（10—11）。

为了加深对条件平差原理的认识，下面举两个例子加以说明。

例题〔10—1〕如图10—1，对该三角形三个内角进行等精度观测得观测值为：

$$L_1 = 60°32'52''.3$$
$$L_2 = 37°25'09''.6$$
$$L_3 = 82°01'51''.8$$

试用条件平差法求三个角的最或然值。

〔解〕我们知道，一个三角形只观测两个角度就可以了，现观测了三个角度，则有一个多余观测，故有一个条件式（关于决定条件方程式的个数问题将在第四节中讨论）设 $\overline{L}_i$ 代表各角最或然值，则：

$$\overline{L}_1 + \overline{L}_2 + \overline{L}_3 - 180° = 0$$

以 $\overline{L}_i = L_i + v_i$ 代入即得：

$$v_1 + v_2 + v_3 + (L_1 + L_2 + L_3 - 180°) = 0$$

或 $$v_1 + v_2 + v_3 + w_a = 0$$

而 $$w_a = L_1 + L_2 + L_3 - 180° = -6.''3$$

因此，条件方程式为：

$$v_1 + v_2 + v_3 - 6''.3 = 0$$

当工作熟练后，以上步骤均可省略，可直接写出条件方程式。将上式和一般条件方程式

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + w_a = 0$$

相比较可以看出：

$$a_1 = a_2 = a_3 = +1 \qquad w_a = -6''.3$$

由于观测值精度相同，令$p_i=1$。因此按等精度观测，组成法方程式应为：

$$[aa]\ k_a+w_a=0$$

此处 $[aa]=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3=+3$

所以得法方程式为：

$$3k_a-6''.3=0$$

解之得：

$$k_a=+2''.1$$

将k_a代入改正数方程式，得改正数为：

$$v_1=a_1k_a=1\times2''.1=+2''.1$$

$$v_2=a_2k_a=1\times2''.1=+2''.1$$

$$v_3=a_3k_a=1\times2''.1=+2''.1$$

最后得各角的最或然值为：

$$\overline{L_1}=L_1+v_1=60°32'52''.3+2''.1=60°32'54''.4$$

$$\overline{L_2}=L_2+v_2=37°25'09''.6+2''.1=37°25'11''.7$$

$$\overline{L_3}=L_3+v_3=82°01'51''.8+2''.1=82°01'53''.9$$

由上面计算的结果可以看出，三角形各角之改正数等于三角形闭合差的三分之一反号。

例题〔10—2〕设测站O上有7个方向，按方向观测法分两组观测，其观测值见表10—1。试按条件平差法进行测站平差。

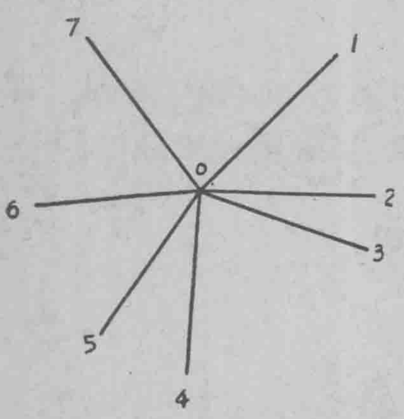


图10—3

表10—1

方向号	第 一 组	第 二 组
1	0°00′00″.0	0°00′00″.0
2	42 35 18.4	
3		55 45 15.2
4	141 04 56.8	
5	169 00 52.3	
6	220 14 13.6	220 14 12.0
7		278 38 08.7

〔解〕分组观测时，两组至少应联测一个共同方向，多联测一个方向，就有一个多余观测。现多联测一个方向，故有一个多余观测，即产生一个条件。若一、二组观测值和改正数上用“′”及“″”加以区别，则其条件方程式为：

$$\left\{(L_6'+v_6')-(L_1'+v_1')\right\}-\left\{(L_6''+v_6'')-(L_1''+v_1'')\right\}=0$$

即： $-v_1'+v_6'+v_1''-v_6''+w=0$

式中， $w=(L_6'-L_1')-(L_6''-L_1'')=+1.''6$；

$a_1'=-1,\quad a_6'=+1,\quad a_1''=+1,\quad a_6''=-1$。

法方程式为：

$$4k_a+1''.6=0$$

解之得

$$k_a=-0''.4$$

将k_a代入改正数方程式得：

$$v_1'=a_1'k_a=+0''.4$$

$$v_6'=a_6'k_a=-0''.4$$

$$v_1''=a_1''k_a=-0''.4$$

$$v_6''=a_6''k_a=+0''.4$$

表10—2

方向号	第一组			第二组			平差值
	观测值 L'	改正数 v'	v' 归零	观测值 L''	改正数 v''	v'' 归零	
1	0°00′00″.0	+0″.4	0″.0	0°00′00″.0	−0″.4	0″.0	0°00′00″.0
2	42 35 18.4		−0.4				42 35 18.0
3				55 45 15.2		+0.4	55 45 15.6
4	141 04 56.8		−0.4				141 04 56.4
5	169 00 52.3		−0.4				169 00 51.9
6	220 14 13.6	−0.4	−0.8	220 14 12.0	+0.4	+0.8	220 14 12.8
7				278 38 08.7		+0.4	278 38 09.1

为了使零方向值保持0°00′00″.0，还需要将改正数归零。最后将两组观测值加上“归零”后的改正数，即得两组测站平差后的平差方向值。这就是我们在§5—4所介绍的分组观测的测站平差方法。

通过上述例题不难看出，条件平差的主要步骤可归纳如下：

1．依题意选定独立条件并列出条件方程式；

2．组成法方程式；

3．解法方程式求出联系数 k_i；

4．将联系数 k_i 代入改正数方程式求改正数 v_i；

5．依 $\overline{L}_i=L_i+v_i$求出各观测量的最或然值；

6．精度评定。

实际计算方法将在本章以后各节分别论述。

§10—3　条件方程式的种类和组成

三角网按条件平差时，首先要列出条件方程式。在列条件方程式之前，必须弄清三角网中有些什么条件。在一个复杂的三角网中，其基本结构只有三种图形，即三角形、中点多边形和大地四边形。三角形很简单，所以只要仔细研究后两种图形的条件，问题就基本解决了。至于起算数据所引起的条件，因为比较直观，所以也不难解决。

三角网条件方程式有六种，在自由网中有：图形条件、水平条件和极条件三种，这三种条件与图形的几何结构有关；非自由网中，除了具有自由网中的各种条件以外，还有由于多于起算数据而产生的条件，通常称为强制附合条件，包括基线条件、坐标方位角条件和纵横坐标条件三种，这三种条件与起算数据有关。下面分别介绍各种条件方程式的组成。

一、自由网条件方程式的种类和组成

在以下的论述中我们令：a_i 、b_i 、c_i 为三角形的角度观测值；v_{ai}、v_{bi}、v_{ci}为相应的角度改正数；$\bar{a}_i$、$\bar{b}_i$、$\bar{c}_i$为相应的角度平差值，亦即最或然值。它们之间的关系为：

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_i &= a_i + v_{ai}\\ \bar{b}_i &= b_i + v_{bi}\\ \bar{c}_i &= c_i + v_{ci}\end{aligned}\right\} \qquad (10—13)$$

1．图形条件

在任何闭合多边形中，如果对所有项角都进行了观测，这就要求各观测角的平差值之和应等于（$n-2$）180°，n为边数。对于平面三角形而言，即要求三内角的平差值之和等于180°，这种条件统称为图形条件。

图形条件一般是由三角形组成。中点多边形(图10—4)中的每个三角形OAB、OBC、……都有一个图形条件。例如在三角形OAB内，各观测角的平差值要满足

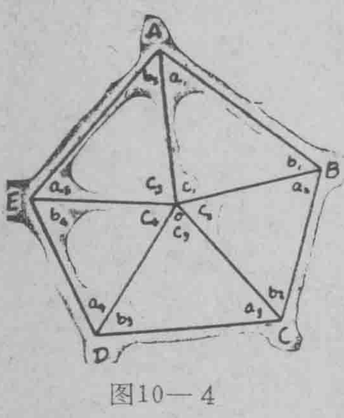


图10—4

$$\bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c}_1 - 180° = 0$$

将（10—13）式代入上式得：

$$v_{a_1} + v_{b_1} + v_{c_1} + a_1 + b_1 + c_1 - 180° = 0$$

即

$$\left.\begin{aligned}&v_{a_1} + v_{b_1} + v_{c_1} + w = 0\\ &w = a_1 + b_1 + c_1 - 180°\end{aligned}\right\} \qquad (10-14)$$

式中w称为自由项，也就是三角形的闭合差。

在大地四边形中(图10—5)，可由三角形ABC、BCD、CDA列出三个图形条件方程式，即：

$$v_{a_1}+v_{b_1}+v_{a_2}+v_{b_2}+w_1=0 \quad (1)$$
$$v_{a_2}+v_{b_2}+v_{a_3}+v_{b_3}+w_2=0 \quad (2)$$
$$v_{a_3}+v_{b_3}+v_{a_4}+v_{b_4}+w_3=0 \quad (3)$$

$$w_1=a_1+b_1+a_2+b_2-180°$$
$$w_2=a_2+b_2+a_3+b_3-180°$$
$$w_3=a_3+b_3+a_4+b_4-180°$$

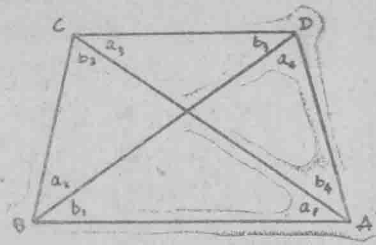


图10—5

但由第四个三角形ABD中也可列出一个图形条件方程式，即：

$$v_{a_1}+v_{b_1}+v_{a_4}+v_{b_4}+w_4=0 \quad (4)$$

式中：　$w_4=a_1+b_1+a_4+b_4-180°$

因为（4）式可由（1）、（2）、（3）式推导出来，即(1)-(2)+(3)=(4),所以（4）式不是独立的。由此可知在大地四边形中只有三个独立的图形条件，第四个条件是不独立的。

2．水平条件

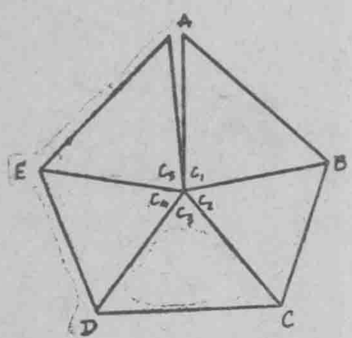


图10—6

当三角网中有中点多边形，且在中点上观测了所有环绕该点的各角，这时就要产生水平条件。即在中点多边形的中点上，所有邻角观测值的平差值之和应等于360°，这种条件称为水平条件。

如在中点多边形（图10—4）的O点上各角观测值的平差值要满足

$$\bar{c}_1+\bar{c}_2+\bar{c}_3+\bar{c}_4+\bar{c}_5-360°=0$$

将（10—13）式代入上式得：

$$\left.\begin{aligned} &v_{c_1}+v_{c_2}+v_{c_3}+v_{c_4}+v_{c_5}+w=0 \\ &w=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5-360° \end{aligned}\right\} \quad (10—15)$$

平差时若只考虑三角形的图形条件，不考虑水平条件，平差后各三角形的几何条件虽说得到满足，但中心点O的各邻角平差值之和不会满足360°的几何要求，这种图形为不闭合中点多边形（图10—6）。因此，平差时必须考虑这个条件。

3．极条件

（1）　中点多边形中极条件方程式的组成

在中点多边形中（图10—4），假如各观测角毫无误差，则由任一边OA起算，依次经过三角形AOB、BOC、COD、DOE及EOA，又可算出OA的边长，它应与原有值相等。但实际上观测角是有误差的，该图形即使满足了图形条件和水平条件，上述条件也不一定能满足。例如在图10—7所示的中点多边形中，其中五个图形条件和一个水平条件都已满足，若通过三角形A_1OB从OA_1推算OB边，再通过三角形BOC、COD、DOE依次从OB推算OC、OD、OE边，

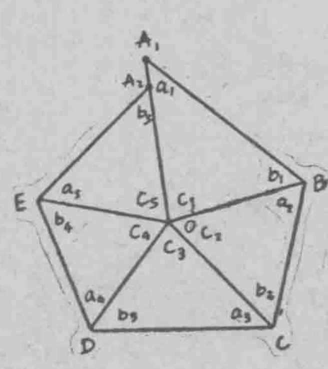


图10—7

最后再通过三角形EOA_2从OE推回到边OA_2，而OA_2不等于出发边OA_1。如果要使平差的几何图形完全闭合，则平差时还必须考虑这个条件，即由图形中任一边出发，按平差角解算具有公共顶点的诸三角形，再回到出发边，使其推算值等于原有值。这一条件可用数学式表达为：

$$\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OD}{OC}\cdot\frac{OE}{OD}\cdot\frac{OA}{OE}=1 \qquad (5)$$

因为这个条件是按边长的比例列出的，所以称为边长条件，但又因在列出条件时，各边长均以中心点为极，故又称为极条件。

上式是以各边长表示的极条件，因为直接观测值是角度，所以必须以角度来表达这一条件。由三角形正弦定律知：

$$\frac{OB}{OA}=\frac{\sin\bar{a}_1}{\sin\bar{b}_1},\quad \frac{OC}{OB}=\frac{\sin\bar{a}_2}{\sin\bar{b}_2},\quad \frac{OD}{OC}=\frac{\sin\bar{a}_3}{\sin\bar{b}_3},\quad \frac{OE}{OD}=\frac{\sin\bar{a}_4}{\sin\bar{b}_4},\quad \frac{OA}{OE}=\frac{\sin\bar{a}_5}{\sin\bar{a}_5} \qquad (6)$$

将（6）代入（5）式得

$$\frac{\sin\bar{a}_1\cdot\sin\bar{a}_2\cdot\sin\bar{a}_3\cdot\sin\bar{a}_4\cdot\sin\bar{a}_5}{\sin\bar{b}_1\cdot\sin\bar{b}_2\cdot\sin\bar{b}_3\cdot\sin\bar{b}_4\cdot\sin\bar{b}_5}=1 \qquad (10-16)$$

式(10—16)是极条件方程式的原始形式，它是一个非线性函数的条件式。从§10—2中我们知道，参加平差的条件方程式必须是线性的，即只能是改正数v_i的一次函数形式，为此，还应将（10—16）式化为线性的，并以改正数v_i表示的条件方程式。为了化算方便，先将两端取对数得：

$$lg\sin\bar{a}_1+lg\sin\bar{a}_2+lg\sin\bar{a}_3+lg\sin\bar{a}_4+lg\sin\bar{a}_5$$

$$-lg\sin\bar{b}_1-lg\sin\bar{b}_2-lg\sin\bar{b}_3-lg\sin\bar{b}_4-lg\sin\bar{b}_5=0 \qquad (10-17)$$

为了研究（10—17）式的化算，我们取其一项$lg\sin\bar{a}_1$为例。因为$\bar{a}_1=a_1+v_{a_1}$，所以有：

$$lg\sin\bar{a}_1=lg\sin(a_1+v_{a_1})$$

按台劳级数展开得：

$$lg\sin\bar{a}_1=lg\sin(a_1+v_{a_1})=lg\sin a_1+\frac{d\,lg\sin a_1}{da_1}\cdot\frac{v_{a_1}''}{\rho''}+\cdots\cdots$$

因为v值是微小量，所以二次及二次以上的项我们均可略去，令：

$$\frac{d\,lg\sin a_1}{da_1}\cdot\frac{1}{\rho''}=\delta_{a_1}$$

则 $$lg\sin\bar{a}_1=lg\sin a_1+\delta_{a_1}v_{a_1}''$$

将上式写成一般形式为：