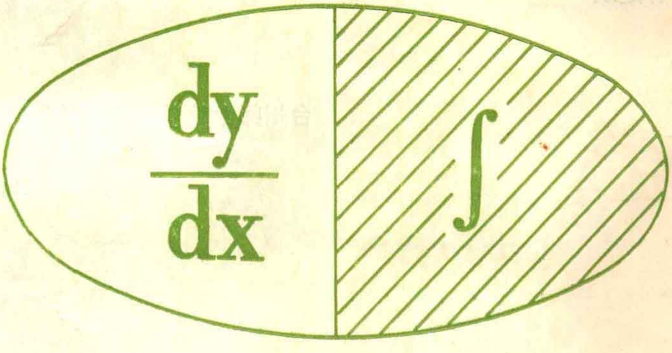
中学数学教学参攷资料选编

微积分



台州师专数学科

前　　言

目前，《微积分》的教学已在高中普遍开始试行，如何教好这一内容，这是中学数学界所关心的一个新问题，各地正在摸索探讨这方面的教学经验。近来，《数学通报》以及全国各地的中学数学教学研究的杂志中不断刊载有关文章。考虑当前各中学存在参考资料不足的实际困难，我们《数学分析》教研组全体同志，集中力量查阅了20多种有关中学数学教学杂志，从中精选汇编成本《选编》。内容包括微积分简史、微积分的教学方法、经验体会、解题方法与技巧、微积分复习及它在中学数学中的地位和作用等等。想必对当前的中学微积分教学有一定的参考价值。

由于我们水平有限，加之编辑时间仓促，此《选编》难以满足广大读者的要求，缺点错误在所难免，敬请读者批评指出。

封面绘制　林建成

台州师专数学科《数学分析》教研组

1982.12

选 编 目 录

一　关于黎曼积分的定义……………………………………………………谢庭藩（ 1 ）

二　谈谈中学微积分教学……………………………………………………王祖樾（ 8 ）

三　试谈通用高中《数学》第四册一元微积分的教学……………………王汝楫（ 13 ）

四　谈谈极限概念的教学……………………………………………………钟燕平（ 22 ）

五　关于极限概念辨证关系的初步探讨……………………………………叶惠新（ 28 ）

六　有关数列极限的计算……………………………………………………洪方权（ 33 ）

七　数列极限的应用………………………………………………俞颂萱　邵之泉（ 40 ）

八　数列极限的应用…………………………………………………………三　立（ 45 ）

九　关于复合函数的极限……………………………………………………王起发（ 50 ）

十　极限计算中的常见错误…………………………………………………陈奖沾（ 54 ）

十一　初等函数连续性辨疑…………………………………………………唐家树（ 57 ）

十二　极限和导数教学的几点体会………………………………袁　桐　许　均（ 58 ）

十三　关于导数概念的教学…………………………………………………黄裕民（ 63 ）

十四　反正（余）割函数及其导数…………………………………………常庆龙（ 67 ）

十五　极限和微分中的算术根问题…………………………………………张维雄（ 69 ）

十六　谈微分在课程中的作用………………………………………………余洞沛（ 71 ）

十七　导数与微分在数学总复习中的作用…………………………………李　泉（ 77 ）

十八　如何搞好极限和微分学的复习………………………………………文　惠（ 86 ）

十九　中学的积分学教学……………………………………………………顾喆明（ 91 ）

二十　试谈定积分概念的教学………………………………………………陈士铭（ 96 ）

二十一　关于定积分定义的一点注记………………………………………叶怀安（105）

二十二　谈中学教材中的不定积分…………………………………………黄仁彬（110）

二十三　略谈中学教材中的定积分换元法…………………………………弋　云（115）

二十四　谈谈分部积分法……………………………………………………陈士铭（118）

二十五　积分的解题分析……………………………………………………蒋亚萍（122）

二十六　关于积分学的复习…………………………………………………洪方权（133）

附录　微积分历史简介………………………………………………………王恕达（135）

关于黎曼积分的定义

谢庭藩

（杭州大学数学系）

§1 前言

黎曼积分是这样定义的：设$f(x)$是定义在闭区间$[a,b]$上的函数，于此区间$[a,b]$中插入$n-1$个分点x_1，x_2，…，x_{n-1}，得到$[a,b]$的一个分划

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

并记$\|\triangle\|$为诸$\triangle x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$的最大值，也即$\|\triangle\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\triangle x_i$，在每个子区间$[x_{i-1},x_i]$中任意选取一点$\xi_i$，作乘积$f(\xi_i)\triangle x_i$之和

$$S(\triangle,f)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\triangle x_i。$$

假如不论分划$\triangle$中的分点如何取定，也不论诸$\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$如何选取，当$\|\triangle\|$趋近于零时，上述和式都以某一确定的数值I为其极限，那末称此极限值I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的黎曼积分，记作

$$I=\int_a^b f(x)dx。$$

这时，我们说函数$f(x)$在区间$[a,b]$上是黎曼可积的，积分值是I。

这个定义是十九世纪中叶，由法国数学家黎曼(B.Riemann 1826－1866)所提出的，用$\varepsilon-\delta$的语言来说，这个定义的意思是说，设有定义在闭区间$[a,b]$上的函数$f(x)$，如果有数I，对于任意给定的$\varepsilon>0$都有$\delta>0$，使得对于$[a,b]$的任意分划$\triangle$，只要$\|\triangle\|<\delta$，不论诸点ξ_i在子区间$[x_{i-1},x_i]$中如何选取，我们都有

$$|I-S(\triangle,f)|<\varepsilon,$$

那末说$f(x)$在$[a,b]$上是黎曼可积的，积分值为$I=\int_a^b f(x)dx$。

现行的中学教材中，所用的积分是用等分区间，并在每个子区间中任意取点的方法定义的，也即将积分$\int_a^b f(x)dx$定义为和数

$$\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

在$n\to\infty$时的极限，这里ξ_i是在$\left[a+\frac{i-1}{n}(b-a),\ a+\frac{i}{n}(b-a)\right]$中任意选取的。在这个定义中，保留了黎曼定义中的任意取点的要求，但将区间的任意划分削弱为等分，初看起来，这个定义似乎可以纳入数列极限的范围，其实它比数列极限要复杂得多，因为对于同一个n等分，ξ_i的选取却有无穷多种，因此有无穷多个积分和。从积分的发展历史来看，这种等分作和的思想，早在十七世纪就已经有了。

十八世纪，法国数学家柯西（A.Cauchy，1789—1857）还给出另一种定义：设f(x)为定义在闭区间[a,b]上的函数，对于[a,b]的任一分割△：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，作乘积$f(x_{i-1})\triangle x_i$之和

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\triangle_i$$

然后将积分$\int_a^b f(x)dx$定义作这种和数在$\|\triangle\|\to 0$时的极限。在柯西的定义中，保留了黎曼定义中的任意分划的要求，但将子区间中ξ_i的任意选取削弱为取子区间$[x_{i-1},x_i]$的左端点，所以后人也称之为左积分。

这样一来，我们有了积分的三种定义，简单地说，黎曼积分的定义中有两个任意：区间的任意分划以及在子区间中的任意选取。放弃了区间的任意分划而代之以等分，则得等分意义下的积分；放弃了选取的任意性而代之以子区间之左端点，则得左积分，依次记此三种意义下的积分为$(R)\int_a^b f(x)dx$；$(E)\int_a^b f(x)dx$以及$(C)\int_a^b f(x)dx$。形式上来看，它们是有区别的，后两种要弱得多，但是对于有界函数来说，它们却是等价的。下面分别介绍其等价性的初等证明。

§2 对有界函数来说，黎曼积分与等分意义下的积分是等价的。

设f(x)是定义在闭区间[a,b]上的有界函数，我们要证明，对黎曼积分与等分意义下的积分来说，f(x)的这两种积分有一种存在，则另一种也存在，而且积分值相等，即等式

$$(R)\int_a^b f(x)dx=(E)\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

的一端有意义，则另一端也有意义，而且等式成立。

现在来证明这一点。因为等分是任意分划的一种，所以$(R)\int_a^b f(x)dx$存在时，$(E)\int_a^b f(x)dx$必然存在，而且(1)式成立，这样，我们仅需证明$(E)\int_a^b f(x)dx$存在时，$(R)\int_a^b f(x)dx$也存在。

任取$\varepsilon>0$，因为$(E)\int_a^b f(x)dx$存在，故有自然数n，使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\delta_n-(E)\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{4}, \qquad (2)$$

对于$[a+(k-1)\delta_n,\ a+k\delta_n]$中的任何$\eta_k$都成立，其中$\delta_n=\dfrac{b-a}{n}$。

记M为$|f(x)|$在[a,b]上的一个上界，即有

$$|f(x)|\leqslant M \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

考察区间[a,b]的任一满足条件

$$\|\triangle\|<\frac{\varepsilon}{4nM} \quad 且 \quad \|\triangle\|<\frac{\delta_n}{3}$$

的分划

$$\triangle:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$$

对于相应于$\triangle$的任一积分和

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\triangle x_i$$

今将此和式分成两个部分，第一部分$\sum'$是由$\sum$中这样的项组成的，这些项的子区间$[x_{i-1}, x_i]$整个地含在某个$[a+(k-1)\delta_n, a+k\delta_n]$中。第二部分$\sum''$是由余下的项组成的，这样一来，$\sum''$中所含有的项之子区间$(x_{i-1}, x_i)$中必然会有n等分$[a,b]$时的某个分点，因此$\sum''$中的项数不会多于$n-1$，于是

$$|\sum{}'' f(\xi_i)\triangle x_i| \leqslant M(n-1)\|\triangle\| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (3)$$

因为$\|\triangle\| < \frac{\delta_n}{3}$，所以对于每个$k(k=1, 2, \cdots, n)$必然有一些子区间$[x_{i-1}, x_i]$落在$[a+(k-1)\delta_n, a+k\delta_n]$中。我们记$\eta^*_k$为使$[x_{i-1}, x_i]$落入$[a+(k-1)\delta_n, a+k\delta_n]$中的诸$f(\xi_i)$最大的$F_i$，即

$$f(\eta^*_k) = \max_{a+(k-1)\delta_n \leqslant x_{i-1} < x_i \leqslant a+k\delta_n} f(\xi_i)$$

于是有

$$\sum{}' f(\xi_i)\triangle x_i \leqslant \sum{}' f(\eta^*_k)\triangle x_i$$

又记$\triangle^{(k)}$为使$[x_{i-1}, x_i]$落入$[a+(k-1)\delta_n, a+k\delta_n]$中的诸$\triangle x_i$之和，即

$$\triangle^{(k)} = \sum_{a+(k-1)\delta_n \leqslant x_{i-1} < x_i \leqslant a+k\delta_n} \triangle x_i,$$

于是有

$$0 \leqslant \delta_n - \triangle^{(k)} \leqslant 2\|\triangle\|.$$

因此从

$$\sum{}' f(\eta^*_k)\triangle x_i = \sum_{k=1}^{n} f(\eta^*_k)\delta_n + \sum_{k=1}^{n} f(\eta^*_k)(\triangle^{(k)} - \delta_n)$$

看出

$$\sum{}' f(\xi_i)\triangle x_i \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\eta^*_k)\delta_n + \sum_{k=1}^{n} |f(\eta^*_k)||\triangle^{(k)} - \delta_n|$$

或者说有

$$\sum{}' f(\xi_i)\triangle_i \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\eta^*_k)\delta_n + 2nM\|\triangle\|$$

记住$\|\triangle\| < \frac{\varepsilon}{4nM}$，即有

$$\sum{}' f(\xi_i)\triangle x_i < \sum_{k=1}^{n} f(\eta^*_k)\delta_n + \frac{2\varepsilon}{4}. \qquad (4)$$

同理，记

$$f(\eta^*_k) = \min_{a+(k-1)\delta_n \leqslant x_{i-1} < x_i \leqslant a+k\delta_n} f(\xi_i),$$

则有

$$\sum_i{}' f(\xi_i)\triangle x_i \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\eta^*_k)\delta_n - \frac{2\varepsilon}{4}. \qquad (5)$$

因为

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_i{}' f(\xi_i)\triangle x_i + \sum_i{}'' f(\xi_i)\triangle x_i,$$

所以由(3)(4)和(5)得到

$$\sum_{k=1}^{n} f(\eta^*_k)\delta_n-\frac{3\varepsilon}{4}<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i<\sum_{k=1}^{n} f(\eta^*_k)\delta_n+\frac{3\varepsilon}{4}。$$

将此与(2)相结合，即有

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\triangle x_i-(E)\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon。$$

分划$\triangle$及ξ_i的任意性说明$f(x)$在$[a,b]$上是黎曼可积的，而且积分值是$(E)\int_a^b f(x)dx$，这就完成了所要求的证明。

附注　这里所作的证明之所以说它是初等的，是由于我们仅从定义出发，倘若利用黎曼积分的存在性理论，例如达布(Darboux 1842—1917)的定理，那末证明可以简要得多。

§3　对有界函数来说，黎曼积分与左积分是等价的。

设$f(x)$是定义在闭区间上的有界函数，类似于§2开头的议论，我们要证明函数$f(x)$的黎曼积分与左积分等价，仅需证明$f(x)$在$[a,b]$上左积分存在时，其黎曼积分也存在，而且积分值相同，即

$$(K)\int_a^b f(x)dx=(C)\int_a^b f(x)dx。\qquad(6)$$

这是由于左积分和也是一种黎曼积分和，$f(x)$的黎曼积分存在时，左积分必然存在，而且(6)式成立，为了证明(6)，我们应证明对给定的正数ε，有$\delta_*>0$，只要分划$\triangle$：$a=\overline{x}_0<\overline{x}_1<\cdots<\overline{x}_{m-1}<\overline{x}_m=b$满足不等式$\|\triangle\|<\delta_*$时，相应的黎曼积分和$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\triangle x_i$必然满足不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\triangle x_i-(C)\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon,\qquad(7)$$

从上一节的证明看出，如果我们能证明存在着自然数n，使得2n等分$[a, b]$时的和数$\sum_{k=1}^{2n} f(\eta_k)\delta_{2n}$都满足不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{2n} f(\eta_k)\delta_{2n}-(C)\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{4},\qquad(8)$$

式中$\delta_{2n}=\dfrac{b-a}{2n}$，$\eta_k$是$[a+(k-1)\delta_n,a+k\delta_n]$中任意一点，那末取$\delta_*<\min\left(\dfrac{\varepsilon}{8nM},\ \dfrac{1}{3}\delta_{2n}\right)$时，即可看出当$\|\triangle\|<\delta_*$时就有(7)成立，从而完成了结论的证明。请注意，这里M仍是$|f(x)|$在$[a,b]$上的一个上界。

现在来证明上述n的存在性。

因为$(C)\int_a^b f(x)dx$存在，所以对上述给定的正数ε，有$\delta>0$，当分划

$$\triangle:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_s=b$$

满足条件$\|\triangle\|<\delta$时，相应的左积分和数

$$S(\triangle,f)_c=\sum_{k=1}^{S}f(t_{k-1})\triangle t_k$$

合乎不等式

$$\left|S(\triangle,f)_c-(C)\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{32}.$$

这里取$\frac{\varepsilon}{32}$是为了下文方便。

今取n，使得

$$\delta_{2n}=\frac{b-a}{2n}<\frac{1}{2}\min\left(\delta,\ \frac{\varepsilon}{32M}\right),$$

于是

$$\frac{b-a}{n}<\min\left(18\delta,\frac{\varepsilon}{32M}\right), \quad (10)$$

其中M是$|f(x)|$在$[a,b]$上的一个上界。

将$[a,b]$作2n等分，记分点为

$$x_k=a+\frac{k}{2n}(b-a)。$$

又记ξ_k为$[x_{k-1},x_k]$中任意一点($k=1,2,\cdots,2n$)。考虑$[a,b]$的两个分划

$$\triangle_1:\ a=x_0\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant x_2\leqslant\xi_3\leqslant x_4\leqslant\cdots\leqslant x_{2n}=b,$$

$$\triangle_2:\ c_1=x_0\leqslant\xi_1<x_2\leqslant\xi_3<x_4\leqslant\cdots<x_{2n}=b。$$

显然由(10)得到

$$\|\triangle_1\|<\delta,\quad \|\triangle_2\|<\delta,$$

从而由δ的选取看到

$$\left|S(\triangle_1,f)_c-(C)\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{32},$$

$$\left|S(\triangle_2,f)_c-(C)\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{32}。$$

由是，记

$$\rho_1=S(\triangle_2,f)_c-S(\triangle_1,f)_c=\sum_{k=1}^{n}[f(\xi_{2k-1})-f(\xi_{2k})](x_{2k}-\xi_{2k})$$

时，有

$$|\rho_1|<\frac{2\varepsilon}{32}。$$

类似地考虑$[a,b]$的分划

$$\triangle_3:\ a=x_0<x_1\leqslant\xi_2\leqslant\xi_3<x_3\leqslant\xi_4\leqslant\xi_5<x_5\leqslant\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}=b,$$

$$\triangle_4:\ a=x_0<x_1\leqslant\xi_2<x_3<x_3\leqslant\xi_4<x_5\leqslant\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}=b,$$

并记

$$\rho_2=S(\triangle_4,f)_c-S(\triangle_3,f)_c=\sum_{k=}^{n-1}[f(\xi^{2k})-f(\xi_{2k-1})](x_{2k+1}-\xi_{2k+1})$$

时，有

$$|\rho_2|<\frac{2\varepsilon}{32} \quad (12)$$

将ρ_1与ρ_2相加得到

$$\rho_3=\rho_1+\rho_2=\sum_{k=2}^{2n}[f(\xi_{k-1})-f(\xi_k)](x_k-\xi_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{2n-1}f(\xi_k)(x_{k+1}-\xi_{k+1})-\sum_{k=2}^{2n}f(\xi_k)(x_k-\xi_k)。$$

而且由（11）及（12）看到

$$|\rho_3|<\frac{4\varepsilon}{32}。\qquad(13)$$

最后，我们考虑分划

$\triangle_5$: $a=x_0\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\cdots\leqslant\xi_{2n}\leqslant x_{2n}=b$

由（10）知道$|\triangle_5|<\delta$，于是，相应此分划的左积分和数有估计式

$$S(\triangle_5,\ f)_C=(C)\int_a^b f(x)dx+\rho_4,\ \ |\rho_4|<\frac{\varepsilon}{32}。\qquad(14)$$

但是$S(\triangle_5,f)_C$可以写作

$$S(\triangle_5,f)_C=f(x_0)(\xi_1-x_0)+\sum_{k=1}^{2n-1}f(\xi_k)(\xi_{k+1}-\xi_k)+f(\xi_{2n})(x_{2n}-\xi_{2n})。$$

于是将它与ρ_3相加得到

$$S(\triangle_5,f)_C+\rho_3=\sum_{k=1}^{2n-1}f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)+f(x_0)(\xi_1-x_0)+f(\xi_1)(x_1-\xi_1)。$$

因此由（14）式得到

$$\sum_{k=1}^{2n-1}f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=(C)\int_a^b f(x)dx+\rho_5,\qquad(15)$$

其中

$$\rho_5=\rho_4+\rho_3-f(x_0)(\xi_1-x_0)-f(\xi_1)(x_1-\xi_1)。$$

由于 $|x_1-\xi_1|+|\xi_1-x_0|=x_1-x_0=\frac{b-a}{2n}$，所以由不等式（10）看到

$$|f(x_0)(\xi_1-x_6)+f(\xi_1)(x_1-\xi_1)|<M|x_1-x_0|<\frac{\varepsilon}{32},$$

于是联合不等式（13）、（14）得到

$$|\rho_5|<\frac{1}{32}(4\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)=\frac{6\varepsilon}{32},\qquad(16)$$

记住诸x_k是2n等分$[a,b]$的分点，即有

$$x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{2n}=x_k-x_{k-1}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-1)$$

所以（15）式又可写作

$$\sum_{k=1}^{2n-1}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=(C)\int_a^b f(x)dx+\rho_5,$$

进而有

$$\sum_{k=1}^{2n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=(C)\int_a^b f(x)dx+\rho_5+f(\xi_{2n})(x_{2n}-x_{2n-1})$$

或者说记$\rho_6=\rho_5+f(\xi_{2n})(x_{2n}-x_{2n-1})$时有

$$\sum_{k=1}^{2n} f(\xi_k)\delta_{2n}=(C)\int_a^b f(x)dx+\rho_6, \tag{17}$$

而且由不等式（16）以及n的取法看到

$$|\rho_6|\leqslant|\rho_5|+M\delta_{2n}<\frac{7\varepsilon}{32}。$$

这样一来，（17）式表明，只要n满足不等式（10），就有

$$\left|\sum_{k=1}^{2n} f(\xi_k)\delta_{2n}-(C)\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{4}。$$

这就是所要求的不等式（8），结论至此证明完毕。

附注　这里，我们实质上是证明了对闭区间[a,b]上的有界函数f(x)来说，如果它的左积分存在，那末它的等分意义下的积分也存在，而且积分值相同。

§4．后语。

上面两节所证明的事实是说，对闭区间[a,b]上的有界函数来说，黎曼积分、等分意义下的积分以及左积分都是等价的。换言之，对闭区间上的有界函数来说，黎曼积分的定义中两个任意是可以省去一个的。倘若考虑的是闭区间上的连续函数，那末由于它的黎曼积分总是存在的，所以在应用时，完全可以看具体情况而作适当的分划和取点，也即两个任意都可省去。

然而，对于有界函数来说，却不能将两个任意都省去，例如，熟知的狄里克勒(P.G. Dirichlet1805—1859)函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & (x为有理数),\\ 0 & (x为无理数)。\end{cases}$$

它在[0,1]上并不是黎曼可积的。但是，如果将[0,1]作n等分，则显然有$D\left(\frac{j}{n}\right)=1$ ($j=0.1,\cdots,n$)于是有$\sum_{j=1}^{n}D\left(\frac{j-1}{n}\right)\frac{1}{n}=1$，自然有$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}D\left(\frac{j-1}{n}\right)\frac{1}{n}=1$，意即对D(x)来说，如果用等分且取$\xi_i$为子区间$[x_{j-1},x_j]$之左端点，则相应的积分和在$n\to\infty$时极限存在，然而它并不是黎曼可积的。

此外，我们知道对于无界函数来说，其黎曼积分和数对于任一分划都成一无界集，所以它的黎曼积分总是不存在的，不难明白，对等分意义下的积分，情况也是如此，然而，对左积分来说，情况就不一样了，例如函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & (0\leqslant x<1),\\ 0 & (x=1)。\end{cases}$$

在[0,1]上是无界的，然而通过进一步的讨论，可以证明g(x)的左积分是存在的，而且

$$(C)\int_0^1 g(x)dx=\lim_{u\to1-0}(K)\int_0^u g(x)dx=2。$$

谈谈中学微积分教学

王祖樾

（浙江师院数学系）

微积分学已列入中学数学教学内容；微分学也列入1982年高考大纲。这样，中学微积分教学的帷幕拉开了，这是我国中学数学教学史上的重大事件。从内容上看，微积分学已属于高等数学范畴，与初等数学有质的差异，有一个很高的跃度；从师资方面看，应该说是由学历较高经验丰富的老师来承担微积分教学任务的，但是多数老师也是初次上手，学业有所荒废。因此，如何教好微积分，就成为大家十分关切的课题了。本文只是先提出一些问题，与大家共同探讨。

一、要有一个整体认识

“剥一段，吃一段”的做法，当然是微积分教学的大害。教微积分，必须对其内容有一整体认识。怎样才算有了整体认识呢？是否仅弄懂了内容就算有了整体认识呢？我们说，这样的要求太低了。应该在弄懂内容的基础上搞清内容结构、本质。下面我们就来具体地谈一下，当然，这种整体认识是无止境的。

微积分学，不言而喻，分微分与积分两大部分。

微分学的支柱是导数。通常，总是举很多例子，如速度、加速度、切线斜率、比热以及密度等等，来说明导数概念的重要，然后再叙述导数概念。这可能会导致产生一种平淡的教法，做不到画龙点睛。导数概念的数学结构是构成导数概念的一种特殊的数学格式和运算程序：差、比、极限，教学中设法突出这一点是非常重要的。现实世界中大量的量，只要涉及、精确到微小部分，就常常归结为这种格式、这种程序，一般来说，差（$\triangle x$，$\triangle y$），反映了量的变化；比$\left(\dfrac{\triangle y}{\triangle x}\right)$，反映了相对变化，单位量度上的变化；极限$\left(\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x}\right)$，反映这种相对变化的精确化：一点上的相对变化（因变量相对于自变量的变化）。如果我们能在导数概念的提炼和定义中，强调这种特定的数学格式与程序，无疑将对教学带来收益，有助于学生清楚地掌握导数概念。

既然用差、比、极限来处理的问题如此之多，如此之重要，那么每次都从头做这种差、比、极限的运算，就需要不厌其烦的耐心，当然这是不聪明的办法。因此，将差、比、极限这种运算公式化、法则化，就成为势在必行。求导公式、求导法则的建立，即求导方法的建立，就是势在必行之结果。求导公式化了，就像三角学中公式变换那样，又把变量数学暂时地变成初等数学那样容易运算了，而无需重演差、比、极限的操作手续。

对一个函数进行差、比、极限的加工，导出了一个新的函数——导函数。如果把此定为正运算，那么其逆运算、逆过程，就是求原函数以及求不定积分。一般来说，正运算有确定的法则（如加法表、乘法表），而逆运算却要依附于正运算法则，借助试探，商量来

进行，比如除法之试商等。不定积分同样如此，根据基本的导数公式建立基本的不定积分表，而在运算时常要试探、摸索前进，不象求导那样下笔自如有直路可循。

积分学的支柱是积分概念，它是一种分割、作和、求极限的数学格式和运算程序，我们简称为和式的极限（特定的和式）。在求整体量时，常常要用这种数学格式处理，如求面积，曲线长、功、路程等等。简化这种“和式的极限”之运算手续，使之公式化、法则化更是一件非常重要的事，因为这种和式（依赖于点ξ_i的取法）之极限十分难求，其难度远远超过求导。如何简化？如果不与求导联系而去独立地解决，似乎是有不可克服的困难。积分与求导的逆过程——不定积分之深刻联系是十分隐蔽的。牛顿——莱布尼兹的微积分基本公式出色地揭示了这种联系，原来$f(x)$的积分就是其原函数的增量。这一公式成了架设在导数与积分两大支柱上的桥梁，积分终于通过微分的逆过程而公式化了、法则化了。

这样一来，微积分就结为整体，成为解决实际问题的有力工具了。导数刻划函数的局部性质，而积分刻划函数的整体性质。正如局部与整体可以互为因果那样，导数或微分与积分也构成了互为依存的关系。

二、极限的处理

导数与积分都是特定的极限，因此，极限是微积分理论的基础。如何处理极限？这大有讲究，基本依据，应该是数学对象。目前教材中，只介绍ε—N定义，没有提及函数极限的ε—δ定义，这是适合当前情况的。要从根本上吃透极限定义，这是大学里的事。在中学里，基本上仍是直观极限的认识。如何通过不严格的手段达到对极限具有一个较明确的认识，这也是一个值得讨论的课题。

学生往往会把求极限值变为“代值”，因为很多极限值，确实与代值相符，这种求极限的快速方法使学生疏忽极限值的意义。针对这种情况，教师应在教学的全过程中，经常指出其区别，特别是概念上的区别。对连续函数，极限值与代值从结果上看是一致的，但概念上根本不同；而对不连续的函数，二者就完全不一致了。如求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$就不能以代值求得结果。

学生还常会问，极限达得到还是达不到？比如x趋向a或∞，是否能达到a或∞？教学时，不要简单地回答，达得到还是达不到。应该按$x\to a$，$x\to\infty$的定义回答，而且指出这样问问题的本身是有问题的，想用静止的极限过程“终了”来代替变化着的极限过程，殊不知极限过程“终了”这不是严格的数学术语，对初学者是不宜使用的。初学者如此提出问题，实在是暴露了初等数学观念对变量数学的束缚。

两个重要的极限：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，这是建立微积分公式的两块巨大的基石。有了它们，超越函数的导数公式可求了，从而超越函数的积分公式也有了。可以毫不夸张地说，没有这两个基本极限，就没有微积分的公式化。

在这里再谈谈极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$和弧度制问题。基本极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，其中的x采用弧度制，x表示x个弧度单位。如果x采用角的度、分、秒制，那么正弦的值是不变的，而分

母x的数值就要变化：$x(\text{度})=\frac{\pi}{180}x(\text{弧度})=t(\text{弧度})$，于是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{180}{\pi}t}=\frac{\pi}{180}$。因此，在角的度、分、秒制下，极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$不等于1，而等于$\frac{\pi}{180}$。这样一来，相应的三角函数导数公式变为$(\sin x)'=\frac{\pi}{180}\cos x$，$(\cos x)'=\frac{-\pi}{180}\sin x$，……几乎所有的三角函数的导数都要带上系数$\frac{\pi}{180}$，而且还要积累这些系数的运算。这样一来，微积分公式就不简洁了，影响了微积分的应用。基于这一原因，在微积分中角的度量必须采用弧度制，以保证极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，进一步保证三角函数导数公式的简洁性。为什么角的度量采用弧度制呢？在初等数学中是讲不出道理来的。不少人误认，采用弧度制可以建立角与实数的一一对应，把角度变为实数。这种说法是不妥的。因为度、分、秒制本身也是用实数记录的，照样可以和实数建立一一对应，无非只是进位制不一样，需换算而已。采用弧度制的根本原因在于微积分的需要。就三角本身来讲是讲不清楚的。

极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，通常都采用中学教科书中的证明。严格来说，这种传统的证明是错的，它存在着逻辑循环的毛病。极限式中的x采用弧度数，而弧度的定义要用到圆的弧长概念，圆的弧长又是一个极限问题，它归结于这样一个假设：单位圆内接正多边形周长当边数趋于无穷时，其极限就认为是圆的周长。这一假设本身就包含了弧长x与弦$\sin x$之比的极限为1的因素。因此，证明极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$这一结论，恰好包含在证明所要用到的前提之中。说得直率一点，就是用$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$来证明$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。严格的证法又是如何呢？从逻辑上说，应该从单位圆内接正n边形之周长趋于单位圆周长作为出发点，这时有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1\left(x_n=\frac{\pi}{n}\right)$，进而由这离散形式来证明连续变量的形式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。当然，这里指出的，仅供教师参考，用于教学也是没有必要的，即使在大学里，注意到这件事的也不多。

三、若干具体问题

我们按照教科书的顺序，列举若干问题讨论，目的不在于求全，在于引起讨论与钻研。

1．在讲瞬时速度、切线斜率时，可能会提出$\frac{0}{0}$的问题，而这个问题，在马克思数学手稿中论述过，前些年也为此展开了热烈讨论。现在究竟如何处理呢？作为数学内容并对学生来说，$\frac{0}{0}$是无意义的，只是一个待定型记号。作为哲学来说，这又是一回事，它包含了$\frac{0}{0}$型的实际问题与数学表达、反映之间的矛盾，正象复数未建立前，$\sqrt{-1}$无意义一样。在非标准分析里，$\frac{0}{0}$得到了澄清、细分，无穷小变量成了数。因此，不同场合下，有不同

的适用标准，不能混为一谈。

2．求导公式化后，学生常认为，求导数就是代公式，而忘了差、比、极限这个老祖宗，因此，对 $y=|x|$，$y=x^2\sin\frac{1}{x}$在$x=0$的导数研究带来困难。教学时可适当举例，并指出求导数并不能全部公式化，能公式化的仅是一小部分能表达为初等函数的一些函数，存在着大量的不能用公式去求导数的函数。

还有，导数未必存在。这时就说，没有相应的切线或瞬时速度（切线平行于y轴的情形排除）。为什么会有瞬时速度不存在的运动呢？我们所说的速度实在是指机械运动的速度，大体上说，微积分学初步是与机械运动相适应的数学（当然也可用于电学、材料力学、甚至弹性力学等）。随机运动的速度就不能用我们这里的瞬时速度刻划了。因此，不存在我们这里意义下的瞬时速度，不等于说不存在其他意义下的运动速度。

3．$y=x^3$在$x=0$处的切线穿过这条曲线自身，另外，还有一些曲线的切线可以在切点附近再次与曲线相交。这些情况与圆的切线大不相同。学生对这种新奇的现象感到奇怪。因此扩张学生的切线概念也是教学中值得注意的地方。

4．关于对数求导法。高中数学第四册第96—97页例3、4，实际上是介绍对数求导法。对函数$y=\sin^4x\cos^3x$用对数求导法，在求对数时，负数不能求对数怎么办？（其导数对一切x都存在）。在这种情况下，用对数求导法仍然可以。其道理可参见本刊1981年第3期46页，余云棣同志的文章。

5．微分概念是从函数增量$\triangle y$的线性主部这个角度引出来的，并规定$dx=\triangle x$。有些书上，通过$y=x$，求微分得$dy=dx=\triangle x$，来证明$dx=\triangle x$。如果见此证明简单就搬上课堂介绍给学生，这就错了。$dx=\triangle x$是不能证明的。上述所谓证明只是对特殊的线性函数证明了$dx=\triangle x$，此结果为何适用于其他一切函数，都有$dx=\triangle x$呢？这是没有道理的。

6．用导数的正负、大小能定量地刻划函数变化性态，如升降、极值、驻点等等，方法简便，优越于初等方法。但是也要注意，运用导数方法求极值的前提是函数具有可微性质。如果函数不可微但有尖点，那么仍可有极值。

7．教科书中对积分的定义，采用等分区间，任意取点$\xi_i\in[x_i,\ x_{i+1}]$的办法。通常积分定义有两个“任意”，其中分割也是任意而可以非等分。教科书中的定义是否不严格呢？回答是否定的。教科书中的等分黎曼积分定义和一般的黎曼积分定义是等价的，这一事实的证明可参见谢庭藩教授为本刊1979年第1期上撰写的文章。

8．由于注意力转向微积分运算，可能会疏忽绝对值、算术根概念而产生运算错误。比如：

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1\text{。(错)}\quad \int_1^4\frac{\sqrt{x}}{2}dx\ \overset{x=t^2}{\underset{-1\leqslant t\leqslant 2}{=\!=\!=}}\int_{-1}^2 t^2dt=3\text{。(错)}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2x}\ \cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=0\text{。(错)}$$

9．一般常说，微分与积分是一对矛盾，微分运算与积分运算是互逆的运算。这些话，都是在一定的条件下讲的。如不论条件，一个函数$f(x)$，求导数后得$f'(x)$，其积分$\int_a^x f'(x)dx$未必能得到$f(x)$（若设$f(a)=0$）。因为这里有两个问题：一是$f'(x)$是否可黎

曼积分不得而知，二是即使可以黎曼积分，是否等于f(x)也不一定（这些反例都可以举出），通常，逆运算可以引出矛盾，解决矛盾的办法，常常是扩充概念，引入新的对象。如减法引入负数，开方引入无理数，负数开平方引入虚数，零作除法引出非标准数等等。要使导函数f′(x)通过积分逆回到f(x)，，就需扩充黎曼积分概念（这已是实变函数论的事了）。

10．一些历史知识，微积分的产生是数学发展的一个重大转折和里程碑，恩格斯评价为："在一切理论成就中，未必再有什么象十七世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。"因此了解一些这方面的历史知识无疑是有帮助的。我们汇集一些，供参考。

十七世纪，为了处理以下四个科学问题，促进了微积分的产生：一是求速度、加速度；二是求曲线的切线以用于光学；三是求函数最大最小值；四是求曲线长、曲边形面积、曲面形体积以及物体重心、力矩等。

通常，认为牛顿（1642～1727）和莱布尼兹（1642～1716）创立和发明了微积分。但是在他们作出的冲刺之前，已积累了大量的微积分知识。例如，求切线方法，两个函数的积和商的微分定理，x的幂的微分等等。当然这些结果，常以几何或代数的形式表达，难于识辨。

发明微积分的优先权究竟属于谁？是牛顿还是莱布尼兹。史实是，牛顿的大部分微积分结果是在莱布尼兹之前做的，但是公开发表微积分著作的时间，莱布尼兹却早于牛顿。他们都是独立创立的。

1669年，牛顿在他的朋友中散发了题为《运用无穷多项方程的分析学》的小册子（直到1711年才出版）。第二本书《流数法和无穷级数》写于1671年而直到1736年才出版。牛顿是从运动学这个角度，使用无穷小分析方法，刻划了变量的变化率，称之谓流数（即我们现在的导数）。

莱布尼兹是个外交官，还是哲学家、法学家、历史学家、语言学家和先驱的地质学家，他在数学、力学、光学……都有重大贡献。1684年起开始发表微积分论文。莱布尼兹不是从导数入手，而是从我们现在的微分入手，讨论几何中的切线和求积问题。我们现在用的微积分记号较多出于莱布尼兹，如微分记号"d"，积分记号"$\int$"，它是"Sum"（和）的第一个字母的S拉长。

牛顿与莱布尼兹对积分研究的不同风格反映了牛顿的物理方向和莱布尼兹的哲学方向。在物理方向中，速度等是中心概念；而哲学方向则着眼于物质的最终的微粒，并且着重于这些微粒之和（如面积可由无穷多根线条组成）。在微积分术语上，至今还有某些混乱之处。不定积分实在是求导的逆运算，它称为牛顿意义下的积分；而定积分才是真正的求和，它称为莱布尼兹意义下的积分。因此，不定积分与定积分其出发点是十分不同的。只有通过微积分学基本公式才得到了沟通，对牛顿、莱布尼兹来说，他们都很清楚这两个方面。

我们现在的微积分教科书，已经不是牛顿也不是莱布尼兹笔下的微积分了，是经过改造、严格化了的微积分，这主要应归功于十九世纪柯西的极限理论，使微积分在严密的极限理论上建立起来，消除牛顿、莱布尼兹的很多谬误。

最后，再谈这样一个问题作为本文的结束：为什么现在常称微积分的书为“数学分析”？并常使用“分析”一词作为一个数学分支的名称。笔者认为，这可能与牛顿第一本微积分小册子《运用无穷多项方程的分析学》（简称《分析学》）的取名有关，实际上也是由于在研究方法不常使用综合法而主要使用分析法的缘故。后来，十九世纪二十年代，柯西为微积分奠定了新的逻辑基础，他的《分析教程》也以分析一词命名。这样看来，称数学分析，主要是历史的自然延续。另外，数学分析一词，比微积分一词广义，可容纳更多的内容，事实也是如此。

（摘自浙江师范学院《教学与研究》1981年第六期）

试谈通用高中《数学》第四册一元微积分的教学

王汝楫

（北京师范学院分院）

通用高中“数学”第四册安排了一元微积分的初步知识。微积分是人们认识客观世界中量的运动变化规律的有力工具，它既是高等数学的基础，又直接应用于实际。中学教材编入微积分对于学生毕业后直接参加工作或者继续学习都有好处。

在普通中学如何讲授微积分初步知识还缺少经验。本文就如何理解教材以及一些教学设想谈些粗浅看法。

一、教学的目的与要求、重点、难点

教学的目的与要求是：

1．使学生初步了解导数、微分和积分的概念及其产生的背景。

2．使学生初步掌握基本的微分法和积分法。

3．使学生能解决微积分应用中的几则最基本的问题；了解微积分在实际中有广泛应用，同时也是研究传统数学的有力工具。

4．使学生初步了解微积分的基本思想，并通过它对学生进行辩证唯物主义方面的教育。

导数，微分，原函数，不定积分，定积分是最基本的概念；导数及积分的四则运算，复合函数求导法；换元积分法以及基本初等函数的微分表和基本积分表则是最基本的运算；用导数讨论函数增减性，求极值，用定积分求路程及曲边形面积是微积分的初步应用，这些都应当是重点内容。

由于学生习惯于用“静”的观点看问题，而微积分中的一些概念恰恰要求能用“动”的观点去理解，因而不易准确地把握概念。微积分的一些概念同初等数学比较，层次之多，关系之复杂，都是学生未曾遇到的，同时一些概念不能深入地展开也妨碍学生理解概念。学习微分法和积分法的困难，首先在于公式的推导，因为学生还不习惯于从定义出发进行推导，不熟悉函数符号的运用。其次，复合函数求导，困难在于分析函数的复合过程。与

此相关，换元积分也是一个难点。此外，对初等数学，特别是基本初等函数不熟悉也给运算带来不少困难。

鉴于以上情况，教学中似应注意以下几点：

1．使学生掌握微分法和积分法是必要的，但是重要的应是引导学生了解微积分的基本思想。

2．要加强基本概念的教学。学生不仅要知道概念本身，还要知其如何被抽象出来，又如何用于实际的。要研究概念之间的联系，抓住关键概念，带动全局。

3．注意几何直观。要充分利用几何直观帮助学生理解抽象概念，把微积分讲得生动活泼，通俗易懂。直观描述要注意科学性，不要曲解概念。

4．把微积分教学与已学过的初等数学联系起来。

5．限于讲授初步知识，理论上就不免欠严格。对这种情况不能脱离学生实际一味追求理论上的完整，但应向学生指出理论上的缺陷，以培养学生严谨的科学态度。

二、微积分基本思想的教学

在教学中首先要把握住微积分的基本思想，并渗透到教学之中。这里主要应当把握住常与变、直与曲、有限与无限、近似与精确、局部与整体这几对矛盾。例如，为了描述物体的变速运动，先把运动过程分成若干个有限片断，在每个片断视变速为匀速，计算平均速度。这时，我们运用了有限次的代数运算，得到的是运动状态的近似描述。（其实，从运动方程的图象看这也是以直代曲）。分割加细，平均速度可以相当准确地描述运动状况。但是只要是有限分割，描述就是近似的。然而，经过无限分割，即令$\triangle t\to 0$，则平均速度的极限就精确地刻画了在时刻t的运动状况，这时又由常到变。积分的概念也如此，且更富于直观。积分过程中，以直代曲包含了微分过程；微分与它所替代的增量相差高级无穷小，这就保证了积分过程得以实现。微分和积分构成了统一整体，体现了局部和整体的矛盾。

三、对教材的理解和教法设想

导数和微分

关于导数概念必须首先讲清导数的物理或几何背景。

课本指出“我们规定平均速度$\frac{\triangle S}{\triangle t}$当$t_1\to t_0$，即$\triangle t\to 0$时的极限是落体在$t_0$秒时的瞬时速度v”，这是给瞬时速度下定义，对此学生并不理解。因此，有必要结合讲授微积分的基本思想，从方法论上也做些说明。以往我们计算未知量时，是已知未知量的定义的。然而，“求物体在某一时刻的速度”的问题就不同了。“某一时刻的速度”是什么意义并不知道。速度$v=\frac{s}{t}$反映的是匀速运动的概念及计算法。对于变速运动，这个公式只给出在一段时间间隔内的平均速度而平均速度不是一个时刻的真实运动状态。因此，解决我们的问题，实质在于，给“瞬时速度”下定义，并给出计算方法。

在实际教学中，最好在完成习题五（1）的同类练习时，引导学生从这些练习的对比中找出共性：（1）研究的对象都是函数$y=f(x)$；（2）研究的方法都是：(i)对自变量的定值x_0，给出改变量$\triangle x$，(ii)求函数相应的改变量$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)$，并求相应的改变量之比，(iii)令$\triangle x\to 0$，计算$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$，并在此基础上再给出导数定义。