

273469

高等数学学习题集解答

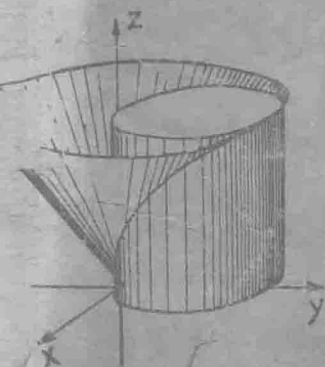
一

高等数学习题集解答

(根据同济大学数学教研室一九六五年修订本)

数学分析部分

(一)



武汉建材学院基础部
武汉师范学院数学系

合编

目 录

第二编 数学分析

第十章 函数	1
绝对值的运算	1
函数值的求法	3
函数的定义域	7
建立函数关系	14
函数性质的讨论	22
函数的图形	
双曲函数	
第十一章 极限	44
数列的极限	44
函数的极限	49
无穷大, 无穷小	52
极限的求法	57
无穷小的比较, 等价无穷小	71
杂题	74
第十二章 函数的连续性	85
第十三章 导数及微分	96
导数概念	96
求函数的导数	102
杂题	129

导数的应用.....	144
微分及其应用.....	162
高阶导数.....	173
参变量方程的导数.....	187
第十四章 中值定理, 导数在函数研究上的应用	195
中值定理.....	195
罗彼塔法则.....	201
泰勒公式.....	215
函数的单调性.....	226
函数的极值.....	239
最大值和最小值应用杂题.....	25
曲线的凹性和拐点.....	2
渐近线.....	26
函数研究及其图形的描绘.....	296
平面曲线的曲率.....	322
方程的近似解.....	329
第十五章 不定积分	343
简单不定积分.....	346
换元积分法.....	351
分部积分法.....	364
换元积分法和分部积分法杂题.....	369
分式有理函数的积分.....	389
三角函数有理式的积分.....	400
简单代数无理式的积分.....	405
杂题.....	416

第二编 数学分析

第十章 函 数

绝对值的运算

解不等式:

$$10.1. |x| < 5.$$

$$\text{解: } -5 < x < 5.$$

$$10.2. |x-3| < 4.$$

$$\text{解: } -4 < x-3 < 4, \text{ 即 } -1 < x < 7.$$

$$10.3. x^2 < 9.$$

$$\text{解: } |x| = \sqrt{x^2} < 3. \quad \text{即 } -3 < x < 3.$$

$$10.4. 0 < (x-2)^2 \leq 4.$$

$$\text{解: } |x-2| = \sqrt{(x-2)^2} \leq \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{即 } -2 \leq x-2 \leq 2. \quad 0 \leq x \leq 4.$$

$$\text{但 } \because (x-2)^2 > 0, \therefore |x-2| > 0, \text{ 即 } x > 2 \text{ 或 } x < 2,$$

$$x \neq 2 \therefore 0 \leq x < 2, 2 < x \leq 4.$$

$$10.5. |x| > x.$$

$$\text{解: 假定 } x > 0, \text{ 则 } x > x, \text{ 不可能, 假定 } x < 0 \text{ 则 } -x > x,$$

$$\text{即 } 2x < 0, x < 0. \therefore \text{解为 } x < 0.$$

$$10.6. \left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{1+x}.$$

$$\text{解: } \because \frac{x}{1+x} > \frac{x}{1+x} \text{ 或 } \frac{x}{1+x} < -\frac{x}{1+x}. \text{ 第一种}$$

情况是不可能的，故在第二种情况下即是：

$$2 \frac{x}{1+x} < 0 \quad \text{即} \quad \frac{x}{1+x} < 0. \quad \text{因此, 或} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$$

$$\text{或} \quad \begin{cases} x > 0 \\ 1+x < 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x > -1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

$\therefore$ 第二个不等式组无解， $\therefore$ 原不等式之解为：
 $-1 < x < 0$.

$$10.7. \quad |x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2.$$

解： $\because x^2 - 3x + 2 > x^2 - 3x + 2$ 或 $x^2 - 3x + 2 < -x^2 + 3x - 2$ ，即 $0 > 0$ ，或 $x^2 - 3x + 2 < 0$ 显然只可能第二种情况成立，而它又可化成：

$$(x-1)(x-2) < 0 \quad \therefore \text{又有} \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{或} \quad \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases}$$

因为第一个不等式组无解，故原不等式之解为：

$$1 < x < 2.$$

求下列方程的实根：

$$10.8. \quad |x| = x + 1.$$

解： $x+1=|x| \geq 0 \therefore x \geq -1$ 当 $x \geq 0$ 时，则得 $x=x+1$ ，矛盾，故 $-1 \leq x < 0 \therefore |x| = -x$ 即 $-x=x+1$

$$2x = -1 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}.$$

$$10.9. \quad |x| = -x.$$

解： $\because -x=|x| \geq 0, x \leq 0$ 故 $|x| = -x$ 即得 $-x = -x$ ，恒等，故凡满足不等式 $x \leq 0$ 的 x 均为它的解。

$$10.10. \quad |\sin x| = \sin x + 2.$$

解: $\because \sin x + 2 = |\sin x|$, 而 $0 \leq |\sin x| \leq 1$

即 $0 \leq \sin x + 2 \leq 1 \therefore -2 \leq \sin x \leq -1$ 又仅 $\sin x =$

$= -1$ 成立, 故 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

10.11. $|2x+3|=x^2$.

解: 假定 $2x+3 < 0$, 则方程为 $-(2x+3)=x^2$ 或 x^2

$+2x+3=0 \therefore b^2-4ac=4-12 < 0 \therefore$ 无实根.

若 $2x+3=0$ 又 $2x+3=x^2$, $\therefore$ 无解.

假定 $2x+3 > 0$, 则方程为 $2x+3=x^2$ 或 $x^2-2x-3=0$, 即 $(x-3)(x+1)=0$ 即有 $x_1=-1, x_2=3$,

但因 $2x+3 > 0$, 即 $x > -\frac{3}{2}$, 故这两根都在此范围

内, 即原方程之根为. $x=-1 \quad x=3$.

函数值的求法

10.12. 若 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 求 $f(2), f(-2), f(0),$

$f(a), f(a+b)$.

解: $f(2) = \frac{|2-2|}{2+1} = 0 \quad f(-2) = \frac{|-2-2|}{-2+1} = -4$

$f(0) = \frac{|-2|}{0+1} = 2, \quad f(a) = \frac{|a-2|}{a+1}$

$f(a+b) = \frac{|a+b-2|}{a+b+1}$.

10.13. 若 $\varphi(x) = 2^{x-2}$ 求 $\varphi(2), \varphi(-2), \varphi(0),$
 $\varphi\left(\frac{5}{2}\right)$.

解: $\varphi(2) = 2^{2-2} = 2^0 = 1;$

$$\varphi(-2) = 2^{-2-2} = 2^{-4} = \frac{1}{16};$$

$$\varphi(0) = 2^{0-2} = \frac{1}{4};$$

$$\varphi\left(\frac{5}{2}\right) = 2^{\frac{5}{2}-2} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

10.14. 若 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 求 $\varphi(t^2)$, $[\varphi(t)]^2$.

$$\text{解: } \varphi(t^2) = (t^2)^3 + 1 = t^6 + 1; \quad [\varphi(t)]^2 = (t^3 + 1)^2 \\ = t^6 + 2t^3 + 1.$$

10.15. 若 $f(x) = x^2 - 3x + 7$, 求 $f(x + \Delta x)$, $f(x + \Delta x) - f(x)$.

$$\text{解: } f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 7 \\ = x^2 - 3x + 7 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x \\ = (x^2 - 3x + 7) + (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2 \\ f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2.$$

10.16. 若 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x + \Delta x) - f(x)$.

$$\text{解: } f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{(x) - (x + \Delta x)}{x \cdot (x + \Delta x)} \\ = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

10.17. 若 $\psi(x) = \ln x$, 证明 $\psi(x) + \psi(x + 1) = \psi[x(x + 1)]$.

$$\text{证: } \psi(x) + \psi(x + 1) = \ln x + \ln(x + 1) = \ln[x(x + 1)] = \\ = \psi[x(x + 1)].$$

10.18. 若 $F(z) = a^z$, 证明 (a) $F(-z) \cdot F(z) - 1 = 0$,
(b) $F(x) \cdot F(y) = F(x + y)$.

$$\text{证: (a) } F(-z) \cdot F(z) - 1 = a^{-z} \cdot a^z - 1 = a^{-z+z} - 1 = a^0 - 1 \\ = 1 - 1 = 0,$$

$$(b) F(x) \cdot F(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = F(x+y).$$

10.19. 若 $\varphi(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, 证明 $\varphi(y) + \varphi(z)$
 $= \varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right).$

$$\begin{aligned} \text{证: } \varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right) &= \ln \frac{1 - \frac{y+z}{1+yz}}{1 + \frac{y+z}{1+yz}} = \ln \frac{(1+yz) - (y+z)}{(1+yz) + (y+z)} \\ &= \ln \frac{(1-y) - z(1-y)}{(1+y) + z(1+y)} = \ln \left(\frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{1-z}{1+z} \right) \\ &= \ln \frac{1-y}{1+y} + \ln \frac{1-z}{1+z} = \varphi(y) + \varphi(z). \end{aligned}$$

10.20. 若 $\varphi(\theta) = \operatorname{tg} \theta$, 证明 $\varphi(a+b)$
 $= \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{1 - \varphi(a) \cdot \varphi(b)}.$

$$\begin{aligned} \text{证: } \varphi(a+b) &= \operatorname{tg}(a+b) \\ &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{1 - \varphi(a) \cdot \varphi(b)}. \end{aligned}$$

10.21. 若 $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$,

证明 $f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t).$

$$\begin{aligned} \text{证: } f\left(\frac{1}{t}\right) &= 2 \cdot \frac{1}{t^2} + 2t^2 + 5t + 5 \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t = f(t). \end{aligned}$$

10.22. 若 $f(x) = x^5 - x^3 + 2x$, 证明 $f(-2) = -f(2)$,
 $f(-x) = -f(x).$

证: $\because f(-2) = (-2)^5 - (-2)^3 + 2(-2) = -2^5 + 2^3 -$

$$-2 \cdot 2 = -[2^5 - 2^3 + 2 \cdot 2] = -f(2)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - (-x)^3 + 2(-x) = \\ &= -x^5 + x^3 - 2x = -[x^5 - x^3 + 2x] \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

10.23. 若 $F(x) = x^2 + \cos x$, 证明: $F(x) = F(-x)$.

$$\text{证: } F(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = F(x).$$

10.24. 若 $\varphi(z) = \sin z - 5z^3$, 证明 $\varphi(-z) = -\varphi(z)$.

$$\begin{aligned} \text{证: } \varphi(-z) &= \sin(-z) - 5(-z)^3 = -\sin z + 5z^3 \\ &= -[\sin z - 5z^3] = -\varphi(z). \end{aligned}$$

10.25. 若 $\psi(x) = 2\sin x - 3\cos x$, 证明 $\psi(x + 2n\pi) = \psi(x)$, (其中 n 为整数).

$$\begin{aligned} \text{证: } \psi(x + 2n\pi) &= 2\sin(x + 2n\pi) - 3\cos(x + 2n\pi) \\ &= 2\sin x - 3\cos x = \psi(x). \end{aligned}$$

$$10.26. \text{ 若 } f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

求 $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f(2)$.

$$\text{解: } f(0) = 0; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad f(1) = \frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 1; \quad f(2) = 1.$$

$$10.27. \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

求 $\varphi(3)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(0.5)$, $\varphi(-0.5)$.

$$\text{解: } \varphi(3) = 3 - 1 = 2; \quad \varphi(2) = 2 - 1 = 1;$$

$$\varphi(0)=2; \quad \varphi(0.5)=2;$$

$$\varphi(-0.5)=2^{-0.5}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$10.28. \text{ 设 } \varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\text{求 } \varphi(1), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2).$$

$$\text{解: } \varphi(1)=0; \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin \frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|-\sin \frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi(-2)=0.$$

函数的定义域

在题10.29—10.58中指出函数的定义域:

$$10.29. \quad y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{解: } \because \text{分母不可为 } 0, \text{ 而它为 } 0 \text{ 时, 即 } x^2 - 3x + 2 = 0 \\ (x-2)(x-1) = 0, \therefore x_1 = 1, x_2 = 2.$$

因此定义域为 $(-\infty, 1), (1, 2), (2, +\infty)$.

$$10.30. \quad y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$\text{解: } \because x^2 + 1 > 0. \text{ 故定义域为 } (-\infty, +\infty)$$

$$10.31. \quad y = \sqrt{3x + 4}.$$

$$\text{解: } \because 3x + 4 \geq 0, \therefore x \geq -\frac{4}{3}. \text{ 故定义域为}$$

$$\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right).$$

$$10.32. y = \sqrt{x^2 - 1}.$$

解: $\because$ 要 $x^2 - 1 \geq 0$, $\therefore x^2 \geq 1$, 即 $-\infty < x \leq -1$ 或 $1 \leq x < +\infty$, 故定义域为 $(-\infty, -1], [1, +\infty)$.

$$10.33. y = \frac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}.$$

解: 要使此二项均有意义, 需 $x \neq 0$ 且 $1 - x^2 \geq 0$, $\therefore x^2 \leq 1$, 故 $x \neq 0$ 且 $-1 \leq x \leq 1$, 即定义域为 $[-1, 0), (0, +1]$.

$$10.34. y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$\text{解: } \because \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \quad \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\therefore -1 \leq x < 1. \quad \begin{cases} 1-x < 0 \\ 1+x \leq 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x > 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \text{ 无解}$$

$\therefore$ 定义域为 $[-1, 1)$.

$$10.35. y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}.$$

解: $\because 1 - x^2 \neq 0$, 且 $x+2 \geq 0$, 即是 $x^2 \neq 1$, $x \geq -2$. 故定义域为 $[-2, -1), (-1, 1), (1, \infty)$.

$$10.36. y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}.$$

解: $\because x \geq 0$, $x-2 \neq 0$ 故定义域为 $[0, 2), (2, +\infty)$.

$$10.37. y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$$

解: $\because x^2 - 4x + 3 \geq 0$, 即 $(x-1)(x-3) \geq 0$, 故或 $x-1 \geq 0$, $x-3 \geq 0$, 即 $x \geq 3$, 或 $x-1 \leq 0$, $x-3 \leq 0$, 即 $x \leq 1$.

定义域为 $(-\infty, 1], [3, +\infty)$.

$$10.38. y = \frac{1}{\lg(1-x)}.$$

解: $\because 1-x > 0$, 且 $\lg(1-x) \neq 0$, 即 $|1-x \neq 1|$
 $\therefore x < 1$ 且 $x \neq 0$. 故定义域为 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$.

$$10.39. y = \lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}.$$

解: $\because 1-x \neq 0, \frac{1}{1-x} > 0$, 且 $x+2 \geq 0$.

$\therefore$ 即 $x \neq 1, 1-x > 0$ 即 $x < 1$ 且 $x \geq -2$, 故定义域为 $[-2, 1)$.

$$10.40. y = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x}.$$

$\therefore \frac{1+x}{1-x} > 0$ 且 $1-x \neq 0$ 即

i) $x \neq \pm 1$, ii) $1+x > 0, 1-x > 0$
 或 $1+x < 0, 1-x < 0$.

即 i) $x \neq \pm 1$ ii) $-1 < x < 1$ 故定义域为 $(-1, 1)$.

$$10.41. y = \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \log_a(2x-3) \quad (a > 1).$$

解: $\because$ i) $x-2 \neq 0$ 且 ii) $2x-3 > 0 \therefore$ i) $x \neq 2$

ii) $x > \frac{3}{2}$ 故定义域为 $(\frac{3}{2}, 2), (2, +\infty)$

$$10.42. y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}).$$

解: $\because$ i) $x-4 \geq 0$, ii) $6-x \geq 0$ iii) $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} > 0$

即 i) $x \geq 4$, ii) $x \leq 6$ 故定义域 $[4, 6]$.

$$10.43. y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$$

解: $\because$ i) $\frac{5x-x^2}{4} > 0$, ii) $\lg \left(\frac{5x-x^2}{4} \right) \geq 0$.

即 i) $5x - x^2 > 0$, ii) $\frac{5x - x^2}{4} \geq 1$.

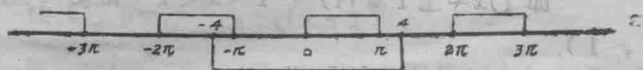
i) $0 < x < 5$, ii) $5x - x^2 \geq 4$, 即 $x^2 - 5x + 4 \leq 0$,
 即 i) $0 < x < 5$, ii) $(x-4)(x-1) \leq 0$, $\therefore$ i) $0 < x < 5$,
 ii) $1 \leq x \leq 4$, 从而定义域为 $[1, 4]$.

10.44. $y = \log_2(\log_2 x)$.

解: 首先 $\log_2 x$ 需有意义 $\therefore x > 0$, 其次 $\log_2(\log_2 x)$ 有
 意义, 故 $\log_2 x > 0$, $\therefore x > 1$, 故综上述要求, 定
 义域为 $(1, +\infty)$.

✓ 10.45. $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$.

解: 首先 $\sin x \geq 0$, $\therefore 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$, ($n=0, \pm 1, \dots$)
 又因 $16 - x^2 \geq 0$, $\therefore x^2 \leq 16$, 即 $-4 \leq x \leq 4$.
 故定义域为 $[-4, -\pi], [0, \pi]$.



10.46. $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$.

解: $\therefore \sin x - \cos x \neq 0$. 即 $\sin x \neq \cos x$,

或 $\tan x \neq 1$, 即 $x \neq n\pi + \frac{\pi}{4}$ ($n=0, \pm 1, \dots$)

故定义域为 $\left(n\pi + \frac{\pi}{4}, (n+1)\pi + \frac{\pi}{4}\right)$
 $(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

✓ 10.47. $y = \operatorname{tg}(x+1)$.

解: $\therefore x+1 \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\therefore x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} - 1$.

$$n=0, \pm 1, \dots,$$

$$\therefore \text{定义域为} \left((n-1)\pi + \frac{\pi}{2} - 1, n\pi + \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2 \dots).$$

$$10.48. y = \operatorname{ctg} \sqrt{x}.$$

解: $\because \sqrt{x} \neq n\pi (n=0, \pm 1 \dots)$ 又 $x > 0$, $\therefore x \neq n^2 \pi^2 (n=0,$

$\pm 1, \dots)$ 及 $x > 0$, $\therefore$ 定义域为 $(n^2 \pi^2, (n+1)^2 \pi^2)$

$(n=0, 1, 2, \dots).$

$$10.49. y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}.$$

解: 首先 $\cos x > 0$. 即 $2n\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$,

$(n=0, \pm 1, \pm 2 \dots)$. 定义域为 $(2n\pi - \frac{\pi}{2},$

$2n\pi + \frac{\pi}{2}) (n=0, \pm 1 \dots).$

$$10.50. y = \arccos \sqrt{2x}.$$

解: 首先 $2x \geq 0$, $\therefore x \geq 0$, (注意到 $\arccos x$ 为单减函数)

其次 $0 \leq \arccos \sqrt{2x} \leq \pi$ 即 $1 \geq \sqrt{2x} \geq -1$.

$\therefore 2x \leq 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. 故定义域为 $[0, \frac{1}{2}]$.

$$10.51. y = \arcsin \frac{x-3}{2}.$$

解: $\therefore -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x-3}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

$\therefore -1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1$ 即 $-2 \leq x-3 \leq 2$

$\therefore 1 \leq x \leq 5$. 故定义域为 $[1, 5]$.

$$10.52. y = \arcsin(2+3^x).$$

解: $\because -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(2+3^x) \leq \frac{\pi}{2} \therefore -1 \leq 2+3^x \leq 1.$

$\therefore -3 \leq 3^x \leq -1$, 故无意义, 这个函数是无定义的, 即无意义.

10.53. $y = \lg \sin x.$

解: $\because \sin x > 0$, 即 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, 其中 $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ $\therefore$ 定义域为 $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

10.54. $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}).$

解: 首先 $x^2 + 1 \geq 0$ 这显然是对的, 又 $\because x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

即 $\sqrt{x^2 + 1} > -x \therefore x^2 + 1 > x^2$, 这也显然对的,

$\therefore$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

10.55. $y = \sqrt{3-x} + \arccos \frac{x-2}{3}.$

解: 首先 $3-x \geq 0$, $\therefore x \leq 3$, 又因 $0 \leq \arccos \frac{x-2}{3} \leq \pi$

$\therefore -1 \leq x \leq 5$. $\therefore$ 定义域为 $[-1, 3]$.

10.56. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1. \\ -1, & x > 1. \end{cases}$

解: 定义域为 $(0, 1)$, $(1, +\infty)$.

10.57. $y = \begin{cases} x^2 + 1, & -1 < x < 2, \\ x^3 - 3, & 2 < x \leq 4. \end{cases}$

解: 定义域为 $(-1, 2)$, $(2, 4]$.

10.58. $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

解：定义域为 $(-\infty, 0), (0, 2]$ 。

10.59. 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$ ，问(a) $f(x^2)$ ，
(b) $f(\sin x)$ ，(c) $f(x+a)$ ($a>0$)，(d) $f(x+a)+f(x-a)$ ，
($a>0$)的定义域是什么？

解：(a) $\because 0 \leq x^2 \leq 1, \therefore -1 \leq x \leq 1$ ，即 $f(x^2)$ 定义域是
 $[-1, 1]$ ；

(b) $\because 0 \leq \sin x \leq 1, \therefore 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ ，(其中
 $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $\therefore f(\sin x)$ 定义域为 $[2n\pi,$

$(2n+1)\pi]$ ，($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)；

(c) $\because 0 \leq x+a \leq 1, \therefore -a \leq x \leq 1-a$ ，

故 $f(x+a)$ ($a>0$)定义域是 $[-a, 1-a]$ ；

(d) $\because 0 \leq x+a \leq 1$ ，又 $0 \leq x-a \leq 1$ ，即 $-a \leq x \leq 1-a$

又 $a \leq x \leq 1+a$ ，若 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 则 $a \leq x \leq 1-a$ ，即 $f(x$

$+a)+f(x-a)$ 定义域是 $[a, 1-a]$ ，若 $a > \frac{1}{2}$ 定义
域不存在。

10.60. 已知从高为 h 处落下的重物所经过的路程是由公
式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 来确定。问(a)此函数的定义域为何？(b)解析式

$S=\frac{1}{2}gt^2$ 定义域又为何？

解：(a)函数中显然是有 $t \geq 0$ ，但一旦落至地面，此公

式就不成立了，而此时时刻 $T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ ，故 $t \leq T$ ，因此

函数的定义域是 $[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}]$ ，(b)解析式的定义域是

$(-\infty, +\infty)$ 。

在题10.61—10.64中 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否表示同一函数？