

李國豪教授70壽辰

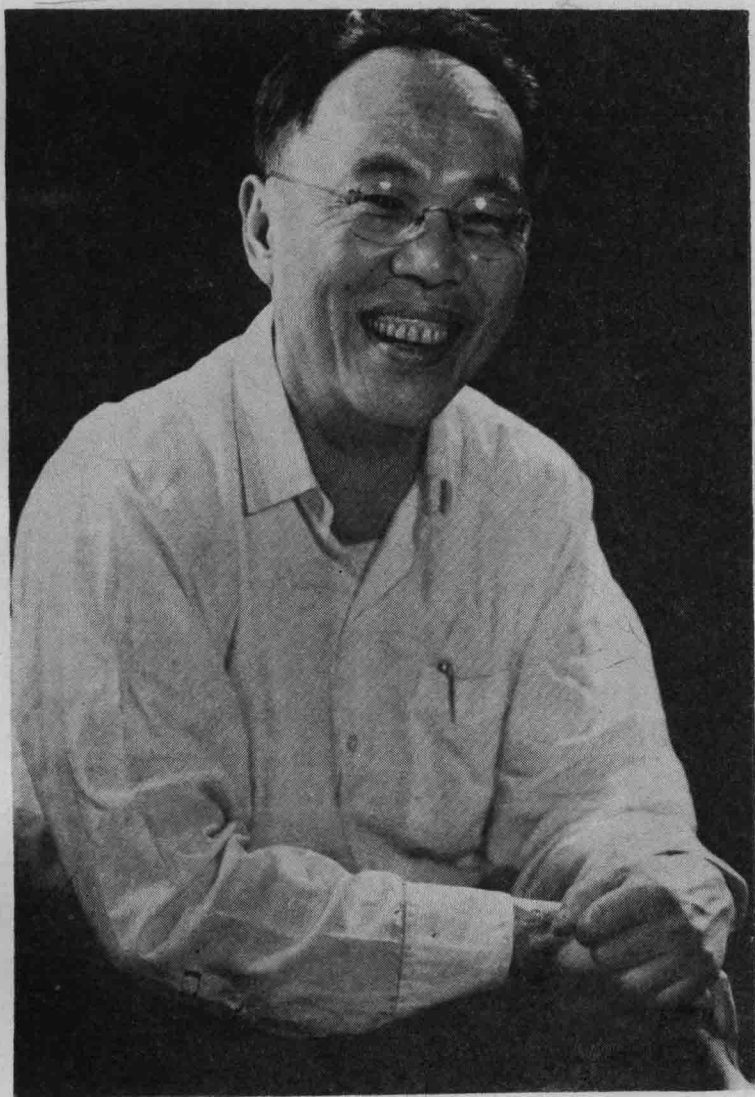
紀念論文集

李国豪教授七十寿辰

纪念论文集

同济大学李国豪科研组

1983 年 4 月



李國豪



献 词

在您七十寿辰之际，我们作为您的学生，谨以这一本论文集来表达对您长期教导和培养的深切谢意。

将近半个世纪来，在您学习、工作付出了毕生精力的同济园里，您辛勤劳动把智慧和才能献给了祖国的教育和科学事业，用汗水换来了满园桃李。在工程力学、桥梁工程、钢结构以及陆续开拓的地下工程、抗爆工程和地震工程等领域内，是您把我们带进了科学的圣殿。您那强烈的爱国热情，精湛的学术造诣，高尚的科学道德和严谨的治学态度，时刻激励着我们不断前进。我们决心要象您那样努力学习，勤奋工作，不辜负您的教育和期望，为振兴中华作出我们应有的贡献。

祝老师健康长寿！

李国豪教授简历

李国豪教授广东省梅县城郊连塘坳人，国内外久负盛名的桥梁、力学专家。

一九一三年四月十三日，李国豪出生在一个贫苦农民的家庭里，父亲早年参加过辛亥革命，后在印尼经营杂货铺，母亲是个勤劳俭朴的农家妇女。家庭和环境的影响使他从小萌发了忧国忧民的思想，培养了刻苦耐劳、勤奋好学的进取精神。父亲希望他将来成为医生，去南洋开业。十六岁那年，李国豪读完梅县县中高一的课程，即从父命，孑然北上，报考上海同济大学，结果一举中榜，进入德文预科。两年后他发现自己对解剖学缺乏兴趣，升入本科改修土木工程，学业超群，一九三六年毕业，取得工程学士学位，同年十二月留校任教。

一九三八年李国豪经校方引荐获洪堡奖学金赴德国深造，进达城工业大学专攻桥梁工程。在著名结构工程专家克雷帕尔教授指导下，一九四〇年他结合汉堡大吊桥设计，从事博士论文《悬索桥按二阶理论（变位理论）的实用计算》研究，取得博士学位。在这篇博士论文中，李国豪以其独特的力学模型研究了悬索桥的竖向振动问题及铁路车辆荷载过桥时的动力反应，显示了非凡才华。论文在德国《钢结构》杂志发表后，引起工程界的普遍重视，从此“悬索桥李”在德国名闻遐迩，其时李国豪仅二十六岁。次年李国豪又获得德国特许任教博士学位。在达城工业大学七年中，他殚精竭虑发表了八篇高水平的科学论文。其中《弹性平衡分支的充足辨别准则》一文，建立了弹性平衡分支点的存在准则，发展了结构稳定理论，受到国际学术界注意；《桁架和类似体系结构计算的新方法》一文，将一座结构十分复杂的菱形钢桁架桥化为连续体用析法求得结果，方法简便有效，直到现在这种具有独创性的分析思路，还常常被工程界引用到高层建筑及其他复杂结构的计算中，都收到了显著效果。

一九四五年抗战胜利，日夜悬念祖国的李国豪抱着“科学救国”的心愿，几经周折，回到上海，先在上海工务局主持整修外白渡桥，后担任康益公司正工程师职务。

一九四六年八月，李国豪被聘为同济大学教授，先后担任土木系主任，工学院院长等职。

新中国成立初期，李国豪任同济大学教务长，副校长。一九五二年到一九五三年间，他带头编写《钢结构设计原理》及《钢桥设计》中文教材，对当时改变外文教材垄断学校的局面起了推动作用。

一九五四年李国豪应聘代表中国科学院担任武汉长江大桥技术顾问，次年被首批选为中国科学院技术科学部学部委员。

一九五七年李国豪从事斜板研究，分别在《中国科学》外文版及《力学学报》上发表《斜交异性板的弯曲理论及其对于斜桥的应用》论文，论文中在国内首次按斜座标系建立了斜板的弹性平衡微分方程式，为分析具有斜交构造的桥梁奠定了理论基础。

一九五九年李国豪被任命为南京长江大桥技术顾问委员会主任委员。

六十年代初期，李国豪在同济大学筹建结构理论研究室，在进行大跨度铁路桥梁研究的同时开始了抗爆工程研究。在他组织主持下，我国召开了首次抗爆学术讨论会，有力地促进了国内这方面研究工作的开展。一九六四年李国豪把他在1959年为研究生及高年级学生开

设的选修课《桥梁结构稳定与振动》讲稿整理成专著出版，对推进大跨度桥梁的设计与研究工作发挥了积极作用。

一九六六年后，社会上发生了动乱，在极其困难的条件下，李国豪从事桁梁桥的弯扭研究。他把桁架空间离散体系也处理为等效的连续体模型，建立了弹性挠曲扭转微分方程组，创建了《桁梁桥扭转理论》。尔后运用扭转理论，分析武汉长江大桥晃动机理，确认当年武汉大桥的晃动是通车典礼时人群过于拥挤使桥身产生横向挠曲扭转引起的。

一九七五年李国豪著述《桁梁扭转理论——桁梁桥的扭转、稳定和振动》出版。在这部专著中，他根据桁梁扭转理论，对桁架桥的稳定、振动作了详细分析，所建议的方法简便、快速、省钱，能直接反映各部件之间受力特征，具有很高的实用价值和学术意义。其部分内容后在《中国科学》上发表，获国家自然科学三等奖。

我国公路桥梁荷载横向分布计算，过去所用方法，种类繁多，计算麻烦，工程技术人员难于掌握。一九七四年李国豪提出了一种原理简单、又可概括统一各种计算方法的梁系模型，研究成果写在《公路桥梁荷载横向分布计算》专著中，出版后受到桥梁工程界欢迎。

一九七七年十月李国豪被任命为同济大学校长，继后又任上海市科学技术协会主席，上海宝山钢铁总厂工程指挥部首席技术顾问。在十分繁重的行政工作下，他从不间断在科研领域中的探索。唐山大地震后，他在同济大学建立结构理论研究所，从事地震工程研究，一九八〇年主编了一部《工程结构抗震动力学》，在三年中两次出版发行。

一九八〇年针对上海宝山钢铁厂工程发生严重的桩基水平位移，李国豪深入进行研究，写出《关于桩的水平位移、内力和承载力的分析》研究报告，为宝钢的顺利建设、节约工程费用作出了重要贡献。

在桥梁结构理论研究中，他进一步把桁梁扭转理论引伸到拱——桁梁组合体系及斜张桥、曲线箱梁弯桥中，使它成为一个更为系统的桥梁空间分析理论，解决了九江长江大桥等桥梁的侧倾稳定问题，获得一九八二年上海市重大科技成果一等奖。

李国豪从事科学研究已有四十余年。在科研中，他特别强调理论联系实际，具有严谨的治学态度，可贵的创新精神，坚强的意志、毅力，至今已撰写了三十九篇论文、七部专著，在桥梁与结构理论研究中，造诣精深，为同行推崇。目前他在国内担任中国土木工程学会副理事长、中国力学会副理事长、中国桥梁及结构工程学会理事长，被选为三届、五届全国人大代表；在国外是美国结构稳定学会通讯会员，是一九八一年国际桥梁与结构工程协会推荐的国际十名著名桥梁专家之一。为表彰他促进中德文化联系的功绩，一九八二年三月，德国歌德学院隆重授于他歌德奖章。近年来，他还多次率领代表团去德国、日本、美国、瑞士等国访问，先后应邀作了桥梁、力学方面的学术报告，受到热烈欢迎。

李国豪的大半生在同济大学度过。自一九三六年执教于同济以来，他一直在为同济大学的发展作艰辛努力。一九七七年他主持校务工作以后，积极推行改革，在把同济恢复为多科性大学及加强与德国科技文化交流等方面做了许多出色的工作，遍布各地的几万名同济校友将感谢李国豪教授为同济大学所作出的卓越贡献。

目 录

无限弹性介质中多层圆柱结构受脉冲波作用的响应计算	邱 崙、徐植信 (1—1)
弹性厚板的振动	翁智远、陈学潮、曾德顺 (2—1)
地基土——结构相互作用的若干问题	俞载道、傅公康 (3—1)
深层隧洞围岩的粘弹——粘塑性有限元分析	孙 钧、张德兴、张玉生 (4—1)
外加钢筋混凝土柱提高砖混房屋抗震能力的研究	朱伯龙、蒋志贤、吴明舜 (5—1)
梁桥非线性地震反应分析	范立础 (6—1)
用有限元法探讨钢筋混凝土粘结试件	宋启根 (7—1)
断面可变形的矩形箱式薄壁圆弧曲杆静力分析法	李明昭 (8—1)
柔性墩温度场及温度应力现场测试及分析	胡匡璋、江新元、顾建生、陈炳秀 (9—1)
用能量法计算曲梁桥的地震反应	石 洞 (10—1)
斜张桥的风致振动及其风洞试验研究	项海帆、陆宗林、陈国强 (11—1)

无限弹性介质中多层园柱结构 受脉冲波作用的响应计算

邱苓* 徐植信**

本文给出了一种分析计算无限弹性介质中多层园柱结构对脉冲波的响应的方法。在多层结构的响应分析中,方程的个数随结构的层数而增加,使计算变得更加困难。本文基于多层结构的特点,采用了“迁移矩阵”,用这种方法不管结构层数的多少,方程总是保持为四组,使计算得到了简化。

文中分析了带覆盖的双层结构和三层结构方案,可供设计参考。

前 言

地下结构的设计目前大多假设整个结构同时受到动力载荷作用,把结构作为杆件系统来进行响应计算。实际上波在介质中传播的速度是有限的,所以整个结构并非同时受载,用四周同时受载来计算时,一般使结构内部的弯矩降低,均匀压缩部分加大,因此对结构设计是偏危险的。所以要进行更精确的结构动力响应分析,要考虑多层结构各层之间的相互关系,应该考虑行波的影响,考虑波的散射。

从波动方程出发研究弹性波在介质中遇到园柱形间断物时的散射问题现在大多采用波函数迭加法^{[1][2][3][4]},也有部分采用积分方程解^[5]。近年来用有限元素法的数值解有很大发展^[6],但计算工作量很大,所以在选择结构形式,研究应力变化规律,比较方案优劣以及作为设计参考,用弹性分析的方法还是有它的意义的。但用解析方法在数学上有较大困难,常用的波函数迭加法在结构层数增加时,未知数和方程也随之增加,使计算变得很复杂,目前只用于计算空腔和单层结构,但随地下结构设计的发展,提出了多层结构的设想,本文根据多层结构的特点,用“迁移矩阵法”使未知数和方程不随层数而增加,总是保持为四组,从而使计算简化,结合利用载荷的“级数展开法”求解了受脉冲波作用的多层园柱结构的响应,具体分析两种多层结构的形式。

一、基本方程

假定:入射波是平面压缩P波(地下管道受爆炸波作用,当作用面积较大时,近似可以看作是平面P波),波前和柱体轴线平行;管道在轴线方向很长,且剖面形状不变,可以简化

*研究生 **指导教师

成平面应变问题：管道埋得较深，当地面反射回来的波到达管道之前，压力的峰值早已过去，所以作为无限介质中的结构来处理。

1. 结构中的波展开

取柱坐标如图一，用势函数作基本未知量，对柱坐标矢量势可以分解，即矢量势函数

$$\vec{\psi} = \psi \vec{e}_3 + l \nabla \times (\chi \vec{e}_3) \quad (1.1)$$

由平面问题假定可知

$$\chi = 0 \quad (1.2)$$

其中 $\vec{e}_3$ 为 z 方向的单位矢量。所以位移可以表示为

$$\vec{u} = \vec{L} + \vec{M} \quad (1.3)$$

其中 $\vec{L} = \nabla \varphi$, $\vec{M} = \nabla \times (\psi \vec{e}_3)$, φ 为标量势函数。

φ 、 ψ 分别满足波动方程

$$C_1^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

$$C_2^2 \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

其中

$$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

C_1 和 C_2 分别表示 P 波和 S 波的波速， λ 和 μ 为弹性常数， ρ 为材料密度。

假定稳态解为

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi(r, \theta) e^{i\omega_p t} \\ \psi &= \psi(r, \theta) e^{i\omega_p t} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

则 $\varphi(r, \theta)$ 、 $\psi(r, \theta)$ 满足 Helmholtz 方程，再用分离变量法可以求得

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_n J_n(K_1 r) + B_n Y_n(K_1 r) \} \cos n\theta e^{i\omega_p t} \quad (1.7)$$

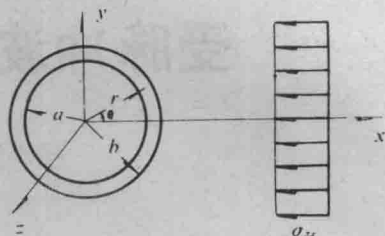
或

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_n H_n^{(1)}(K_1 r) + B_n H_n^{(2)}(K_1 r) \} \cos n\theta e^{i\omega_p t} \quad (1.8)$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n J_n(K_2 r) + D_n Y_n(K_2 r) \} \sin n\theta e^{i\omega_p t} \quad (1.9)$$

其中

$K_1 = \omega_p / C_1$, $K_2 = \omega_p / C_2$, J_n 、 Y_n 为第一类和第二类 Bessel 函数， $H_n^{(1)}$ 、 $H_n^{(2)}$ 为第一类和第二类 Hankel 函数， A_n 、 B_n 、 C_n 、 D_n 是常数，所以在多层结构的每一层中都有式 (1.7) ~



图

(1.9)所示的 $4n$ 个波。由势函数, 根据式(1.3)可以求得位移, 进而求出应力。

2. 介质中的波展开

介质中的情况和结构中不同, 只能有向外传播的波, 这样才能满足无穷远处条件, 所以只有 $2n$ 个波

$$\varphi_m = \sum_{n=0}^{\infty} E_n H_n^{(2)}(K_{1m} r) \cos n\theta e^{i\omega_p t} \quad (1.10)$$

$$\psi_m = \sum_{n=0}^{\infty} F_n H_n^{(2)}(K_{2m} r) \sin n\theta e^{i\omega_p t} \quad (1.11)$$

其中

$$K_{1m} = \omega_p / C_{1m} \quad K_{2m} = \omega_p / C_{2m}$$

C_{1m} 、 C_{2m} 分别是介质中的 P 波和 S 波的波速。

3. 入射波的展开

假定入射波为矩形脉冲, 为避免求逆变换的困难, 用级数展开来求瞬态响应。根据无限介质的特点, 当波通过柱体以后, 能量要向外散射, 所以在一定时间以后, 圆柱及其附近会接近无应力静止状态, 这样可以把入射波的单脉冲看成是一系列的周期脉冲波列, 如图二。 T 是半周期, Δ 是脉冲持续时间, $2t_0$ 是脉冲的间隔。只要 t_0 足够长, 则当下一个脉冲到来之前, 第一个脉冲的影响会消失, 适当选择时间的起点, 便可得到单个脉冲的影应, 而一个周期的脉冲列可以展开成Fourier级数, 用迭加的方法就可以从稳态解求得瞬态解。

按图二的输入波形

$$\sigma_{xx}(t') = \begin{cases} 0 & (0 \leq t' \leq t_0) \\ 1 & (t_0 \leq t' \leq t_0 + \Delta) \\ 0 & (t_0 + \Delta \leq t' \leq T) \end{cases} \quad (1.12)$$

其他区间内按奇函数周期地变化。式中 $t' = (x-b)/C_{1m} + t$, b 为结构的外半径。如图 三所示的 $t = 0$ 时波的位置还可以看出, t_0 也决定了初始时刻脉冲离开结构的距离。

式(1.12)的周期函数可以展开成Fourier级数

$$\sigma_{xx} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin \omega_p t' \quad (1.13)$$

式中 $\omega_p = p\pi / T$ 是圆频率。

这个波也可以看成是应力波

$$\sigma_{xx} = \sum_{p=1}^{\infty} (-ia_p) e^{i\omega_p t'} \quad (1.14)$$

的实部。式(1.14)各分量对应的势函数为

$$\varphi_p = \phi_p e^{iK_{1m} x} e^{i\omega_p t} \quad (1.15)$$

其中

$$\phi_p = \frac{a_p}{\rho_m \omega_p^2} (\sin K_{1m} b + i \cos K_{1m} b) \quad (1.16)$$

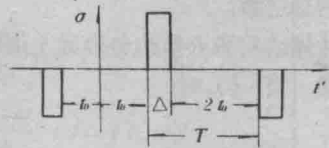


图 2

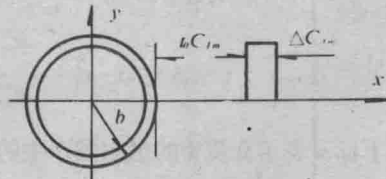


图 3

ρ_m 为介质密度。

把入射波用柱坐标表达

$$\phi_p e^{iK_{lm}x} = \phi_p \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(K_{lm}r) \cos n\theta \quad (1.17)$$

式中

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 2 & (n \geq 1) \end{cases}$$

4. 边界条件和连续条件

最内层自由表面满足无应力条件, 即当 $r=0$ 时,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{pn} &= 0 \\ \sigma_{r\theta}^{pn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

上标 p 表示对应频率为 ω_p 的分量, n 表示按 θ 展开的第 n 个分量。

在多层结构的各层分界面上, 即 $r=r_j$ 上 (见图四) 应满足连续条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,j}^{pn} - \sigma_{r,j+1}^{pn} &= 0 \\ \sigma_{r\theta,j}^{pn} - \sigma_{r\theta,j+1}^{pn} &= 0 \\ u_{r,j}^{pn} - u_{r,j+1}^{pn} &= 0 \\ u_{\theta,j}^{pn} - u_{\theta,j+1}^{pn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

($j=1, 2, \dots, s-1$)

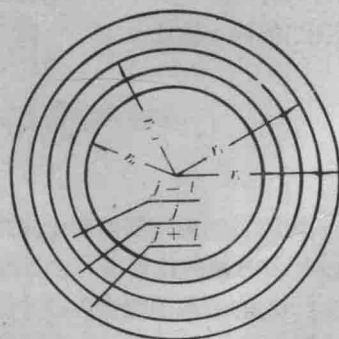


图 4

下标表示取该层的材料常数计算应力或位移, s 表示结构的总层数。

在注体结构和介质的分界面上同样要满足连续条件, 即 当 $r=r_s$ 时

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,s}^{pn} - \sigma_{r,m}^{pn} &= \sigma_{r,l}^{pn} \\ \sigma_{r\theta,s}^{pn} - \sigma_{r\theta,m}^{pn} &= \sigma_{r\theta,l}^{pn} \\ u_{r,s}^{pn} - u_{r,m}^{pn} &= u_{r,l}^{pn} \\ u_{\theta,s}^{pn} - u_{\theta,m}^{pn} &= u_{\theta,l}^{pn} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

下标 m 表示介质中的散射波产生的应力和位移, 右端项表示由入射波产生的应力和位移
共有 $4s+2$ 组方程和未知数, 在多层的情况下求解是比较麻烦的

二、用“迁移矩阵法”解多层结构

对多层结构,随结构层数增加,方程和未知数也增加。但根据多层结构的特点,每层只和相邻的两层发生直接关系,而各层的应力和位移完全由四组波确定,利用“迁移矩阵法”不论层数多少总可以把未知数控制为四组。

由式(1.8)和(1.9)假设 j 层中的波系数为 A_n, B_n, C_n, D_n , 根据式(1.3)可以求得该层内, 外分界面上的位移, 进而求得应力。

在外分界面上, 即 $r=r_j$ 处

$$\begin{bmatrix} \sigma_r^n \\ \sigma_{r\theta}^n \\ u_r^n \\ u_\theta^n \end{bmatrix}_{r_j} = \begin{bmatrix} T(R_j) \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix}_j \quad (2.1)$$

矩阵的下标 j 表示用第 j 层的弹性常数进行计算, R_j 表示取 $r=r_j$, n 表示对 θ 展开的第 n 个分量, 这里省略了对时间展开的指标 p , 其中

$$\begin{bmatrix} T(R) \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} T_{11}^1(R) & T_{11}^2(R) & T_{12}^1(R) & T_{12}^2(R) \\ T_{41}^1(R) & T_{41}^2(R) & T_{42}^1(R) & T_{42}^2(R) \\ T_{71}^1(R) & T_{71}^2(R) & T_{72}^1(R) & T_{72}^2(R) \\ T_{81}^1(R) & T_{81}^2(R) & T_{82}^1(R) & T_{82}^2(R) \end{bmatrix}_j \quad (2.2)$$

$$T_{11}^1(R) = [-\lambda K_1^2 + 2\mu n(n-1)\frac{1}{r^2} - 2\mu K_1^2]J_n(K_1 r) + \frac{2\mu K_1}{r}J_{n+1}(K_1 r)$$

$$T_{11}^2(R) = [-\lambda K_1^2 + 2\mu n(n-1)\frac{1}{r^2} - 2\mu K_1^2]Y_n(K_1 r) + \frac{2\mu K_1}{r}Y_{n+1}(K_1 r)$$

$$T_{12}^1(R) = 2\mu \left[\frac{1}{r^2}n(n-1)J_n(K_2 r) - \frac{K_2}{r}nJ_{n+1}(K_2 r) \right]$$

$$T_{12}^2(R) = 2\mu \left[\frac{1}{r^2}n(n-1)Y_n(K_2 r) - \frac{K_2}{r}nY_{n+1}(K_2 r) \right]$$

$$T_{41}^1(R) = -\frac{2\mu}{r^2}n(n-1)J_n(K_1 r) + \frac{2\mu K_1}{r}nJ_{n+1}(K_1 r)$$

$$T_{41}^2(R) = -\frac{2\mu}{r^2}n(n-1)Y_n(K_1 r) + \frac{2\mu K_1}{r}nY_{n+1}(K_1 r)$$

$$T_{42}^1(R) = \mu \left\{ \left[\frac{-2n(n-1)}{r^2} + K_2^2 \right] J_n(K_2 r) - \frac{2K_2}{r}J_{n+1}(K_2 r) \right\}$$

$$T_{42}^2(R) = \mu \left\{ \left[\frac{-2n(n-1)}{r^2} + K_2^2 \right] Y_n(K_2 r) - \frac{2K_2}{r}Y_{n+1}(K_2 r) \right\}$$

$$T_{71}^1(R) = \frac{n}{r}J_n(K_1 r) - K_1 J_{n+1}(K_1 r) \quad (2.3)$$

$$T_{11}^2(R) = \frac{n}{r} Y_n(K_1 r) - K_1 Y_{n+1}(K_1 r)$$

$$T_{12}^1(R) = \frac{n}{r} J_n(K_2 r)$$

$$T_{12}^2(R) = \frac{n}{r} Y_n(K_2 r)$$

$$T_{21}^1(R) = -\frac{n}{r} J_n(K_1 r)$$

$$T_{21}^2(R) = -\frac{n}{r} Y_n(K_1 r)$$

$$T_{22}^1(R) = -\frac{n}{r} J_n(K_2 r) + K_2 J_{n+1}(K_2 r)$$

$$T_{22}^2(R) = -\frac{n}{r} Y_n(K_2 r) + K_2 Y_{n+1}(K_2 r)$$

在第 j 层的内分界面上

$$\begin{bmatrix} \sigma_r^n \\ \sigma_{r\theta}^n \\ u_r^n \\ u_\theta^n \end{bmatrix}_{r_{j-1}} = \begin{bmatrix} T(R_{j-1}) \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix}_j \quad (2.4)$$

由(2.1)和(2.4)式可以求得每层内、外分界面上应力和位移的关系

$$\begin{bmatrix} \sigma_r^n \\ \sigma_{r\theta}^n \\ u_r^n \\ u_\theta^n \end{bmatrix}_{r_{j-1}} = \begin{bmatrix} T(R_{j-1}) \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} T(R_j) \end{bmatrix}_j^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_r^n \\ \sigma_{r\theta}^n \\ u_r^n \\ u_\theta^n \end{bmatrix}_{r_j} \quad (2.5)$$

由(2.5)式向内可以推到自由表面,在介质和结构的分界面上,由介质中的入射波和两个散射波表达的应力和位移为

$$\begin{bmatrix} \sigma_r^n \\ \sigma_{r\theta}^n \\ u_r^n \\ u_\theta^n \end{bmatrix}_{r_s} = \begin{bmatrix} T_m(R_s) \end{bmatrix}_m \begin{bmatrix} 1 \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix}_m \quad (2.6)$$

其中

$$\left[\begin{array}{c} T_m(R_s) \end{array} \right]_m = \left[\begin{array}{ccc} \phi_{p^e n} i^n T_{11}^I(R_s) & T_{11}^I(R_s) & T_{12}^I(R_s) \\ \phi_{p^e n} i^n T_{21}^I(R_s) & T_{21}^I(R_s) & T_{22}^I(R_s) \\ \phi_{p^e n} i^n T_{31}^I(R_s) & T_{31}^I(R_s) & T_{32}^I(R_s) \\ \phi_{p^e n} i^n T_{41}^I(R_s) & T_{41}^I(R_s) & T_{42}^I(R_s) \end{array} \right]_m \quad (2.7)$$

下标 m 表示介质中的波, 由介质的弹性常数来计算

$$\left. \begin{aligned} T_{11}^I(R) &= [-\lambda_m K_{1m}^2 + \frac{2\mu_m}{r^2} n(n-1) - 2\mu_m K_{1m}^2] H_n^{(2)}(K_{1m}r) + \frac{2\mu_m K_{1m}}{r} H_{n+1}^{(2)}(K_{1m}r) \\ T_{12}^I(R) &= \frac{2\mu_m}{r^2} n(n-1) H_n^{(2)}(K_{2m}r) - \frac{2\mu_m K_{2m}}{r} H_{n+1}^{(2)}(K_{2m}r) \\ T_{21}^I(R) &= -\frac{2\mu_m}{r^2} n(n-1) H_n^{(2)}(K_{1m}r) + \frac{2\mu_m K_{1m}}{r} H_{n+1}^{(2)}(K_{1m}r) \\ T_{22}^I(R) &= \mu_m \left\{ \left[-\frac{2n(n-1)}{r^2} + K_{2m}^2 \right] H_n^{(2)}(K_{2m}r) - \frac{2K_{2m}}{r} H_{n+1}^{(2)}(K_{2m}r) \right\} \\ T_{31}^I(R) &= \frac{n}{r} H_n^{(2)}(K_{1m}r) - K_{1m} H_{n+1}^{(2)}(K_{1m}r) \\ T_{32}^I(R) &= \frac{n}{r} H_n^{(2)}(K_{2m}r) \\ T_{41}^I(R) &= -\frac{n}{r} H_n^{(2)}(K_{1m}r) \\ T_{42}^I(R) &= -\frac{n}{r} H_n^{(2)}(K_{2m}r) + K_{2m} H_{n+1}^{(2)}(K_{2m}r) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

介质和结构的分界面上的应力和位移同样可以从 s 层 (最外层) 中的波来计算

$$\left[\begin{array}{c} \sigma_r^n \\ \sigma_{r\theta}^n \\ u_r^n \\ u_\theta^n \end{array} \right]_{r_0} = \left[\begin{array}{c} T(R_s) \end{array} \right]_s \left[\begin{array}{c} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{array} \right] \quad (2.9)$$

这样便可把介质中波的系数和最内层表面的应力和位移相联系

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ u_r^n \\ u_\theta^n \end{array} \right]_{r_0} = \left[\begin{array}{c} T(R_s) \end{array} \right]_s \left[\begin{array}{c} T(R_1) \end{array} \right]_1 \cdots \left[\begin{array}{c} T(R_s) \end{array} \right]_s \left[\begin{array}{c} T_m(R_s) \end{array} \right]_m \left[\begin{array}{c} I \\ E_n \\ F_n \end{array} \right]_m \quad (2.10)$$

由此容易解出介质中散射波的系数 E_n 和 F_n , 利用“迁移矩阵”可以得到任意一层的波的系数, 并由 (2.10) 式的后两行可以得到自由表面位移, 由 (2.1) 式用迭加方法可以得到任意一层的应力和位移分布

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \\ u_r \\ u_{\theta} \end{pmatrix}_i = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \cos n\theta & & & 0 \\ & \sin n\theta & & \\ & & \cos n\theta & \\ 0 & & & \sin n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(R) \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} A_n^p \\ B_n^p \\ C_n^p \\ D_n^p \end{pmatrix} e^{i\omega_p t} \quad (2.11)$$

而

$$\sigma_{\theta} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^p T_{21}^i(K_1 r) + B_n^p T_{21}^i(K_1 r) + C_n^p T_{22}^i(K_2 r) + D_n^p T_{22}^i(K_2 r)] \cos n\theta e^{i\omega_p t} \quad (2.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} T_{21}^i(K_1 r) &= [-\lambda K_1^2 - \frac{2\mu}{r^2} n(n-1)] J_n(K_1 r) - \frac{2\mu K_1}{r} J_{n+1}(K_1 r) \\ T_{21}^i(K_1 r) &= [-\lambda K_1^2 - \frac{2\mu}{r^2} n(n-1)] Y_n(K_1 r) - \frac{2\mu K_1}{r} Y_{n+1}(K_1 r) \\ T_{22}^i(K_2 r) &= 2\mu \left[-\frac{n(n-1)}{r^2} J_n(K_2 r) + \frac{nK_2}{r} J_{n+1}(K_2 r) \right] \\ T_{22}^i(K_2 r) &= 2\mu \left[-\frac{n(n-1)}{r^2} Y_n(K_2 r) + \frac{nK_2}{r} Y_{n+1}(K_2 r) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

由(2.6)式可以得到介质中的应力和位移

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \\ u_r \\ u_{\theta} \end{pmatrix}_m = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \cos n\theta & & & 0 \\ & \sin n\theta & & \\ & & \cos n\theta & \\ 0 & & & \sin n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_m(R) \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} I \\ E_n^p \\ F_n^p \end{pmatrix} e^{i\omega_p t} \quad (2.14)$$

而

$$\sigma_{\theta, m} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n^p T_{21}^d(K_{1m} r) + F_n^p T_{22}^d(K_{2m} r)] \cos n\theta e^{i\omega_p t} \quad (2.15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} T_{21}^d(K_{1m} r) &= [-\lambda_m K_{1m}^2 - \frac{2\mu_m}{r^2} n(n-1)] H_n^{(2)}(K_{1m} r) - \frac{2\mu_m K_{1m}}{r} H_{n+1}^{(2)}(K_{1m} r) \\ T_{22}^d(K_{2m} r) &= -\frac{2\mu_m}{r^2} n(n-1) H_n^{(2)}(K_{2m} r) + \frac{2\mu_m}{r} n K_{2m} H_{n+1}^{(2)}(K_{2m} r) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

以上是由分界面上的力学关系推出了“迁移矩阵”表达式，用矩阵分块运算也可得到同样的结果。

三、数值计算

1. 先验算了两种退化情况，把单层结构假想分成两层或三层，用“迁移矩阵法”进行计算，计算用文献〔7〕的数据，《表一》中列出了部分应力计算结果，列出的是 $\theta = 90^\circ$ 的 σ_{θ}/σ_0 的值

σ_0 为输入的应力幅值)。

表 1

$\frac{C_{1m} \bar{t}}{2b \bar{t}}$	直接解方程 计算结果	单层“迁移矩阵法” 计算结果	双层“迁移矩阵法” 计算结果	三层“迁移矩阵法” 计算结果
0.5	1.8126813	1.8126813	1.8126814	1.8126814
1.5	4.6971378	4.6971378	4.6971378	4.6971378
2.5	5.1174816	5.1174816	5.1174816	5.1174817
3.5	4.9957258	4.9957258	4.9957259	4.9957259
4.5	5.0985082	5.0985082	5.0985083	5.0985083
6.5	0.031866599	0.031866594	0.031866620	0.031866664

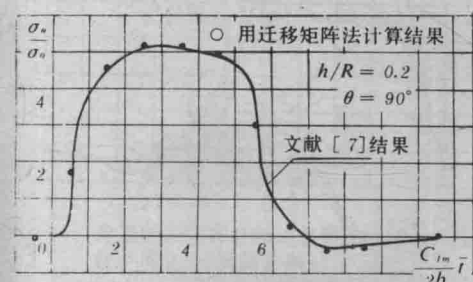


图 5

2. 用“迁移矩阵法”计算文献[7]的单层结构,柱体的材料是混凝土,介质为慢花岗岩(slow granite),计算结果和文献中的图线作了比较,见图五和图六。

3. 有覆盖层的双层结构分析计算

双层结构的示意图如图七,内层为主体结构,外层为覆盖层,计算结果表明:在结构的外部加较软的覆盖层(覆盖层的 E 小于介质的 E_m)可以降低主体结构的响应应力值。图八给出

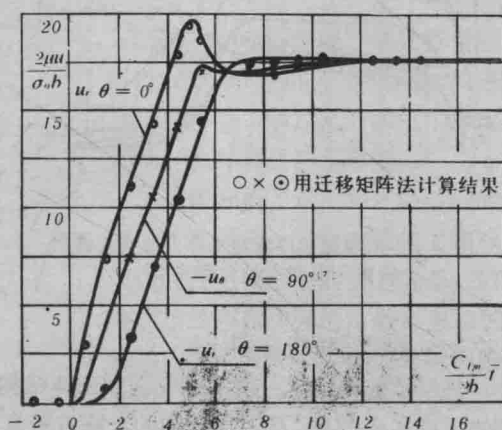


图 6



图 7

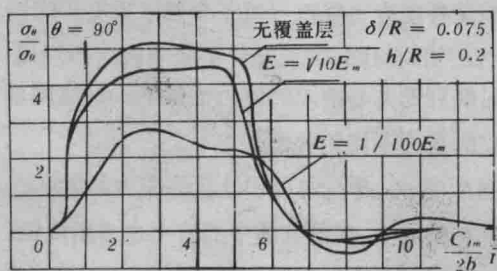


图 8 柱体为混凝土,介质为慢花岗岩,各种覆盖情况的柱体内应力响应曲线

了柱体为混凝土，介质为慢花岗岩 (slow granite) 时结构在各种覆盖情况下的动力响应曲线，当覆盖层的 E 减小的时候，柱体结构内的响应应力也随之降低，可减至无覆盖层时的 $1/2$ 或更小。图九画出了覆盖层的厚度对内部柱体结构的影响 (该图中的柱体材料为混凝土，介质为土)，随覆盖层厚度的增加，内部柱体的动应力值也随之减少。用软覆盖层可以使内部结构的动力响应值降低，但同时介质中的应力值会有所增加，图十给出了介质中应力和覆盖层参数的关系。所以如果外部是土壤一类介质，受压时越压越紧，在一定范围内不至发生破坏，可以采用 E 值较小或厚度较大的覆盖层来减少主体管道的应力值，但如果外部介质的许用应力有比较严格的限制，则要综合起来考虑，求取一个覆盖层的适当参数。

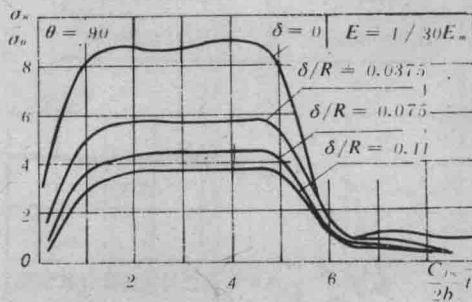


图9 不同覆盖层厚度对主体中应力的影响
(柱体为混凝土，介质为土)

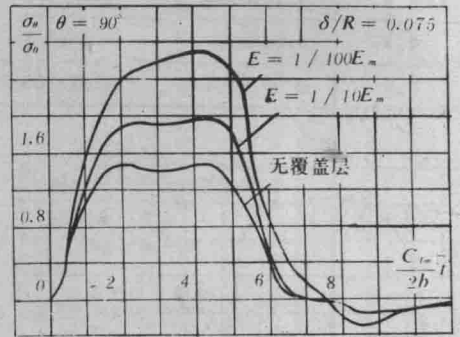


图10 覆盖层对介质应力的影响
(柱体为混凝土，介质为慢花岗岩)

4. 三层结构的分析计算

三层结构如图十一所示，在两层主体结构中间夹一层其它材料，夹心的厚度为 δ ，主体结构的厚度各为 $h/2$ 。从三层结构的计算分析可以看出，夹心材料的 E 值和介质弹性常数 E_m 的比值大于 1 或小于 1 对结构有不同的影响，且内层的应力和外层的应力受夹心影响也不一样，算例中取 $h/R = 0.2$ ， R 是平均半径。

(1) 当 $E/E_m < 1$ 时， E 值的降低使内层结构的应力降低，但使外层结构的应力增高。 E 值的增高使内层结构的应力增高 (但不会超过无夹心时情况)，同时 E 值的增高使外层应力降低 (但不会低于无夹心的情况)，所以当 $E/E_m < 1$ 时 (软夹心) 不会使内层和外层的应力同时降到无夹心情况的应力值以下，只能调节内层和外层的受力不均匀状态。

(2) 当 $E/E_m > 1$ 时，内层和外层的应力和无夹心情况相比都有所减少，而且介质中的应力也有所降低，见图十二、十三、十四。



图 11

夹心的厚度也会影响到结构的受力，厚度增加的效果相当于 E 值减少。