

# 贺工程力学研究班和工程力学系 创办三十周年

张 维\*

(清华大学)

工程力学系一九八八年夏即将达“三十而立”之年。回顾这三十年的历史进程，我系由诞生到发展、壮大，经历了不少艰难困苦，更经受了十年动乱中的生死存亡的考验，得以有今日的规模和较好的成绩，确是得来不易。期间的经验和教训是发人深醒的。值此庆祝我系诞生三十周年之际，略抒管见，以资纪念。

一九五六年，在党中央的直接领导下，全国集中了数百位理工农医的学者和专家，用了约半年的时间，讨论、制订了我国十二年科学发展远景规划。规划的后期，在钱学森、钱伟长等几位同志的倡导下，与会的科学院和清华大学的力学方面的同志一致同意建议，之后并得到院和校领导的批准，由科学院和清华大学共同领导，成立了工程力学研究班。具体教学组织工作由清华大学负责，钱伟长同志任首届班主任\*\*”。学员则由全国部分高等工科院校的青年力学教师、科研设计部门的青年科技人员以及工科专业毕业班中抽调优秀学生保送。学制为二年。除学习必要的政治、数学、外语外，着重学习一些基本的力学理论和实验技术，从而初步掌握处理和解决工程实际中的力学问题的方法。在第四学期时还要求在对生产单位调查和搜集资料的基础上，选择其中的力学问题予以解决，写出论文，进行答辩。其水平与现在的硕士相当。工程力学研究班先后共办了三届，共毕业 323 人。其中绝大多数现已成为我国当前力学学科的科研和教学的骨干。工程力学研究班的成立对我国力学学科发展起了很大的推动作用。这是培养力学人才的一个很成功的经验。工程力学研究班也为工程力学系的成立创造了良好条件，为我系初期教学工作打下了部分基础。因此，工程力学研究班可以看成工程力学系的前身。

建系初期，我们还参考了苏联列宁格勒多科性工学院的力学专业教学计划，并聘请了当时在北京大学工作的苏联专家托洛斯基副博士指导过教学工作。

一九五八年建系时，我们设立了固体力学、流体力学和计算数学三个专业。不久考虑到技术学科的共同性质，学校又将当时的动力机械系的工程热物理专业合并到当时的工程力学数学系。一九六八年以后，计算数学专业分别合并到学校先后成立的计算机工程系和应用数学系。

一九八二年基础课委员会中的理论力学和材料力学两个教研组（力学教研室）与原

\* 中国科学院学部委员、清华大学教授，工程力学系第一任系主任。

\*\* 当时同时成立的还有自动化进修班，由清华大学钟士模教授（已故）任班主任。

工程力学系合并，成为现在的工程力学系。从此工程力学系还承担起全校力学基础课的教学任务。

一九八五年从学科发展和社会需要出发，扩大学生的知识面，拓宽专业面，将固体力学流体力学两个专业合并为工程力学专业，现在工程力学系设有工程力学和工程热物理两个大学本科专业，设有固体力学、流体力学、一般力学、实验力学和工程热物理五个硕士研究生点，和固体力学、流体力学、一般力学和工程热物理四个博士研究生点。

一九八三年为更好地开展科学研究工作成立了工程力学研究所，并与热能工程系联合成立了工程热物理研究所，此外还参加了学校跨专业联合组织的有关研究所、室以及技术开发工作。工程力学系还受学校委托管理“强度与振动中心”，这个中心为全系和校内外科学研究、教学和技术开发服务。

工程力学系建系近三十年来，所培养的工程力学、工程热物理系专业的大学本科生共毕业 2100 余人。一九六六年以前培养研究生 15 人（工程力学研究班除外），一九七八年以来至今已毕业的硕士研究生约 170 人，博士研究生约 7 人。

三十年的经历给我们提供了什么经验和教训呢？以我一己之见，认为有以下三个方面：

## 一、工程力学学科属于技术科学范畴\*

工程力学（在美国多称为应用力学）从它的近百年的发展史看，是工业生产的蓬勃发展促进了它的成长。它所研究的对象不是一般的物质机械运动，而绝大部分是研究以生产实际为对象的机械运动规律。近百年来，它已发展成为独立的超出了物理学的范畴的一门学科。它是介于自然科学与工程技术之间的，起着桥梁作用的技术科学的一个组成部分。因此应该明确地肯定：工程力学是一门技术科学，它既不属于理科，也不是哪一门工程技术所能包括的。

这一点从各国本专业设置的情况看，也可以得到一些实例。无论在北美洲（美国和加拿大）或是欧洲各国的绝大多数大学的理学院中均找不到力学系和力学专业。反而在工学院的土木系、机械系或航空、航天系开设了工程力学或应用力学的课程或设置专门化，而且他们往往只在研究生院而不是在大学本科阶段培养力学专门人才。在英国或西德某些个别大学则习惯于称它为应用数学专业；国外只有极个别的大学设有力学系，培养本科生。

在我国则由于一些原因，在工程力学或应用力学学科的性质问题上还存在着不同的看法，有待于讨论。

## 二、工程力学专业应培养什么样的人 and 如何培养

从上面的论述，我们明确了工程力学属于技术科学范畴，而且它的发展是与生产实

\* 这里主要是指工程力学专业，至于工程热物理则大家都认为它属于技术科学。

践和技术进步密切关联的，也就是说，它研究的问题是由不同的工程技术领域的发展中提炼出的力学问题，但这些问题又往往不局限于某一特定的工程技术领域，例如塑性力学既来源于工程设计又来源于金属压力加工。

因此从事于工程力学专业的大学生，既要对力学的理论和实验具有坚实的基础，同时对于某一个方面的工程专业具有基本的知识，也可以说对于某一方面的工程实际也应具有一定的感性认识，以便对于力学问题的来龙去脉有所理解。在大学毕业後，经过几年的实际工程的锻炼和研究工作的训练，这样的力学专业毕业生将会成为较理想的力学工作者。

从几十年来著名的力学家的学历和经历，也就是他们成长的历史来看，可以得到更多的启发。象普朗特、冯·卡门、铁木辛柯等大师，和我国的钱学森等同志，都是在大学先受过工科教育、而后从事力学研究和一段生产实际工作，并在力学发展中做出了卓越的贡献的。

工程力学研究班的经验也说明了这点，三届绝大多数的学员是经过不同工程专业教育或从其应届毕业生中选拔出来的、然后在工程力学的理论和实验技术上得到培训。

我系本科教学计划大体上也是沿着上述的思路制定的。

从我系二十一届毕业生的学习过程看，可能是我们在教学计划中对学员要受到一定程度的工程训练的思想还不够明确和强调，加上一些其他因素的影响，学生在毕业后暴露出重理论轻实际的思想倾向。如何将学生的专业思想引导到正确的方向上来，使之得到全面发展，这是今后我系进一步改革中应认真研究的一个首要问题。

在培养什么样的力学人才问题上，还值得讨论乃至试验的另一种方式是吸取工程力学研究班的经验和参考其他许多国家的做法，在全国范围内考虑，应逐步减少力学专业的数目和招本科生名额而增加硕士生和博士生的比重，以提高培养的质量。

### 三、提高教师队伍的业务素质

我系教师队伍经过二十多年的培养和锤炼，由少到多，由薄弱到较为强大，由幼稚到较为成熟。在教学方面经过大家的努力可以说基本上已建立了一套较完整的课程体系。当然还应该看到，在学科分支方面，我们还有缺门和薄弱点，在力学不断发展中，更有一些新领域有待我们尤其是中青年的新生力量去掌握和占领。

在科学研究方面，由六十年代初期的起步阶段，中间经过十年动乱的混乱和停滞阶段，到今天达到较全面的主动开展科研阶段。我们研究的课题中，不少在理论方面和实验技术方面达到了现代的国际水平，并且有相当数量的课题是来自我国生产实际的。对这方面，我们应该充分予以肯定并建立自信心。与此同时，我们今后在科研方面还应百尺竿头，更进一步，不断攀登高峰，为我国的经济建设做出更多的贡献，以便从长远看，更有利于我国经济的独立自主的发展。

要做到这一点，关键问题是教师的素质和经历。应该看到，由于我国人事制度的原因，我系大多数教师的经历是比较单一的。一般是从大学毕业后就留校从事教学科学研

究工作。许多人多年来承担繁重的教学工作，即使从事科研工作的较多的同志也主要是在学校中进行科研。指导学生去工厂实习给部分同志提供了一些机会，了解和接触实际生产工作，但这些毕竟时间很短，而且只能处于旁观者的地位观察生产过程，很少有教师真正负责过某项生产工作，这就不可避免地使我系教师，包括我自己，具有一些“营养”不足的弱点——缺乏生产实践经验。在教学、科研和生产三个方面，我系教师相对地说，最缺乏的是生产经验。在考虑进一步提高我系教师的业务素质时，如何帮助广大教师尤其是我们今后发展的主力——中青年教师——逐步获得一定程度的生产实际经验是摆在我系今后一、二十年的重要课题。

值此庆祝工程力学研究班和工程力学系创办三十周年之际，谨抒管见，愿与同志们共议。

(1987.8.25)

# 基于非关连流动法则的极限分析

钱令希\* 王志必

(大连工学院 工程力学研究所)

## 摘 要

本文提供了库伦型材料考虑非关连流动法则时的近似屈服准则,用以估计挡土墙土压力的下解。这个屈服准则为:

$$f' = \tau - (c' + \sigma_n \tan \varphi') \leq 0$$

其中  $\varphi' = \arcsin(\sin \varphi \cos(\varphi - \alpha))$  为修正的摩擦角;  $c' = c \tan \varphi' \cot \varphi$ ; 而  $\alpha$  为流动方向与屈服剪应力方向的夹角。

计算了一个最简单的例子,表明流动法则的影响在  $\varphi \leq 20^\circ$  时很小 ( $< 5\%$ ),但随着  $\varphi$  的增大,其影响发展很快,不宜忽视。

## 一、上下限定理

工程结构极限分析有两个特别有力的工具,即计算结构极限承载能力的上、下限定理。它们是建立在塑性力学的“关连流动法则”上的。所谓关连,是指塑性流动的方向是沿着材料屈服函数面的法向,所以也称为“法向流动法则”。这个法则对金属那样的塑性材料是相当符合实际的,它是塑性力学的重要基础。

本文所指“非关连流动法则”是指塑性流动的方向并不是屈服函数的法向。这时,原来的上、下限定理自然就不能用了。这个问题之所以引人注意,是因为像土壤那样的材料,其流动法则是非关连的。而跟土壤有关的工程问题,例如挡土墙的土压力,边坡的稳定和地基的沉降等,大多属于极限分析问题。所以有必要研究非关连流动法则的极限分析,最好是跟塑性材料一样,找到比较实用的上、下限定理。

在弹塑性力学的基本方程中可以用关连的,也可以用非关连的流动法则,然后用间隔步,将变形过程分段,每步用有限元法求解,这样一步一步向极限状态逼近。不少学者这样做,Zienkiewicz<sup>[6,7]</sup>还做了用两种流动法则计算的结果比较。这种逐步逼近的方法,工作量非常浩大,逼近过程的稳定性和步长很有关系,而步长的选择至今还没有可靠的办法。钟万勰等<sup>[6,7]</sup>提出的参数变分原理和相应的二次规划算法来代替每一步的正规有限元计算,使工作量大减,可以在微机上进行。但仍是逐步逼近的方法,这跟一步

\* 中国科学院学部委员,大连工学院教授。

就能估计出极限状态的极限分析是不同的。

对于非关连流动法则的极限分析,下面是前人提供的上、下限定理<sup>[6,3,4]</sup>可以供我们参考:

1. 上限定理——基于关连流动法则可使结构破坏的荷载,亦将使材料是非关连流动法则的同样结构破坏。

该定理表明,关连问题的真实解是非关连问题的上限解。可以这样来解释:一个只要求满足平衡和屈服条件的静力允许应力场跟流动法则无关,所以非关连问题真实解的静力允许应力场对关连问题也是静力允许的。而根据经典的下限定理,对应于静力允许应力场的外荷载是关连问题的下限解,所以非关连问题的极限荷载真实解必定不会大于关连问题的真实解。但是,因为关连问题的真实解一般很难求得,这时只得把关连问题的上限解做为非关连问题的上限了。

2. 下限定理<sup>[3]</sup>——根据材料的屈服函数  $f(\sigma_{ij})$  和非关连流动法则找出一个修正屈服函数  $g(\sigma_{ij})$ 。如果有一应力场  $\sigma_{ij}$ , 满足内部平衡和力的边界条件,并到处满足  $g(\sigma_{ij}) \leq 0$ , 则这个外荷载不会导致结构破坏。

现介绍Palmer<sup>[3]</sup>建立势函数曲面  $g(\sigma_{ij}) = 0$  的方法。图1的凸实曲线表示屈服面  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , 箭头表示各屈服应力点的流动方向,它们并不垂直于屈服面,虚直线表示这些流动方向的法向面。内包虚曲线就表示势函数曲面  $g(\sigma_{ij}) = 0$ 。如果它超越  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , 则上述下限定理不成立。如果它不超越  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , 则根据凸集理论,这个  $g(\sigma_{ij}) = 0$  是个凸曲面。以这个  $g(\sigma_{ij}) = 0$  曲面代替  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , 用经典的关连流动法则问题的下限定理的证法就可以证明上述下限定理。

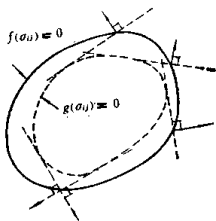


图 1

## 二、挡土墙的土压力

上节的上、下限定理虽然能成立,但在应用上并不理想。因为上限定理以关连问题的真实解作为非关连问题的上限,而此真实解一般是难求得的,于是只好用关连问题的上限解。用非关连问题的下限定理时,首先要做出一个缩小了的修正屈服准则  $g(\sigma_{ij}) = 0$ , 在主应力空间  $\sigma_{ij}$  里,这是不容易的。即使做到了,如果它和  $f(\sigma_{ij}) = 0$  相距较大,则下限解会过低。这样,上、下限相差比较大,实用意义就比较小了。

这里提供一个例子,以引发进一步研究的途径。

图2示一直立挡土墙,土壤容重为  $\gamma$ , 内摩擦角为  $\varphi$ , 粘着力为零,墙面光滑,同土壤无摩擦。1776年Coulomb用极限平衡的概念给出主动土压力的值为

$$P = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (1)$$

这个解流传应用至今,但亦常为人所怀疑,因为极限平衡法出发于三个力  $W$ ,  $P$  和  $F$  的平衡,但它们是否交汇于一点未被证明。现在用基于关连流动法则的上下限定理可以证明这个解既是上限又是下限,所以是个把土壤视为塑性材料的真实解,见文献[4]的344—346页。这是土力学中少有的真实解之一。稍为复杂一点的问题就只能满足于一个近似的上限解了。所以本文就用这个例子,把这个真实解作为非关连流动问题的上限解(公式1),然后再设法找一个下限解,看相差多少。

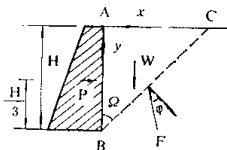


图 2

首先构造一个适用于土壤非关连流动的屈服准则面,经典的库伦 (Coulomb) 屈服准则则为:

$$\tau = c + \sigma_n \tan \varphi \quad (2)$$

其中  $\tau$  和  $\sigma_n$  分别为屈服点的剪应力和法向压应力,  $\varphi$  和  $c$  为土壤的内摩擦角和粘着力。

在图 2 的问题中,  $c = 0$ 。所以屈服准则面为:

$$f(\sigma_n, \tau) = \tau - \sigma_n \tan \varphi = 0 \quad (3)$$

在应力  $(\sigma_n, \tau)$  空间中, 它把应力空间划分为两个区域 (图 3 a):

$f \leq 0$ , 允许应力域

$f > 0$ , 不允许应力域

土壤各处的摩尔应力圆应不超越允许应力域。

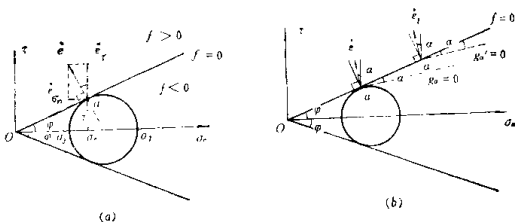


图 3 (a) 关连流动势函数  $e \perp (f=0), g=f$  (b) 非关连流动势函数  $0 \leq \alpha < \varphi, g \neq f$

关连流动法则 (图 3 a) ——按塑性力学理论, 屈服点塑性应变率  $\dot{\epsilon}$  的方向将沿屈服准则面的法向, 即

$$\dot{\epsilon} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (4)$$

它的两个分量为

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_r = +\lambda \\ \dot{\epsilon}_{\sigma_n} = -\lambda \tan \varphi \end{cases} \quad (5)$$

可见伴随着塑性流动, 将有剪应变率  $\dot{\epsilon}_r = \lambda$  和体积应变率  $\dot{\epsilon}_{\sigma_n} = -\lambda \tan \varphi$ 。为了表明  $\dot{\epsilon}_{\sigma_n}$  为体积膨胀率, 可将  $f(\sigma_n, r)$  变换成主应力  $(\sigma_1, \sigma_3)$  空间中的函数。因为

$$\begin{cases} r = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \varphi \\ \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi \end{cases}$$

代入 (3) 得

$$f(\sigma_1, \sigma_3) = \frac{1}{2 \cos \varphi} [\sigma_1(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi)]$$

用 (4) 式:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \lambda(1 - \sin \varphi) \frac{1}{2 \cos \varphi} \\ \dot{\epsilon}_3 = -\lambda(1 + \sin \varphi) \frac{1}{2 \cos \varphi} \end{cases} \quad (6)$$

于是体积变化率为:

$$\dot{V} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3 = -\lambda \tan \varphi = \dot{\epsilon}_{\sigma_n} \quad (7)$$

因为压应力为正, 所以负的体积变化表示体膨胀, 比较 (7) 的两式, 可知

$$\dot{V} = -\dot{\epsilon}_r \tan \varphi \quad (8)$$

非关连流动法则 (图 3 b) —— 根据实测, 土流动时, 体积膨胀率小于 (8) 式的值, 甚至没有体积变化, 所以:

$$0 \leq \dot{\epsilon}_{\sigma_n} \leq \lambda \tan \varphi \quad (9)$$

于是流动方向并不是屈服准则面的法向, 而是沿着和剪切应变率  $\dot{\epsilon}_r$  成  $\alpha$  角的方向,  $0 \leq \alpha < \varphi$ 。当  $\alpha = 0$ , 则完全没有膨胀率, 流动全部是剪切应变, 相当于屈服点  $\alpha$  的流动势函数为:

$$g_n = (r - r_\alpha) - (\sigma_n - \sigma_{n\alpha}) \tan \alpha \quad (10)$$

非关连流动为:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_r = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = \lambda \\ \dot{\epsilon}_{\sigma_n} = -\lambda \tan \alpha \end{cases} \quad (11)$$

非关连流动的近似屈服准则面——用图 3 b 中虚线所示的平行流动势函数面, 并不能按文献 [2] 的办法构成如图 1 的近似屈服准则面  $g = 0$ 。先研究  $\alpha = 0$  的情况。

当应力在  $\alpha$  点屈服, 取屈服函数为



$$g_a = \begin{cases} \tau - \tau_0 & \text{倘 } \sigma_n \geq \sigma_a \\ \tau - \sigma_n \tan \varphi & \text{倘 } \sigma_n < \sigma_a \end{cases} \quad (12)$$

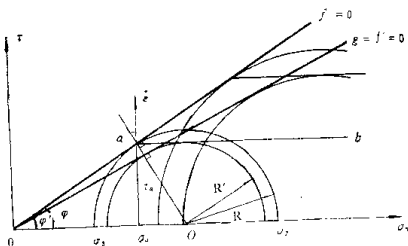


图 4

$\sigma$  点的屈服准则面为  $oab$ ，应力圆应不超越这个屈服准则面。原来的应力圆半径为  $R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ ，圆心在  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$  处。现在应力圆的半径应缩小为  $R' = \tau_0$ ，圆心仍然假定在原处，则新的应力圆满足屈服条件和法向流动条件，根据平衡条件由应力状态决定的外荷载将小于极限荷载，是下限。

新的  $\sigma$  点应力圆表示该点的剪应力不变，而平均主应力  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$  也不变。后者是个假定，这个假定并不妨碍找下限解，但是它可以提供找到一个适用于各点的统一屈服准则面的便利。

从原点  $o$ ，引新应力圆的切线，它和水平座标轴的夹角为  $\varphi'$ ，于是

$$\sin \varphi' = \frac{R'}{(\sigma_1 + \sigma_3)/2} = \frac{\tau_0}{\sigma_a + \tau_0 \tan \varphi}$$

因为  $\tau_0 = \sigma_a \tan \varphi$ ，代入上式，便得：

$$\begin{aligned} \sin \varphi' &= \sin \varphi \cos \varphi \\ \varphi' &= \arcsin (\sin \varphi \cos \varphi) \end{aligned} \quad (13)$$

这表明  $\varphi'$  是个常数，对各屈服应力点都一样。于是便得到一个修正的屈服函数：

$$g = f' - \tau - \sigma_n \tan \varphi' \quad (14)$$

满足  $f' \leq 0$  的应力状态，将满足屈服条件  $f \leq 0$ ，同时还符合非关连流动法则  $\alpha = 0$ 。

用同样的推理，可以推广到  $0 \leq \alpha < \varphi$  的情况，这时只要将(14)式中的  $\varphi'$  改成

$$\varphi' = \arcsin (\sin \varphi \cos (\varphi - \alpha)) \quad (15)$$

对于更一般的有粘着力  $c$  的土壤，库伦屈服函数为

$$f = \tau - (c + \sigma_n \tan \varphi) \quad (16)$$

也可以用同样推理，得到非关连流动法则的近似屈服函数(图5)：

$$f' = \tau - (c' + \sigma_n \tan \varphi') \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} \varphi' = \arcsin(\sin \varphi \cos(\varphi - \alpha)) \\ c' = c \tan \varphi' \cot \varphi \end{cases} \quad (18)$$

考虑非关连流动法则的近似屈服函数  $f'$  (式(17)) 和关连流动法则的屈服函数  $f$  (式(16)) 在形式上完全一致, 只是将内摩擦角  $\varphi$  和凝聚力  $c$  按式(18)修改为  $\varphi'$  和  $c'$ , 用这个近似屈服函数, 便可利用经典的下限定理。

表 1 和图 5 表示了  $\varphi'/\varphi$  和  $\alpha, \varphi$  三者之间的关系。

表 1  $\varphi'/\varphi$  值

$\varphi$	$\alpha$									
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	
0	1.000	0.996	0.985	0.965	0.937	0.901	0.855	0.800	0.737	
0.2 $\varphi$	1.000	0.998	0.990	0.978	0.960	0.936	0.906	0.869	0.826	
0.4 $\varphi$	1.000	0.999	0.994	0.987	0.977	0.964	0.946	0.925	0.899	
0.6 $\varphi$	1.000	1.000	0.998	0.994	0.990	0.984	0.976	0.966	0.954	
0.8 $\varphi$	1.000	1.000	0.999	0.999	0.997	0.996	0.994	0.991	0.988	
$\varphi$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	

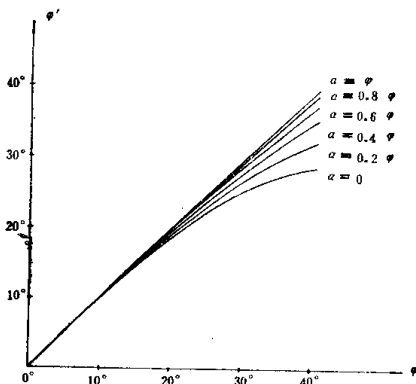


图 5

表 2 和图 6 表示了  $c'/c$  和  $\alpha, \varphi$  之间的关系。

表 2  $c'/c$  值

$\varphi$ $\alpha$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
0	1.000	0.996	0.984	0.964	0.932	0.889	0.832	0.760	0.674
0.2 $\varphi$	1.000	0.998	0.990	0.977	0.956	0.928	0.889	0.839	0.775
0.4 $\varphi$	1.000	0.999	0.994	0.987	0.975	0.959	0.936	0.906	0.865
0.6 $\varphi$	1.000	0.999	0.997	0.994	0.989	0.982	0.971	0.957	0.937
0.8 $\varphi$	1.000	1.000	0.999	0.999	0.997	0.995	0.993	0.989	0.984
$\varphi$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

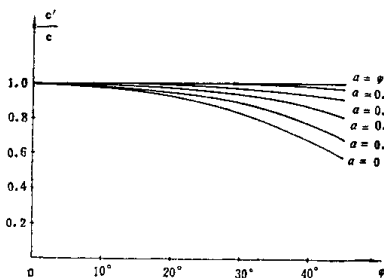


图 6

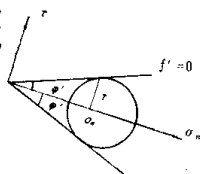


图 7

现在可以回答图 2 挡土墙的主动土压力问题。

设静力允许场为:  $\sigma_y = \gamma y$ ,  $\sigma_x = k\gamma y$ ,  $\tau_{xy} = 0$

它满足平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

和力的边界条件:

$$\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \quad \text{当 } y = 0$$

由应力圆 (图 7) 知

$$\tau = \frac{1}{2} \gamma y (1 - k) \cos \varphi'$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \gamma y (1 + k) - \frac{1}{2} \gamma y (1 - k) \sin \varphi'$$

代入屈服条件 (式 14) :

$$\tau - \sigma_n \tan \varphi' = 0$$

得:

$$k = \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right)$$

$$\sigma_x = k \gamma y$$

而边界 ( $x=0$ ) 的土压力为:

$$P_{\text{下}} = \int_0^H \sigma_x dy = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \quad (19)$$

其中  $\varphi'$  由式 (13) 计算:

$$\varphi' = \arcsin (\sin \varphi \cos \alpha) \quad (14)$$

这是非关连流动 ( $\alpha=0$ ) 法则下的土压力下限解, 而上限解由式 (3) 给出

$$P_{\text{上}} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (20)$$

两者计算公式相似, 只是  $\varphi$  和  $\varphi'$  有差异。

如果流动方向角  $\alpha \neq 0$ , 则式 (19) 不变, 只是其中

$$\varphi' = \arcsin (\sin \varphi \cos (\varphi - \alpha)) \quad (15)$$

表 3 和图 8 表示了  $P_{\text{上}}/P_{\text{下}}$  和  $\alpha, \varphi$  的关系。

表 3  $P_{\text{上}}/P_{\text{下}}$  值

$\varphi$ $\alpha$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
0	1.000	0.999	0.995	0.981	0.955	0.910	0.842	0.751	0.639
0.2 $\varphi$	1.000	1.000	0.997	0.988	0.971	0.941	0.894	0.827	0.739
0.4 $\varphi$	1.000	1.000	0.998	0.993	0.983	0.966	0.938	0.896	0.836
0.6 $\varphi$	1.000	1.000	0.999	0.997	0.992	0.985	0.971	0.951	0.921
0.8 $\varphi$	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	0.993	0.987	0.979
$\varphi$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

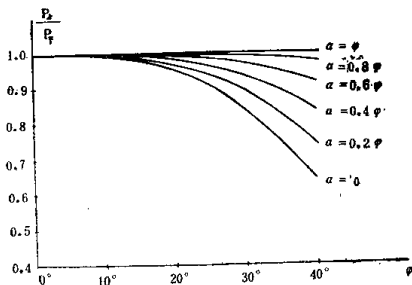


图 8

表 3 和图 8 表明，土压力的下限解高于上限解： $P_{\text{下}} \geq P_{\text{上}}$ 。这和一般的理解： $P_{\text{下}} \leq P_{\text{上}}$  相反。这里恰好为我们提供一个机会讨论一个问题，那就是极限分析有两类不同性质的问题。第一类是通过极限分析计算承载的极限，第二类是计算施载的极限。关于第一类承载问题，可以举一根梁为例，当梁上荷载升至极限值  $P^*$ ，梁发生塑性破坏。极限分析常常利用它的上、下限定理来求这个  $P^*$  的上、下限解。例如采用一个比实际为低的材料屈服限；用下限定理可以得到一个低于  $P^*$  的下限解  $P_{\text{下}}$ 。在承载问题中，下限解偏于安全，上限解偏于不安全，在数值上  $P_{\text{下}} \leq P^* \leq P_{\text{上}}$ 。关于第二类施载问题，可以举挡土墙为例。在墙外倾的极限状态中，土壤施加于墙上的压力为  $P^*$ 。用极限分析的上、下限定理可以计算  $P^*$  的近似解。例如采用一个比实际为低的土壤屈服限，用下限定理可以得到一个下限解。这个下限解  $P_{\text{下}}$  在数值上却要高于或等于真实解  $P^*$ 。这是因为较低屈服限的土壤，保持自身稳定的能力差，当墙外倾时，对墙施加压力自然要大一些。从本文式 (1) 也可以看出，如果土壤的内摩擦角减小，土压力  $P$  就增加。算出的载荷值大些，在施载分析中是偏于安全的。所以在第二类施载问题中，极限分析的下限解仍是偏于安全的，上限解仍是偏于不安全的，但是在数值上  $P_{\text{下}} > P^* > P_{\text{上}}$ 。

从表 3 和图 8 的计算结果可以看出：(1) 非关连流动法则的土壤给于挡土墙的土压力高于关连流动法则的土压力。这说明无体积膨胀的摩擦材料，其保持自身稳定性的能力低于有体积膨胀的塑性材料。(2) 当土壤的内摩擦角  $\varphi \leq 20^\circ$ ，流动法则的性质 ( $\alpha = 0 \sim \varphi$ ) 对土压力的影响在 5% 以下，这在工程计算中是不重要的。但是随着  $\varphi$  的增大，这个影响上升得比较快，当  $\varphi = 30^\circ$  和  $40^\circ$  时，该影响分别为 16% 和 36%，就不宜忽视了。

### 参 考 文 献

- [1] Drucker, D. C. and Prager, W., Q, Appl. Math 10:167—169, 1962.
- [2] Palmer, A. C., J. Mecanique, 5(2):217—222, 1966.
- [3] Maier, G., Meccanica, Vol 4, No. 3, 1969, P. 1—11.
- [4] Chen, W. F., 《Limit Analysis and Soil Plasticity》, Elsevier sci. publ. co. 1976.
- [5] Zienkiewicz, O. C. and Corneau, I. C., Arch. Mech. 24, 5—6, 873—888, 1972.
- [6] 钟万勰, 计算结构力学及其应用, 2 (1986), No 2
- [7] 张柔雷, 钟万勰, 计算结构力学及其应用, 4(1987) No.1.
- [8] 王仁, 熊祝华, 黄文彬, 《塑性力学基础》, 科学出版社, 1982.

# 裂纹尖端奇异场—清华大学工程力学系校友研究成果综述

黄克智\* 余寿文\*\* 杨卫\*\*\*

(清华大学 工程力学研究所)

## 一、引言

近二十余年,断裂力学的兴起引起了强度分析方法重大的变革。而裂纹尖端场的研究在断裂力学中起着核心的作用。它是建立断裂准则不可缺少的一步。

对于线弹性断裂问题,应力和应变在裂纹尖端具有  $r^{-1/2}$  阶的奇异性。应力场的主项可表示为

$$\sigma_{ki} = \frac{K_{(i)}}{\sqrt{2\pi r}} \sigma_{ki}^{(i)}(\theta)$$

式中  $K_{(i)}$  为应力强度因子 ( $i$  表示裂纹的类型 I, II 或 III);  $\sigma_{ki}^{(i)}(\theta)$  为角分布函数,它依赖于裂纹类型。对于静止裂纹和准静态裂纹,  $\sigma_{ki}^{(i)}(\theta)$  是同样的函数,而对于动裂纹则还依赖于裂纹扩展的马赫数。

但是对于非线性断裂问题,裂纹尖端奇异场远较弹性情况复杂,这一课题成为近年来国际断裂力学界引人瞩目的问题。本文对这一问题研究的现状作一综述。清华大学工程力学系的校友们对线性与非线性断裂问题作出了重要的贡献,本文着重予以介绍。

## 二、问题的分类

裂纹尖端奇异场的研究,按照加载的条件,可分为静力问题与动力问题。按照裂纹的状态,可以分为静止裂纹与扩展裂纹。按照裂纹的类型,可以分为 I 型、II 型与 III 型。如果是平面问题,按照受力状态,可以区分为平面应力与平面应变。按照材料的性质,可以区分为弹性、塑性、粘弹性、蠕变及损伤材料等等。按照上述各种分类,可以得到许多不同的组合。如[1]所指出,裂纹尖端奇异场对于某些参数(例如马赫数,波桑比  $\nu$  等)的变化是不连续的。因此,要对裂纹尖端奇异场作出统一的描述是不可能的,只能对于某一种组合情况给出一种结果。

\* 中国力学学会副理事长,清华大学工程力学系教授,工程力学研究所所长。

\*\* 清华大学第二届工程力学研究生毕业(1958—1960)留系任教至今。

\*\*\* 清华大学工程力学系硕士研究生毕业(1978—1981),在美国获博士学位 1985年回国任教至今。

### 三、求解裂纹尖端奇异场的一般方法

求解裂纹尖端场一般采用渐近展开的方法。把每一个场变量（应力、应变、位移或它们的速率） $\Phi$ 展开成渐近级数的形式：

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots \quad (3.1)$$

式中  $\Phi_0$  为主项，且若以  $(r, \theta)$  表示以裂纹尖端为原点的极坐标，恒有

$$\Phi_{i+1}/\Phi_i \rightarrow 0 \quad \text{当 } r \rightarrow 0$$

例如有幂级数形式：

$$\Phi = r^\alpha [\Phi_0(\theta) + r\Phi_1(\theta) + r^2\Phi_2(\theta) + \dots] \quad (3.2)$$

或对数幂的形式：

$$\Phi = r^\alpha \left( \ln \frac{A}{r} \right)^\beta \left[ \Phi_0(\theta) + \left( \ln \frac{A}{r} \right)^{-1} \Phi_1(\theta) + \left( \ln \frac{A}{r} \right)^{-2} \Phi_2(\theta) + \dots \right] \quad (3.3)$$

(3.3) 式中  $A$  为一长度量纲的参数，它应与塑性区尺寸同一数量级。正如线弹性断裂力学的应力强度因子  $K_{(t)}$  一样， $K$  的数值不能由渐近解求得，它与远场的边界条件有关。对不同的问题，正确地选择渐近级数 (3.1) 是一个重要的问题。然后，可以依次导出  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$  的渐近方程。在一般情况下，只需要保留渐近级数的首项。

裂纹尖端附近的邻域往往要分成若干个具有不同特征的区域，相邻区域之间的交界线随着裂纹尖端一起移动。交界线表示一间断面，在交界线两侧的物理量应满足一定的连续或间断条件——称为连接条件。正确建立交界线上的连接条件是一个重要的问题。高玉臣与黄克智<sup>[2]</sup> 通过研究弹塑性介质的基本方程类型，证明对于硬化材料，或者理想弹塑性材料 ( $\nu < 1/2$ )，基本方程属于椭圆型，塑性区内部的解在一般情况下是充分光滑的。只有在裂纹尖端附近，在渐近的意义下，可以相对忽略弹性变形，才可能出现间断面。设以  $x=0$  表示间断面，则在间断面必须满足（以  $s$  表示应力偏量）

$$\sigma_{yz} = s_y = s_z = 0 \quad (3.4)$$

高玉臣与黄克智在[3]中对平面应变问题也得到同一结论。以后 Drugan 与 Rice<sup>[4]</sup> 用不同的方法，证明 (3.4) 是理想塑性材料出现强间断的条件。

### 四、静止裂纹问题

#### 1. 理想塑性材料

Hutchinson<sup>[5]</sup> 给出了理想塑性材料平面应力与平面应变问题的解，但是在这个解中裂纹尖端附近存在着应力间断线。Shih<sup>[6]</sup> 对理想塑性材料平面应变的 I、II 混合型问题，也认为裂纹尖端附近存在应力间断线。在高玉臣<sup>[7]</sup> 给出的平面应变 I、II 混合型解中没有应力间断线，但是在裂纹尖端附近存在弹性区。在新志和、余寿文<sup>[8]</sup> 给出的平面应力 I 型解中也不存在应力间断线。唐立强、高玉臣<sup>[9]</sup> 给出了一种致密材料的尖端场。这种材料的屈服条件为



$$f = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} + a^2 (\sigma_{ii} + 3p)^2 - k^2 = 0 \quad (4.1)$$

式中  $a, p, k$  为材料常数。本构方程服从关联法则：

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.2)$$

计算表明当  $a > 0.09$  时，即使对于纯 I 型裂纹，尖端附近不可能有全塑性解。

## 2. 幂硬化材料

对于单向拉伸时满足关系

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \alpha_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (4.3)$$

的幂硬化材料，著名的平面应力及平面应变 I 型裂纹尖端奇异场为

$$\sigma_{ij} = r^{-\frac{1}{n+1}} \sigma_{ij}^{(0)}(\theta) \quad (4.4)$$

$$e_{ij} = r^{-\frac{n}{n+1}} e_{ij}^{(0)}(\theta)$$

容易证明，HRR 解既适用于塑性形变理论（全量理论），也适用于塑性流动理论（增量理论）。对于平面应变 I，II 混合型问题，Shih<sup>[63]</sup> 给出了详细计算结果。对于 III 型裂纹，黄克智、余寿文<sup>[12]</sup> 得到了简单解析形式的解。

## 五、准静态扩展裂纹问题

当裂纹缓慢扩展时（裂纹扩展速率  $\dot{a} \ll$  声速），因而可以略去惯性力。这种情况称为准静态扩展。准静态扩展裂纹尖端场的奇异性远远低于静止裂纹尖端场的奇异性。其根本原因在于裂纹扩展时不断有能量耗散。

当裂纹扩展时，对于随尖端一起移动的观察者说来，尖端场保持不变，这种情况称为定常扩展。定常扩展时，任一场变量  $\phi$  的时间导数  $\partial\phi/\partial t$  与空间导数  $\partial\phi/\partial x$  ( $x$  为沿裂纹扩展方向的坐标) 之间满足关系：

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\dot{a} \frac{\partial}{\partial x} \quad (5.1)$$

### 1. 理想塑性材料

在准静态定常扩展的假定下，尖端附近场的分区如图 1。Chitaley 与 McClintock<sup>[13]</sup> 得到了 III 型裂纹的尖端场。在裂纹延长线上塑性应变解为

$$\gamma_s^* = \frac{k}{G} \left[ \frac{1}{2} \left( \ln \frac{R}{r} \right)^2 + \ln \frac{R}{r} \right] \quad (5.2)$$