集合论导引

南京航空航天大学翻印

1999.6.

前言

1989年初，鉴于教学任务与科研工作的需要，我们共同讨论并拟订了一个写作纲要；原始计划是撰写一本既适用于计算机系，又适用于数学系的《数理逻辑》课程的教材，书名定为《数理逻辑·集合论·数学基础》．我们的基本想法是：全书将分上、中、下三篇．其中上篇讨论数理逻辑的基础知识，即有关逻辑演算的语形和语义研究的基本内容．这样，一方面可为进一步学习现代数理逻辑的各个分支，即模型论、证明论、递归论、集合论与构造性数学等提供一个共同的基础；另一方面，也可从逻辑基础的角度，为学习与研究各种逻辑系统在计算机科学中的应用而铺设一段共同的必经之路．中篇讲集合论的创立与发展．如所知，近代公理集合论的内容，并没有在本质上比素朴集合论更为丰富，又为保持历史发展的自然状况和自然顺序，故就中篇之自然面貌与内容而言，将是素朴集合论，但就其人为的外观特征而言，又将尽量而适当地使用现代集合论的语言．这样，既为进一步学习诸如模型论等相关的数理逻辑分支而准备了集合论的基础知识，也可为进一步学习计算机科学中的数学理论（诸如图论、代数结构、组合学等等）提供一个共同的基础．下篇将研讨数学基础论的基本内容．如所知，古典集合论中悖论的发现，导致了数学基础论这一学科的诞生，并将集合论的研究推向了近代公理集合论的阶段，因而下篇的内容，将包括悖论的分析及其解决方案，数学基础诸流派的概述，以及近代公理集合论的基本内容．这样，对于计算机科学方向的读者来说，至少可使在素朴集合论的学习中所涉及的遗留问题得到落实，同时也可使数理逻辑专业并有志于从事数学基础研究的读者受到基本训练．总之，我们希望该书既可作为

计算机科学与工程系的基础课教材，又可作为数学系基础数学和数理逻辑专业的基础课教材.

概括地说，该书内容就是讨论逻辑学与集合论，因而对于基础数学与逻辑专业的读者来说，其重要性无需多言 对于计算机科学与工程方面的读者而言，让我们读一读著名的计算机软件大师E.W.Dijkstra的自述，将会受到很大的启发. 他指出："我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了. 我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多的错误. 不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道，要是我能年轻20岁的话，我就回去学逻辑."[78] [79] 关于集合论，不妨再以下述事实为例而说明之.美国国家总统科学顾问、著名的计算机科学家J.T. Schwartz教授和他的合作者们运用集合论概念及其运算开发了一种崭新的程序设计语言SETL，这种语言SETL以集合论为其基础，它要用到诸如有穷集合、任意域上的映射等一系列集合论概念及其运算，无疑这是一项意义重大的开创性工作. 他们撰写和出版了一本书，书名为《Programming With Sets: An Introduction to SETL》[80]. 这是第一部程序设计语言SETL大全，又是一本以软件工程和算法开发为核心内容的教程，在美国，已广泛成为算法设计与程序设计语言方面的研究生课程的教材. 由此可见集合论知识对于计算机科学的重要意义和两者之间的密切关系. 总之，在计算机科学与工程界普及和加强逻辑学、集合论的知识，乃是一项十分必要和极为重要的工作.

此外，对于全书内容的深浅而言，还曾计划上、中、下三篇各分两个档次，以便取其较浅部份而为本科生的教材，取其较深部份而为研究生的教材. 例如，在上篇中取其形式系统的语形研究部份为本科生的教材，而取其语义研究之内容为研究生教材. 最后在上、中、下三篇之间，还计划在相互依存中力求相对独立，以使既可联成一个整体，又可拆为三块而自成一体.

然而，对于以上的认识和计划，在后来撰写讲义和教学实践的过程中，发现难以全部实现．特别是在考虑和付诸正式出版的过程中，根据多方面的意见和看法，还是决定将如上所说全书之上、中、下三篇独立成册，依次写成《数理逻辑概论》、《集合论导引》和《数学基础引论》三本书分别出版．当然，如此设置安排确也有合理之处，即如篇幅控制和教学使用上也有方便的一面．

在这里，关于《集合论导引》一书的写作，尚需作如下几点说明：

第一是在短期内仓促成稿，用于教学实践的次数甚少，因而缺点与疏忽之处难免，希望读者与同行专家批评指正，以使能在今后的教学过程中逐步完善．

第二是一个声明，即在一些定理的证明中，虽然有时也会直接使用逻辑演算中的一些形式定理，但作为集合论内容陈述中所使用的大量符号与符号表达式而言，都应视为自然语言的缩写，而决不能误认为是形式系统中的形式语言，因而不要从形式语言的语法角度去审视这里的简记符号或符号表达式．例如，"&"仅仅是"并且"的简记，而并不是形式语言中的合取词，又如"⇒"只是"如果…，那么…"的缩写，而不是形式符号蕴含词，如此等等．特别是各种符号表达式，例如，下述定义 5.2.1：

$$r(R)=R^*\Leftrightarrow_{df}R\subseteq R^*\subseteq A\times A\ \&\ R^*[\mathrm{ref}]$$
$$\&\forall R'\subseteq A\times A(R\subseteq R'\ \&\ R'[\mathrm{ref}]\Rightarrow R^*\subseteq R')$$

其意是指凡是满足下述条件：

(a) $R\subseteq R^*\subseteq A\times A$,

(b) $R^*[\mathrm{ref}]$,

(c) $\forall R'\subseteq A\times A(R\subseteq R'\ \&\ R'[\mathrm{ref}]\Rightarrow R^*\subseteq R')$

的二元关系 R^*，就称为 R 的自反闭包，所以这仅仅是自然语言陈述的一种缩写而已，如果严格地按照逻辑演算语法要求来写的话，则还应使用摹状词而表达为：

$$r(R)=_{df}\iota_{R^*}[R\subseteq R^*\subseteq A\times A\cdots\cdots],$$

如此等等．总之，应记得这里是在用自然语言阐述素朴集合论的内容，否则，您若老是囿于形式系统的语法框架去看待这里的简记符号或符号表达式的话，则就势必误认为本书的表述错漏百出了．

第三是要提醒一件事，那就是不能以公理集合论的严格性来要求素朴集合论内容的陈述．因为如所知，任何一个数学理论之素朴陈述都有一个特点，即对推理过程中所使用的种种不证自明的思想规定，皆不明文列出而作为依据，只是无形地使用而已．例如，我们将在这里根据概括原则的思想内容去构造这样或那样的集合，但又不将概括原则明文列为造集的依据．对于其他作为出发点的思想规定的处理亦复如此．因而对于素朴陈述数学理论的这一特点不能忘记，否则，势必感到这里、那里的论述总是存在问题．当然，我们也偶尔在遇到这种情况时，加以注释或顺便提醒，但也不可能和不必要处处去作注释．对此，将和其他遗留问题一起，放在《数学基础引论》一书中去一一解决和落实，并在那里另辟专章讨论公理集合论的基本内容．

为了避免不应有的误解而特作如上几点说明，特别是第二、第三两点不能不作郑重声明．

以上写作计划的修订和本书《集合论导引》的写作，受到大连理工大学应用数学研究所所长徐利治、重庆大学计算机研究所所长陈廷槐、南京航空学院院长朱剑英、江苏省教委主任袁相碗、南京航空学院计算机科学与工程系主任林钧海、副主任黄远生等几位先生的大力支持和热情鼓励；又南京大学出版社社长时惠荣先生为本书的出版给予了热情的帮助和付出了细致的劳动，让我们在此一并致以诚挚的谢意．

朱梧槚　肖奚安

一九九〇年七月于南京

目　录

第一章 集合论历史概要

§1 集合论的先驱发展

集合论作为一门独立的数学分科的诞生和发展，乃是19世纪的事．但就集合与无穷集合之观念的萌芽和引入，当可一直追溯到古代．例如，Euclid 著述几何原本时，就已确立了空间是数学点之无限堆积的观点．然而，在往后的一个很长的历史阶段中，人们并没有去认真地专门研究集合与无穷集合概念．直到17世纪，Galileo 发现了“自然数全体”与“平方数全体”能以建立一一对应，从而直接动摇了自古以来关于“全体大于部份”这一看上去无容置疑的数学公理，这对于无限集的认识和理解，乃是一个重要的进步和发展．试看下面重复写出的一串自然数序列：

λ_1： $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots, \cdots$

λ_2： $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots, \cdots$

λ_3： $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots, \cdots$

$\cdots, \cdots,$

既然每个 $\lambda_i(i=1, 2, 3, \cdots, n, \cdots)$ 都是自然数序列，那么每个 λ_i 所包含的自然数个数都是一样多的，今于 λ_2 的每个自然数的右上角写上一个指数 2，使 λ_2 变为

λ_2^2： $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, n^2, \cdots, \cdots$

如此，一方面因 λ_2^2 只是由 λ_2 的每个自然数的右上角标以2

而得来，因而 λ_2^2 所包含的自然数的个数既没有比 λ_2 所包含的自然数个数增多，也没有减少，也就是说，应该是一样多的．但在另一方面，却又明确地看出 λ_2^2 比 λ_2 少掉了 3, 5, 6, 8, 10, … 等等无穷多个自然数，从而 λ_2^2 只包含了 λ_2 的一部份自然数．完全类似地，还可在 λ_3 的每个自然数的右上角标以 3 等等，以使被筛去的自然数愈来愈多，甚至还可构造递增愈来愈速的

$$\lambda^*:\ 1^{100},\ 2^{100^{100}},\ \cdots,\ n^{100^{100^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{100}}}}}},\ \cdots,$$

其所列出的自然数已极为稀疏，却又与全体自然数一样多。[1]

这就是 Galileo 在他的巨著《关于两门新科学的对话》(Dialogues Concerning Two New Sciences) 中所提出的，并为后人所普遍称谓的 Galileo 悖论．而且 Galileo 还在该书中指出，如图 1.1.1 所示，互不相等的两个线段 AB 和 CD 上的点，由于可以构成一一对应，因而可以想像它们含有同样多的点．但在另一方面，也更易想像 AB 上所含有的点少于 CD 所包含的点．不仅如此，一个充分短的线段上所含有的点，极易想像是一条直线上所含有的点的很少一部分．但在另一方面，如图 1.1.2 所示，由于小线段 AB 上的点能与直线 a 上

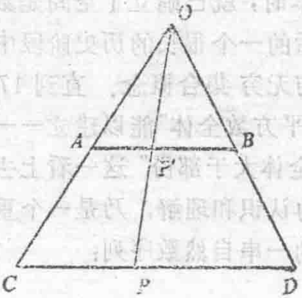

图 1.1.1

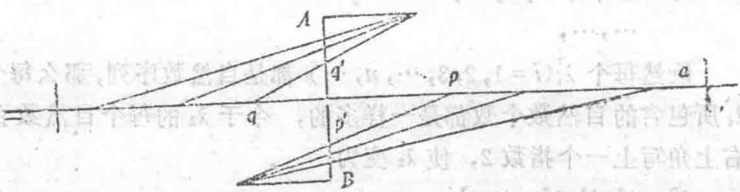

图 1.1.2

的点建立起一一对应的关系，从而也可以想像它们有同样多的点[注]。Galileo关于诸如此类的发现和阐述，大大地刺激人们去对无穷集合进行探索和研究．例如，后来的Dedekind（1831—1916）和集合论的创始人Cantor（1845—1918）等，就都曾基于有穷集合不会出现上述情形而用“能否与自身之真子集建立一一对应关系来划分有穷集合与无穷集合”．

Galileo（1564—1642）生于比萨（Pisa），父亲是一位布商，Galileo原来是在比萨大学攻读医学的，后来却在一位工程师那里接触并学习起数学来了，终于在17岁那年从医学转到了数学，大约十年左右以后，他取得了比萨大学的数学教授职位．但在后来，由于他写出了重要的数学论文而引起一些能力较差者的忌妒，以致他在工作和生活中很不愉快．故在1592年接受了帕度亚（Padua）大学数学教授的职位，但后来又由于他提倡Copernicus学说而触怒了罗马宗教法庭，1616年被召到罗马法庭，并被禁止发表著作．直到1630年，教皇Urban八世才允许他发表非教义的数学著作．因而在1632年，他出版了《关于两大世界体系的对话》（该书曾由上海外国自然科学哲学著作编辑组根据英译本译成中文出版，书名为《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》），然而就在该书出版一年之后，Galileo就再度受到罗马教皇法庭的传唤，再度被禁止发表著作．而且在实际上过着被软禁的生活．但他却依然奋力写作，前述Galileo的巨著《关于两门新学科的对话》就在那时期中写出．该书又名《关于两门新科学的探讨和数学证明》，两门新学科指的是材料力学与物体运动理论，该书写成后，被秘密地送到荷兰，并于1638年在荷兰出版．

Galileo在许多科学的领域里都有杰出的贡献，他不仅是杰出的数学家，还是杰出的物理学家和天文学家等等，又被人们称为近代发明之父．而且Morris Kline教授还在《古今数学思想》

[注] 文献[2]曾用超穷分割的观点对此重新解释，并有一系列分析讨论，有兴趣可查阅之。

第16章中指出，虽然Galileo的著作讨论的是科学主题，但至今仍被认为是文学杰作.对于Galileo的上述两部经典著作，Morris Kline说："他写得清楚、直接、机智而又深奥．在这两本书中，Galileo让一个角色提出流行的观点，让另一个角色对他作巧妙而坚定的辩论，指出这些观点的错误和弱点以及新观点的力量．"[3]

关于集合论在Cantor以前的先驱发展，应当特别提到捷克著名数学家Bernard Bolzano(1781—1848).Bolzano不仅对于微积分的严密化作出了杰出贡献，而且正如Morris Kline在《古今数学思想》第41章中所指出的："Bolzano在他的《无穷的悖论》(Paradoxes of the Infinite,1851)一书（该书在他死后三年才出版）中显示了他是第一个朝着建立集合的明确理论的方向采取了积极步骤的人．他维护了实在无穷集合的存在，并且强调了两个集合等价的概念，这就是后来叫做两个集合的元素之间的一一对应关系．这个等价概念，适用于有限集合，同样也适用于无穷集合．他注意到在无穷集合的情形，一个部分或子集可以等价于整体；他并且坚持这个事实必须接受．……对于无穷集合，同样可以指定一种数，叫做超限数，使不同的无穷集合有不同的超限数，虽然Bolzano关于超限数的指定，根据后来Cantor的理论是不正确的．

Bolzano关于无穷的研究，其哲学意义比数学意义更大些，并且没有充分弄清楚后来被称之为集合的势或集合的基数的概念．他同样遇到一些性质在他看来是属于悖论的，这些都在他的书中提到了．他的结论是，对于超限数无需建立运算，所以不用深入研究它们"．[3]

总的说来，大凡在19世纪Cantor以前，对于无限集的认识和研究，一直还是滞留于零碎不全的认识的初级阶段．[1]

§2 古典集合论的创立

19世纪，由于工业科学和自然科学的蓬勃发展，大大推动了微积分的理论与应用性的研究，然而整个18世纪以来，微积分的研究和发展被长期困扰在一种特殊的烦恼之中，这就是一方面是微积分在应用领域中的一个接着一个的光辉发现；另一方面却是微积分基础理论之种种含糊性所导致的矛盾愈来愈尖锐．因而当时的微积分为要弄清无穷小量与无穷级数的本质，而迫切要求奠定其理论基础．再看当时的抽像代数，实际上已经在研究群、环、域等具有特殊结构的无穷集．而且几何学的迅速发展，亦已在力图突破图形的刚体合同观念，而走向开辟点集拓扑的新领域．所以就整个经典数学而言，势必迫切要求去建立一个能以统括各个数学分支、并能建树其上的理论基础．正是在数学发展的这样一个历史背景下，Cantor系统地总结了长期以来的数学的认识与实践，终于在集理论的认识上真正地迈出了划时代的一步，缔造了一门崭新的数学学科——集合论．鉴于集合论的近代和现代发展，通常就把Cantor当时所创立并在Cantor时代发展起来的集合论叫做古典集合论．古典集合论的创立，其最重要的历史性的意义有两点：其一是扩充了数学研究对象；其二是为整个经典数学的各个分支提供了一个共同的理论基础．

具体地说，作为从量的侧面去探索和研究客观世界的一门学问而言，数学并不是一开始就能对所有的量性对象去作数学的考察和处理的，在数学历史的发展中，数学研究对象是在不断的扩充之中逐步丰富起来的．例如，在很长的历史阶段中，数学只能处理静态的量性对象，这就是常量数学的发展和研究．直到18世纪以后，数学才能处理动态的量性对象，这就是从微积分学创立以后的变量数学研究．再例如确定性的经典数学只处理确定性的量性对象，对于随机性的量性对象不作分析研究，而后由于概率论

的诞生和发展，标志着数学研究对象由确定性到随机性的再扩充．那么19世纪Cantor以前的数学，从根本上说只处理有限性的或者至多是潜无限的量性对象，而19世纪Cantor关于古典集合论的创立，实无限量与对象才明确地被引入数学领域，从而标志着数学已进入处理实无限性对象的时代，所以古典集合论实现了数学研究对象从有限与潜无限到实无限的再扩充．这就是Hausdorff所说的："从有限推进到无限，乃是Cantor的不朽功绩．"[4]另一方面，又由于集合论的思想和方法渗透到数学的各个分支中，不仅如此，任何一个数学概念，都能从集合论的概念出发把它定义出来，任何一条数学定理，都能从集合论的思想规定和定理出发把它推导出来，这就是说，整个数学都能在集合论的基础上被推导出来．再则后来关于非欧几何相对相容性证明，最后被归结为集合论的相容性证明．如此，几乎一致公认整个经典数学都可奠定在集合论的基础上，也就是说集合论是整个数学的理论基础．有关数学基础的一系列丰富内容，将在下文继续有所论及，并将在《数学基础引论》一书中作系统的讨论．

G. Cantor，1845年3月3日生于俄国圣彼得堡（今列宁格勒），1918年1月6日于萨克森的哈勒逝世．Cantor的父亲是从丹麦移居俄国的，他的家庭是犹太人的后裔，因而具有丹麦一犹太血统．Cantor的母亲出生于罗马天主教家庭，而父亲全心全意信奉基督教．Cantor 11岁时随父母从俄国移居德国．Cantor早在小学读书的时候，就已表现出数学才能，而父亲则极力主张他去学工程，因而于1863年入柏林大学学工，但很快受到Weierstrass的影响而不顾父亲的反对，终于转向攻读纯粹数学．1867年，Cantor以优异的成绩在柏林大学获得博士学位，他的博士论文是《论Gauss的一个错误》．后于1869年任哈勒大学的讲师．1879年升任教授，并且终于成为德国著名数学家．1874年，也就是他29岁的时候，他在《数学杂志》(Journal für Mathematik)上发表了关于无穷集合论方面的第一篇开创性和奠基性的论文，并

且继续不断地发表有关集合论与超限数方面的论文，直到1897年为止．

由于Cantor的工作直接冲击了许多前人的想法和传统观念，从而遭到了保守思潮的强烈反对，许多反对意见是耸人听闻的．其中以曾经是Cantor的老师，当时数学界的权威教授Kronecker所作的攻击最为激烈和粗暴．他谩骂Cantor是科学的叛徒和骗子．[5] Isaac Asimov曾在他的名著《古今科技名人辞典》中指出："Kronecker还出于同行的妒忌心理，阻碍Cantor的提升，比如说他使Cantor不能得到柏林大学的职位．"[6] 还应指出，Kronecker对Cantor的攻击，不仅粗暴和耸人听闻，而且长达十余年，这样在论战十分紧张的情况下，致使Cantor于1884年精神失常．Cantor的余生，"大都处在一种严重抑郁状态中，"[6] 并且"死在精神病院里．"[6] 更严重的是Kronecker的攻击，致使数学家们对Cantor的工作长时间持有怀疑态度．[3] 在这里，当时的权威Kronecker扮演了一个刽子手的角色．当然，历史地和现代地说，几乎每一个数学新分支的诞生，数学研究对象的每一次再扩充，总要受到传统思想的反对和攻击，只是程度有所不同而已，这几乎是一种规律．即使在人类智慧的未来发展中，仍将如此反复地表演下去．然而，不论传统观念如何反对新思想，随着时间的推移，新思想终究会被人们所理解和接受，Cantor的思想和工作也不例外．"1897年在苏黎世举行的第一次国际数学家会议上，Adolf Hurwitz与Hadamard指出了超限数理论在分析中的重要应用．进一步的应用不久就在测度论与拓扑学方面开展起来．Hilbert在德国传播了Cantor的思想，并在1926年说：'没有人能把我们从Cantor为我们创造的乐园中驱赶出去．'他对Cantor的超限算术赞誉为'数学思想的最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一．'Russell把Cantor的工作描述为'可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作'．"[8]

§3 近代公理集合论的兴起

在数学上，有所谓数学系统的公理化方法，也就是选取少数不加定义的原始概念（基本概念）和无条件承认的互相制约的规定（公理）作为出发点，再以严格的逻辑推演，使某一数学分支成为演绎系统的方法。

"从认识论的角度来看，我们首先主张对任何公理系统的原始概念和公理的选取，必须客观地反映现实对象的本质与关系，就是说应该有它真实的直观背景，而不是凭空臆造．其次，从逻辑的角度来看，则不能认为一些概念和公理的任意罗列就能构成一个合理的公理系统．须知一个有意义的公理系统应当是一个相容的有机整体．一般说来，要求所给公理系统能满足如下三个条件：

（1）相容性：也称为无矛盾性．换句话说，公理的选取不允许出现这种情况：既能证明定理甲成立，又能证明定理甲的反面成立．

（2）独立性：即在所选的公理表中，不允许有一条公理能用其他公理把它推出来．

（3）完备性：即要求能确保从公理系统能推出所研究的数学分支的全部命题，也就是说必要的公理不能少．

至少从理论上讲，对于公理系统的如上要求应该算是正当和自然的．至于某个所论之公理系统是否满足或已否验证满足上述要求，甚至能否在理论上证明满足上述要求的公理系统确实存在等等都是另外一回事．"[1]

公理化方法既是表述与总结科学理论的重要方法之一，同时又是推动和创建新理论的重要方法之一．20世纪以来，公理化方法渗透到数学的许多分支之中．尤其是在现代数理逻辑中，公理化方法已成为最流行的方法．如所知，公理化方法对近代数学发展

所产生的巨大影响，已是举世公认的事实．不仅如此，公理化方法早已超越数学理论范围的应用而进入其他的自然科学领域，如本世纪40年代，Banach完成了理论力学的公理化，物理学家还将相对论表述为公理化体系等等．

一般认为．对于数学系统公理化和公理化方法的历史发展，大致可以划分为公理化方法的产生、公理化方法的完善和公理化方法的形式化这样三个阶段．其中第一阶段是指由Aristotle的完全三段论到Euclid《几何原本》的问世．Aristotle（公元前384—322）是历史上第一个正式给出公理系统的学者，因为他总结了古代积累起来的逻辑知识，并以数学及其他演绎的学科为实例，把完全三段论作为无条件承认的前提或公理，然后从这前提出发推出其他三段论．Euclid正是在深受其影响的情况下，将逻辑的公理演绎方法应用于几何学，才使他完成了《几何原本》的著述．Euclid的《几何原本》当然是数学系统公理化和公理化方法的一个雏型，但它很不完善．公理方法历史发展的第二阶段是指非欧几何的诞生到Hilbert的巨著《几何学基础》一书的问世．Hilbert在《几何学基础》一书中解决了《几何原本》中的不足之处，由此而解决了用公理方法研究几何学的基础问题，成为近代公理化思想方法的代表作．至于公理方法历史发展的第三阶段，那是指Hilbert在他的形式化研究方法，特别是在他的元数学（证明论）中把公理化方法所推向的一个新阶段．[1][7]有关具体内容涉及许多数学基础理论的内容，《数学基础引论》一书中将会有所论及．

Cantor创建古典集合论，只是以素朴的形式陈述他的理论，既没有明确其原始概念，也没有罗列其不证自明的思想规定，所以古典集合论通常被称为素朴集合论．但是，任何一个仅以素朴形式陈述而未经公理化的数学分支，都在本质上依然具有其自身的思想原则和基本概念，只是这些原则和基本概念没有像公理化了的数学分支那样完全明朗化而已．对于Cantor的素朴集合论而言，当然也不例外．我们只要对古典集合论的内容稍加分析和

概括，也就不难看出，“Cantor 当时的几个主要的基本原则或思想方法，不外乎是概括原则、外延原则、一一对应原则、延伸原则、穷竭原则和对角线方法。”[1] 其中以概括原则为核心，这也是 Cantor 创建古典集合论的最重要的思想方法之一．然而，在古典集合论诞生之后，Cantor 首先于 1895 年发现古典集合论内部包含着悖论．所谓悖论，就是一种逻辑矛盾．因而任何一个包含着悖论的理论，也就是一种不能自圆其说的自相矛盾的理论．当时，Cantor 对自己的这一发现没有声张，但在两年后，这同一个悖论又被 Burali-Forti 于 1897 年发现，并且立即公布于世．再过两年，Cantor 于 1899 年又在古典集合论中发现了另一个新的悖论．然而不论如何，人们依然认为这些逻辑矛盾的出现，也许只是涉及到集合论中的一些专门的技术问题，经过适当的调整或修改，问题是可以解决的．然而又过了两年，时尚年轻而后来成为逻辑主义派领袖的 Russell（1872—1970），却在古典集合论中发现了一个十分基本而且直接涉及逻辑理论本身的悖论，即著名的 Russell 悖论，这可惊动了整个学术界．特别是古典集合论作为整个经典数学的基础理论而言，竟是如此矛盾百出，岂不是说，整个经典数学是被奠定在一种自相矛盾的理论基础之上？这尤如一座高楼大厦建筑在一块裂缝甚多的墙基之上，怎能令人心安．数学家和逻辑学家们不能不认真对待集合论的悖论问题．为了在集合论中避免悖论的出现，曾提出几种解决方案的思想和见解，其中之一就导致了近代公理集合论的发展．

M.Kline 教授指出：“数学家们首先是求助于把 Cantor 以相当随便的方式阐述的，现在所谓的素朴集合论加以公理化．几何与数学的公理化解决了这些领域中的逻辑问题，似乎公理化也可能澄清集合论中的困难．这项工作最先由德国数学家 Ernst Zermelo 所承担，他相信悖论起因于 Cantor 对集合的概念未加限制．”[3] 这样，Zermelo 于 1908 年建立了他的集合论公理系统，后来又经 Fraenkel，Von Neumann 和 Skolem 等数学家的几次