材料力学习题题解

上海市业余工业大学力学教研室
上海电视大学
编印

前　　言

本书是 1972 年版 S. Timoshenko 和 J. Gere 合著的《材料力学》(胡人礼译)一书中所附习题的题解. 由于该书内容丰富、阐述系统、深入浅出，深受广大读者的欢迎。该书有六百多题，选材新颖，富有代表性，和正文一起组成一个有机的整体，将传统的材料力学课程内容深化了一大步。由于这些习题涉及面广，部分题目难度又较大，对初学者会有一定的困难。为满足读者的需要，现编写了这本题解，可作为电视大学工科学员学习材料力学的辅助读物，也可作为有关工程技术人员的参考资料。

(一)本书题目部分，照抄中译本，只在少数译文或印刷错误而影响到解题时，参照原著订正。对题目中所引用的正文中的图。本书都已画出，以便阅读。

(二)少数几题的答案和原著中所附答案不同，本书都已在题后作了注释。

(三)编写时对比较复杂的题目，解答过程从详。必要的微分方程、超越方程、高次代数方程等都已解出。有些平时较少用到的数学公式，也都在题后注出。对比较容易的题目则解答过程从简。特别是支座反力、二元和三元的线性代数方程组，原则上直接给出结果。对一些类同的题目，前几题解法从详，其余从简。

由于时间仓促和水平有限，一定会有不少错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

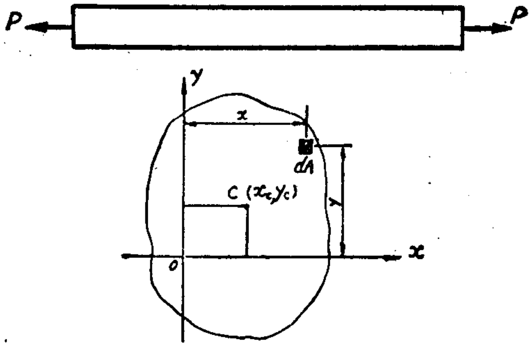
一九七九年十二月

目　　录

第一章　拉伸、压缩和剪切

1·2-1　用静力学证明：棱柱形杆在受拉时(1-1a)，如果整个横截面上应力为均匀分布，那么其横截面上的合力作用线将通过横截面的形心。(提示：假设该杆的横截面为任意形状，在横截面的平面内选择一组轴线，然后得出合力作用时所通过点的坐标表达式。)

解：



在横截面上任取坐标系 Oxy。设横截面面积为 A, $C(x_c、y_c)$ 为其上合力 P 的作用点，因横截面上应力为均匀分布，故合力 $P=\sigma A$。设 dA 为横截面上任取的微小面积，它距 x、y 轴的距离分别为 y、x, dA 上的作用力为 σdA。根据合力矩定理，有

$$\sigma A y_c = \int_A y\sigma dA = \sigma\int_A y dA, \quad y_c = \int_A \frac{ydA}{A}$$

和形心坐标的计算公式比较，可见 y_c 即为横截面形心离 x 轴的

距离。

同理 x_0 即为横截面形心离 y 轴的距离。于是证明了合力作用点 c 就是横截面的形心。

1·2-2 有一截面为矩形(1 吋×2 吋)、长度 $L=12$ 呎的棱柱形杆，承受 20 千磅的轴向拉力。观察出该杆伸长了 0.048 吋。试求算该杆的拉应力和应变。

解:

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{20000}{2}=10000\ \text{磅/吋}^2,$$

$$\varepsilon=\frac{\Delta L}{L}=\frac{0.048}{12\times12}=0.000333$$

1·3-1 有一根长线，在其自重作用下铅直悬挂着。试问如果在下列情况下，不会使它拉断的最大长度是多少：(a)该线为具有极限应力为 300,000 磅/吋² 的钢线；(b)该线为具有极限应力为 50,000 磅/吋² 的铝线(注意：钢的单位重量为 490 磅/呎³，铝为 170 磅/呎³。)

解: 横截面积为 A，单位体积重为 γ，长度为 L 的一段线重为 γAL，由线重引起的应力 σ 为

$$\sigma=\frac{\gamma AL}{A}=\gamma L,\quad L=\frac{\sigma}{\gamma}$$

当 σ 达到极限应力 σ_u 时，L 即为最大长度 L_{max}，于是有

$$L_{max}=\frac{\sigma_u}{\gamma}$$

(a) 对钢线

$$L_{max}=\frac{\sigma_u}{\gamma}=\frac{300000\times144}{490}=88200\ \text{呎}$$

(b) 对铝线

$$L_{max}=\frac{\sigma_u}{\gamma}=\frac{50000\times144}{170}=42400\ \text{呎}$$

1·3-2 有一钢管短段($\sigma_y=40,000$ 磅/吋²)，承受压缩荷载

250 千磅，此时抵抗屈服的安全系数为 1.8，如果管的厚度为其外径的八分之一，试求所需的最小外径 d。

解：$A=\frac{\pi}{4}\left[d^2-\left(\frac{3}{4}d\right)^2\right]=\frac{7}{64}\pi d^2$

$$\frac{P}{A}\leqslant\frac{\sigma_y}{1.8}$$

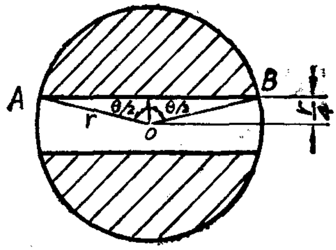
$$\frac{250,000\times64}{7\pi d^2}\leqslant\frac{40,000}{1.8}$$

$$d^2\geqslant\frac{250,000\times64\times1.8}{7\pi\times40,000}=32.74\text{ 吋}^2$$

$$d\geqslant5.72\text{ 吋}$$

即最小外径 d 为 5.72 吋。

1·3-3 有一圆形截面的实心杆（直径 $d=1.5$ 吋），带有通过杆中心顺侧向钻成的小孔，孔的直径为 $d/4$。假设在该孔处杆的净横截面上（见图）的容许拉应力 $\sigma_w=10,000$ 磅/吋^2，试求杆在受拉时所能承受的容许荷载 P。



解：设 r 为圆杆的半径。圆心角为 θ 的扇形部分面积 A_1 为

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{r/4}{r}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{\theta}{2}=75.5°,\ \theta=151°$$

$$A_1=\frac{\pi(1.5)^2}{4}\ \frac{151}{360}=0.7412\text{ 吋}^2$$

三角形 OAB 的面积 A_2 为

$$A_2=\frac{1}{2}\left[2\times\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{4}\right)^2}\right]\frac{r}{4}=\frac{1}{2}\left(2\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times0.75\right)\frac{0.75}{4}$$

$$=0.1362\text{ 吋}^2$$

净面积 A，即为

$$A=2(A_1-A_2)=1.21\text{ 吋}^2$$

所以杆在受拉时所能承受的容许荷载 P 为

$$P=\sigma_w A=10000\times1.21=12100\text{ 磅}$$

1·3-4 有 AB 和 BC 两杆(见图) 支承竖直荷载 P。这两杆由同一种材料构成,水平杆 BC 的长度 L 保持常数。可是,θ 角随 A 点沿竖直方向移动而变化,AB 的长度随 A 的新的位置而定。假设受拉时的容许应力与受压时相同,还假设这两根杆受力均完全达到容许应力值,试求该结构具有最小重量时的 θ 角。

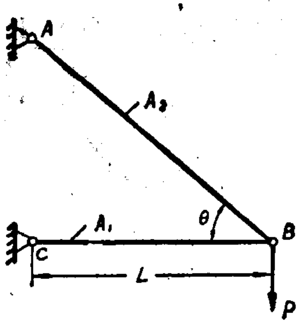
解: 因 BC 杆长 L,所以 AB 杆长为 $L/\cos\theta$。由节点 B 的平衡可得

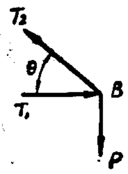
$$T_1=P\cot\theta,\ T_2=\frac{P}{\sin\theta}$$

设结构总重量为 W,则有

$$W=\overline{BC}\cdot A_1+\overline{AB}\cdot A_2$$

$$=L\frac{T_1}{\sigma_w}+\frac{L}{\cos\theta}\frac{T_2}{\sigma_w}=\frac{PL}{\sigma_w}\left(\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$





要求结构重量 W 最小,故需先求 $dW/d\theta$

$$\frac{dW}{d\theta}=\frac{PL}{\sigma_w}\times\left(\frac{-2\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)$$

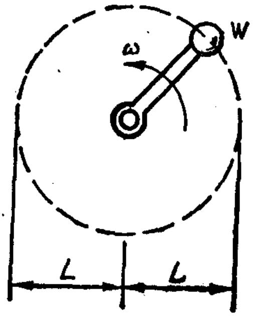
再令 $dW/d\theta=0$,来解出 θ

$$-2\cos^2\theta+\sin^2\theta=0,\ \operatorname{tg}\theta=\sqrt{2}$$

$$\theta=54°44'$$

1·3-5 有一荷重 W 附于细长臂(长度为 L)上,此臂在光滑面上于水平面内绕竖直轴旋转

(见图)。臂和重量以等角速度 ω 旋转。臂的重量略去不计。如果容许应力为 σ_w, 试导出该臂所需要的横截面积的公式。



解: 荷重 W 引起的离心力为 $WL\omega^2/g$, 引起的应力为 $\sigma=WL\omega^2/gA$, 其中 A 为横截面面积。当 σ 达到 σ_w 时, 所需的横截面积 A 的公式为

$$A=\frac{WL\omega^2}{g\sigma_w}$$

1·3-6 如果考虑臂的重量, 试解上一习题(假设 γ 为臂的材料的单位体积重量)。

解: 靠近旋转轴处臂最危险, 该处所受的力为

$$\frac{WL\omega^2}{g}+\frac{\gamma LA}{g}\left(\frac{L}{2}\omega^2\right)$$

极限状态时该力应该等于 $\sigma_w A$, 所以有

$$\frac{WL\omega^2}{g}+\frac{\gamma LA}{g}\left(\frac{L}{2}\omega^2\right)=\sigma_w A$$

解出 A, 即得

$$A=\frac{2WL\omega^2}{2g\sigma_w-L^2\omega^2\gamma}$$

1·4-1 有一直径为 2 吋的钢螺栓 ($E=30\times10^6$ 磅/吋^2) 必须承受 60,000 磅拉伸荷载。如果螺栓受力部分的初始长度为 21.75 吋, 问它的最后长度是多少?

解: $\Delta L=\dfrac{LP}{EA}=\dfrac{21.75\times60,000}{30\times10^6\times\pi\times1^2}=0.0138$ 吋

最后长度为

$$L+\Delta L=21.75+0.0138=21.764\text{ 吋}$$

1·4-2 有一圆钢杆 ($E=30\times10^6$ 磅/吋^2), 长 20 呎, 必须承受 1600 磅拉伸荷载。如果杆的容许应力为 18,000 磅/吋^2, 且

其端点容许变位为0.1吋，试问该杆所需最小直径为多少？

解：按强度计算

$$\sigma_w=\frac{P}{A},\ d^2=\frac{4P}{\pi\sigma_w}=\frac{4\times1600}{\pi\times18000}=0.113\text{ 吋}^2,\ d=0.336\text{ 吋}$$

按变形计算

$$\Delta L=\frac{PL}{EA},\ d^2=\frac{4PL}{\pi E\Delta L}=\frac{4\times1600\times20\times12}{\pi\times30\times10^6\times0.1}=0.163\text{ 吋}^2$$

$$d=0.404\text{ 吋}$$

该杆的最小直径应取 $d=0.404$ 吋。

1·4-3 有一钢管构成的拉杆 ($E=30\times10^6$ 磅/吋^2，$\nu=0.30$)，其外径为3.5吋，横截面积为2.228吋^2。试问多大的轴向力 P 将使其直径减小0.000471吋？

解：纵向应变 $\varepsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{P}{EA}$，侧向应变 $\nu\varepsilon=\frac{\Delta d}{d}$，因此有

$$\frac{\nu P}{EA}=\frac{\Delta d}{d}$$

$$P=\frac{EA}{\nu}\frac{\Delta d}{d}=\frac{30\times10^6\times2.228\times0.000471}{0.30\times3.5}=30000\text{ 磅}$$

1·4-4 有一直径为2.25吋的实心圆杆，受到45,000磅轴向力的压缩。(a)假设 $E=12.5\times10^6$ 磅/吋^2，$\nu=0.30$，试求该杆直径的增大值 Δd。(b)如果其长度为15吋，试求该杆体积的增大值。

解：(a)求该杆直径的增大值 Δd

$$\Delta d=\nu d\varepsilon=\nu d\frac{P}{EA}=0.30\times2.25\frac{45000\times4}{\pi(2.25)^2\times12.5\times10^6}$$

$$=0.00061\text{ 吋}$$

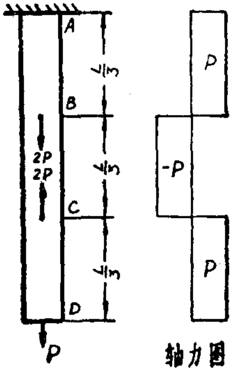
(b)求该杆的体积增大值 ΔV

$$\Delta V=V\varepsilon(1-2\nu)=AL\frac{P}{EA}(1-2\nu)=\frac{PL}{E}(1-2\nu)$$

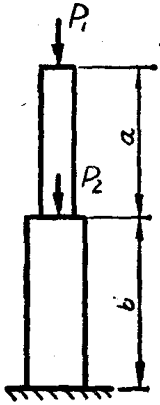
$$=\frac{45000\times15}{12.5\times10^6}(1-2\times0.30)=0.0216\text{ 吋}^3$$

1·5-1 图(1-7)所示承受荷载的杆，具有均匀的横截面积 A，其弹性模量为 E。试求该杆下端变形 δ 的公式。该杆是伸长还是缩短？

解：$\delta=\dfrac{PL}{3EA}-\dfrac{PL}{3EA}+\dfrac{PL}{3EA}=\dfrac{PL}{3EA}$（伸长）



习题1.5-1图



习题1.5-2图

1·5-2 图(1-8)所示的轴架承受荷载 $P_1=130$ 千磅，$P_2=150$ 千磅。其上面部分的长度 $a=2$ 呎，截面为方形，其边长为3吋。下面部分的长度 $b=2.5$ 呎，截面也为方形，边长为5吋。假设 $E=29\times10^6$ 磅/吋^2，试求：(a)轴架顶面的变位，(b)上面部分轴向应变与下面部分轴向应变之比值。

解：(a)求轴架顶面变位 δ

$$\delta=\frac{130000\times2\times12}{29\times10^6\times3^2}+\frac{(130000+150000)\times2.5\times12}{29\times10^6\times5^2}$$

$$=0.01195+0.01158=0.0235\text{ 吋}$$

(b)求上下部分应变之比值

$$\frac{\frac{0.01195}{2\times12}}{\frac{0.01158}{2.5\times12}}=1.29$$

1·5-3 有一长度为10呎的钢杆，具有圆形截面，在一半长度上直径 $d_1=0.75$ 吋，另一半长度上直径 $d_2=0.5$ 吋。(a)试问此杆在拉伸荷载 $P=5000$ 磅作用下将有多大的伸长量？(b)如果同样体积的材料锻成长度为10呎、直径 d 为常数的杆件，试问在同样荷载下，将伸长多少？(假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2)

解： (a) $\delta=\frac{PL/2}{E}\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)$

$$=\frac{5000\times5\times12}{30\times10^6}\left[\frac{4}{\pi(0.75)^2}+\frac{4}{\pi(0.5)^2}\right]$$

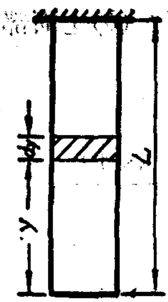
$=0.0736$ 吋

(b) $\frac{\pi d^2}{4}\cdot L=\frac{\pi d_1^2}{4}\frac{L}{2}+\frac{\pi d_2^2}{4}\frac{L}{2}$

$$\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi d_1^2}{8}+\frac{\pi d_2^2}{8}=\frac{\pi}{8}(d_1^2+d_2^2)$$

$$\delta=\frac{5000\times10\times12}{30\times10^6\times\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{5000\times10\times12\times8}{30\times10^6\times\pi(0.75^2+0.5^2)}$$

$=0.0627$ 吋



1·5-4 试导出长度为 L、横截面积为 A 的棱柱形杆在竖直悬挂时由于自重作用下总伸长量的公式(假设 $W=$ 杆的总重量)。

解： 设单位体积的重量为 γ。杆中距下端 y 处的一段长为 dy 的杆的伸长为

$$\frac{(\gamma yA)dy}{EA}$$

全杆总伸长 δ 为

$$\delta=\int_0^L \frac{\gamma y A}{EA}dy=\frac{\gamma A}{EA}\frac{L^2}{2}=\frac{(\gamma AL)L}{2EA}=\frac{WL}{2EA}$$

1·5-5 有一均匀钢杆置于水平面上时长度为 200 吋，试确定当将其一端竖直悬挂时它的伸长值（假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2，单位体积的重量 $\gamma=0.283$ 磅/吋^3）。

解：利用上题结果，得

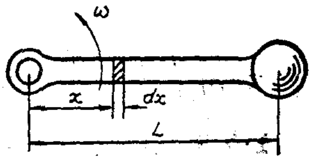
$$\delta=\frac{\gamma L^2}{2E}=\frac{0.283\times(200)^2}{2\times30\times10^6}=0.000189\text{ 吋}$$

1·5-6 试确定棱柱形杆在竖直悬挂时由于自重使体积增大的量 ΔV（假设 W＝杆的总重量，L＝杆的长度，ν＝泊松比，E＝弹性模量）。

解：$\Delta V=V\varepsilon(1-2\nu)=AL\dfrac{\delta}{L}(1-2\nu)$

$$=A\frac{WL}{2EA}(1-2\nu)=\frac{WL}{2E}(1-2\nu)$$

1·5-7 有一杆长 L，以角速度 ω 绕竖直轴（见习题 1·3-5 中的图）在水平面内转动。杆的横截面积为 A，重量为 W_1。有一重量 W 附于杆的端头。试求由于离心效应使杆产生的伸长量 δ。



解：由于水平杆质量的惯性力引起的伸长为 δ_1

$$\delta_1=\int_0^L\left(\frac{\gamma A\,dx}{g}\right)(x\omega^2)\frac{x}{EA}$$

$$=\frac{A\gamma\omega^2}{AgE}\int_0^L x^2dx=\frac{A\gamma\omega^2L^3}{3AgE}=\frac{W_1\omega^2L^2}{3gAE}$$

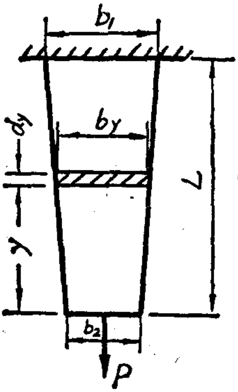
由于质量 $\dfrac{W}{g}$ 的惯性力引起的伸长为 δ_2

$$\delta_2=\left(\frac{L\omega^2W}{g}\right)\frac{L}{EA}=\frac{W\omega^2L^2}{gAE}$$

总伸长量 δ，有

$$\delta=\delta_1+\delta_2=\frac{\omega^2L^2}{3gAE}(W_1+3W)$$

1·5-8 有一截面为矩形且厚度 t 为不变的锥形杆，承受力为 P，如图所示。杆的宽度在支点处为 b_1，按直线变至自由端处为 b_2. 试导出由于力 P 使杆产生的伸长量 δ 的公式。



解： 由图可见

$$b_y=b_2+\frac{b_1-b_2}{L}y$$

dy 段的伸长为

$$\frac{P}{Et}\frac{dy}{b_2+\dfrac{b_1-b_2}{L}y}$$

总伸长 δ 为

$$\delta=\int_0^L\frac{P}{Et}\frac{dy}{b_2+\dfrac{b_1-b_2}{L}y}=\frac{P}{Et}\int_0^L\frac{dy}{b_2+\dfrac{b_1-b_2}{L}y}$$

$$=\frac{PL}{Et(b_1-b_2)}\left[\ln\left(b_2+\frac{b_1-b_2}{L}y\right)\right]_0^L=\frac{PL}{Et(b_1-b_2)}\ln\frac{b_1}{b_2}$$

1·5-9 试导出上一习题中杆的体积增量 ΔV 的公式。

解： $\Delta V=\int_0^L(tb_ydy)\dfrac{P}{tb_yE}(1-2\nu)=\dfrac{PL}{E}(1-2\nu)$

1·5-10 有一长度 $L=10$ 呎的圆截面锥形钢杆 ($E=30\times 10^6$ 磅/吋^2)，承受拉力 $P=10,000$ 磅。杆的较大端直径 $d_1=2$ 吋，较小端 $d_2=1$ 吋。试问由于力 P 作用使该杆产生的伸长量为多少？

解： 设离杆小端距离为 y 处的小段杆长 dy，直径为 d_y，有

$$d_y=d_2+\frac{d_1-d_2}{L}y$$

杆的总伸长 δ 为各微段伸长之总和，有

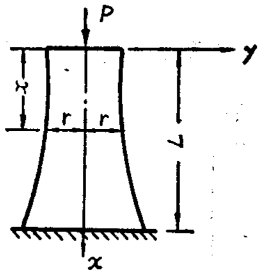
$$\delta=\int_0^L\frac{4Pdy}{E\pi d_y^2}=\frac{4P}{E\pi}\int_0^L\frac{dy}{\left(d_2+\frac{d_1-d_2}{L}y\right)^2}$$

$$=-\frac{4PL}{E\pi(d_1-d_2)}\left[\left(d_2+\frac{d_1-d_2}{L}y\right)^{-1}\right]_0^L$$

$$=-\frac{4PL}{E\pi(d_1-d_2)}\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right)=\frac{4PL}{E\pi d_1d_2}$$

$$=\frac{4\times10000\times10\times12}{30\times10^6\times\pi\times1\times2}=0.0255\text{ 吋}$$

1·5-11 试导出圆墩的体积为最小时决定其半径 r 的方程(见图)。墩承受加在顶面上的力 P，再加上墩身的自重。墩身材料的单位重量为 γ，容许压应力为 σ_w。还要确定墩的顶面和底面横截面积以及墩身的体积。(提示：考虑长度为 dx 的微元。因为所有横截面上的应力必须相同，且等于 σ_w，该微元的顶面和底面截面面积之差 dA 必须补偿其压力差，此压力差等于微元自身的重量。因此 $\sigma_w dA=\gamma Adx$ 或 $dA/A=\gamma dx/\sigma_w$。将此方程的两边进行积分得出其解。)



解： 从提示中的式子两边直接积分

$$dx=\frac{\sigma_w}{\gamma}\frac{dA}{A}$$

$$x=\frac{\sigma_w}{\gamma}(\ln A-\ln C)=\frac{\sigma_w}{\gamma}\ln\frac{A}{C}$$

$$A=Ce^{\gamma x/\sigma_w}$$

其中 C 为积分常数。设顶面面积为 A_0，则 $P/A_0=\sigma_w$，即 $A_0=$

P/σ_ω。当 $x=0$ 时，$A=A_0$，代入 A 的表示式，可得

$$C=A_0=\frac{P}{\sigma_\omega},\quad A=\frac{P}{\sigma_\omega}e^{\gamma x/\sigma_\omega}$$

设底面面积为 A_0'。当 $x=L$ 时，$A=A_0'$，所以有

$$A_0'=\frac{P}{\sigma_w}e^{\gamma L/\sigma_\omega}$$

因为 $A=\pi r^2$，所以墩身半径 r 的方程为

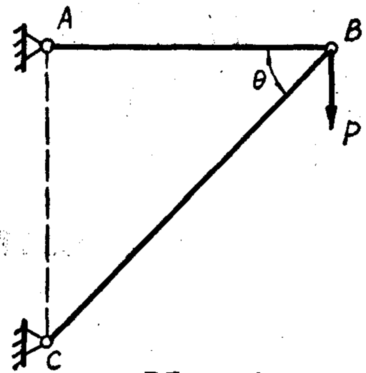
$$r=\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2}=\left(\frac{P}{\pi\sigma_w}e^{\gamma x/\sigma_\omega}\right)^{1/2}$$

墩身体积 V 为

$$V=\int_0^L Adx=\int_0^L\frac{P}{\sigma_w}e^{\gamma x/\sigma_\omega}dx=\frac{P}{\gamma}e^{\gamma x/\sigma_\omega}\Big|_0^L$$

$$=\frac{P}{\gamma}(e^{\gamma L/\sigma_\omega}-1)$$

1·5-12 如果图1-10*a* 内桁架中的 *AB* 杆为长度等于3呎，直径等于0.125 吋的钢线 ($E_s=30\times10^6$ 磅/吋^2)，*BC* 杆为长度等于5呎，具有边宽等于1吋的方形截面的木撑($E_w=1.5\times10^6$磅/吋^2)，$P=400$ 磅，试确定节点*B*处位移的水平分量和竖直分量。



解：应用 *P*.14 (中译本) 上的公式。

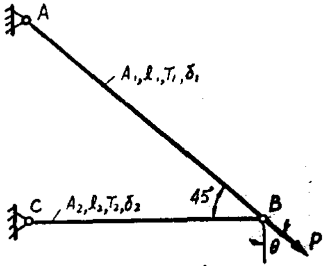
$$\delta_{ab}=\frac{PL_{ab}\cot\theta}{E_sA_{ab}}=\frac{400\times3\times12\times0.75}{30\times10^6\times\frac{\pi\times0.125^2}{4}}=0.0293\text{ 吋}$$

$$\delta_{bc}=\frac{PL_{bc}\csc\theta}{E_wA_{bc}}=\frac{400\times5\times12\times1.25}{1.5\times10^6\times1^2}=0.02\text{ 吋}$$

$$\delta_{水平}=\delta_{ab}=0.0293\text{ 吋}$$

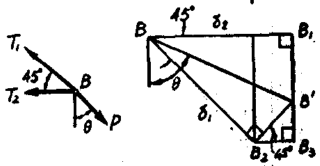
$$\delta_{垂直}=\delta_{bc}\csc\theta+\delta_{ab}\cot\theta=0.02\times1.25+0.0293\times0.75$$
$$=0.047 \text{ 吋}$$

1·5-13 图中所示桁架 ABC 在节点 B 处承受力 P 作用，该力与竖直线成 θ 角。AB 与 BC 杆的横截面积分别为 A_1 和 A_2。试求使节点 B 的挠度与力 P 的方向相同时的 θ 角。



解：$l_1\cos45°=l_2$，$l_2=\dfrac{l_1}{\sqrt{2}}$

$$P\cos\theta=T_1\sin45°$$
$$T_1=\sqrt{2}\ P\cos\theta$$
$$T_1\cos45°+T_2-P\sin\theta=0$$
$$T_2=P(\sin\theta-\cos\theta)$$
$$\delta_1=\frac{T_1l_1}{EA_1}=\frac{\sqrt{2}\,P\cos\theta\cdot l_1}{EA_1}$$
$$\delta_2=\frac{T_2l_2}{EA_2}=\frac{P(\sin\theta-\cos\theta)\cdot l_1}{EA_2\sqrt{2}}$$



节点 B 变形后的位置为 B'，其水平位移 $\overline{BB_1}=\delta_2$，而垂直位移 $\overline{B_1B'}$ 为

$$\overline{B_1B'}=\overline{B_1B_3}-\overline{B'B_3}=\delta_1\sin45°-\overline{B_2B_3}$$
$$=\delta_1\sin45°-(\delta_2-\delta_1\cos45°)=\sqrt{2}\ \delta_1-\delta_2$$

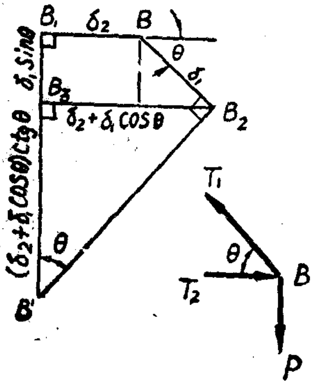
题意要求节点 B 的挠度与力 P 的方向有相同的 θ 角，即

$$\cot\theta=\frac{\overline{B_1B'}}{\overline{BB_1}}=\frac{\sqrt{2}\ \delta_1-\delta_2}{\delta_2}=\sqrt{2}\ \frac{\delta_1}{\delta_2}-1$$
$$=\frac{2\sqrt{2}\ A_2}{A_1}\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-1$$
$$(1+\cot\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=2\sqrt{2}\ \frac{A_2}{A_1}\cos\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{2}\ \frac{A_2}{A_1}$$

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=-\sqrt{2}\ \frac{A_2}{A_1}$$

$$\cot 2\theta=-\sqrt{2}\ \frac{A_2}{A_1}$$

1·5-14 习题1·3-4中图示桁架 ABC 由长度为 L, 截面积为4.0吋^{2}的水平钢杆和面积为0.5吋^{2}的钢连接杆所构成。其角度 θ 可借改变连接杆的长度和支点 A 的竖向位置(长度 L 不变)调到所需要的值。试确定在荷载 P 作用下使节点 B 的竖直变位为最小时的 θ 角。



解: 设 AB 杆长 L_1, 随 θ 的变化而变化, 横截面积 A_1, 轴向拉力 T_1, 拉伸变形 δ_1; BC 杆长 L (定值), 横截面积 A_2, 轴向压力 T_2, 压缩变形 δ_2。有

$$L_1\cos\theta=L,\quad L_1=\frac{L}{\cos\theta}$$

$$T_1\sin\theta=P,\quad T_1=\frac{P}{\sin\theta}$$

$$T_1\cos\theta=T_2,\ T_2=\frac{P\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\delta_1=\frac{T_1L_1}{EA_1}=\frac{PL}{\sin\theta\cos\theta\cdot EA_1}$$

$$\delta_2=\frac{T_2L}{EA_2}=\frac{PL\cos\theta}{\sin\theta\cdot EA_2}$$

由放大的节点 B 的位移图上可见, 其竖直位移 $\overline{B_1B'}$ 为

$$\overline{B_1B'}=\delta_1\sin\theta+(\delta_2+\delta_1\cos\theta)\cot\theta=\frac{\delta_1}{\sin\theta}+\frac{\delta_2\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{PL}{E}\left(\frac{1}{\sin^2\theta\cos\theta\cdot A_1}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cdot A_2}\right)$$

$$=\frac{PL}{4E}\left(\frac{8}{\sin^2\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$