有限群讲义

下册

徐明曜编

唐山教育学院
唐山职业大学 翻印

下册目录

第六章　可解群

§1．π－可分群、π－可解群和可解群

设π是一个素数集合，π′是π在全体素数集合中的补集。若π只由一个素数p组成，我们把$\{p\}$和$\{p\}'$简记作p和p'。

1．1．定义．称有限群G为π－群，如果$|G|$的每个素因子均在π中，亦即$|G|_\pi=|G|$。对于$\pi=\{p\}$，π－群即以前定义的p－群．

又称元素$x\in G$为π－元素，如果$\langle x\rangle$是G的π－子群．同样地，对于$\pi=\{p\}$，π－元素即以前定义的p－元素．

1．2．引理．设M，N是G的正规π－子群，则$\langle M,N\rangle=MN$亦然．

证．显然$MN\lhd G$．又因为$|MN|=\dfrac{|M||N|}{|M\cap N|}$，由$M$，$N$是π－子群得知$M\cap N$是π－子群，因而$|MN|$的素因子全在π中．故$MN$是π－子群．　//

由此引理，G的所有π－正规子群生成的子群仍为G的π－正规子群，记作$O_\pi(G)$．它是G中最大的π－正规子群，也是G的特征子群．

1．3．引理．　$O_\pi(G/O_\pi(G))=1$．

证．$G/O_\pi(G)$ 的 π－正规子群在自然同态 $G\to G/O_\pi(G)$ 下的原象仍为 G 的 π－正规子群，故得结论． //

1．4．定义．称有限群 G 为 π－可分群，如果存在 G 的一个正规群列

$$G=N_0\geqq N_1\geqq N_2\geqq\cdots\geqq N_r=1 \qquad (6.1)$$

使 N_i/N_{i+1} 为 π－群或 π'－群．$i=0,1,\cdots,r-1$．

而称 G 为 π－可解群，如果 G 存在正规群列（6.1），使 N_i/N_{i+1} 为 π'－群或 p－群，其中 $p\in\pi$，$i=0,1,\cdots,r-1$．

明显的，G 是 π－可分群等价于 G 是 π'－可分群，但对 π－可解群，则没有这样的对称性．

另一方面，根据 Feit－Thompson 定理，若 $2\notin\pi$，则 π－可分群即 π－可解群．又，对任意的素数 p，p－可分群和 p－可解群这两个概念也是一致的．

1．5．定理．设 G 是 π－可分群（或 π－可解群），则

1）G 的每个子群是 π－可分群（或 π－可解群）；

2）G 的每个商群是 π－可分群（或 π－可解群）；

3）G 的极小正规子群是 π'－群或 π－群（或者 π'－群或 p－群，其中 $p\in\pi$）；

4）对任意的 $N\trianglelefteq G$，有 $O_{\pi'}(G/N)\neq 1$ 或 $O_\pi(G/N)\neq$（或者 $O_{\pi'}(G/N)\neq 1$ 或 $O_p(G/N)\neq 1$，其中 $p\in\pi$）.

证．我们只对π－可分群来证明上述结论．

因为G π－可分，G有正规群列

$$G = N_0 \geqq N_1 \geqq \cdots \geqq N_r = 1,$$

其中每个N_i/N_{i+1}是π－群或π'－群．

1）若$H \leqq G$，则

$$H = H\cap N_0 \geqq H\cap N_1 \geqq \cdots \geqq H\cap N_r = 1$$

是H的正规群列．并且

$$H\cap N_i/H\cap N_{i+1} = H\cap N_i/(H\cap N_i)\cap N_{i+1}$$

$$\cong (H\cap N_i)N_{i+1}/N_{i+1}$$

是N_i/N_{i+1}的子群．故其为π－群π'－群．

2）若$H \lhd G$，则

$$G/H = N_0H/H \geqq N_1H/H \geqq \cdots \geqq N_rH/H = 1$$

是G／H的正规群列．并且

$$N_iH/H/N_{i+1}H/H \cong N_iH/N_{i+1}H$$

$$\cong N_i/N_i\cap N_{i+1}H$$

是N_i/N_{i+1}的商群．故其为π－群或π'群．

3）由π－可分性的定义，G的所有主因子都是π－群或π'－群．于是每个极小正规子群亦为π－群或π'－群．

4）因为G／N是π－可分群，取G／N的一个极小正规子群M／N，则必为π－群或π'－群。因此，或者$O_\pi(G/N) \neq 1$，或者$O_{\pi'}(G/N) \neq 1$ //

1．6．定理．由下列条件之一即可推出 G 是 π－可分群（或 π－可解群）．

1）存在 G 的 π－可分（π－可解）正规子群 N，使 G/N 为 π－可分（π－可解）群；

2）对任意的 $N \lneq G$，G/N 的极小正规子群均为 π－群（p－群，$p \in \pi$）或 π'－群；

3）对任意的 $N \lneq G$，或者 $O_\pi(G/N) \neq 1$，（$O_p(G/N) \neq 1$，$p \in \pi$），或者 $O_{\pi'}(G/N) \neq 1$．

证．我们也只对 π－可分群来证明这个定理．

1）由定义显然．

2）对 $|G|$ 用归纳法．设 K 是 G 的极小正规子群，则 K 是 π－群或 π'－群，并且定理条件对 G/K 亦满足．因为 $|G/K| < |G|$，由归纳假设得 G/K 是 π－可分群．由 1）又得 G 的 π－可分性．

3）对 $|G|$ 用归纳法．由条件先有 $O_\pi(G) \neq 1$ 或 $O_{\pi'}(G) \neq 1$．不妨设 $O_\pi(G) \neq 1$，则 $G/O_\pi(G)$ 亦满足定理条件，并且 $|G/O_\pi(G)| < |G|$．由归纳假设，$G/O_\pi(G)$ π－可分，由 1）又得 G 的 π－可分性．　//

对于任意群 G，我们以 $O_{\pi\pi'}(G)$ 表 $O_{\pi'}(G/O_\pi(G))$ 在 G 中的原象．同样的，以 $O_{\pi\pi'\pi}(G)$ 表 $O_\pi(G/O_{\pi\pi'}(G))$ 在

G中的原象，依此类推．如果G是π－可分群，则群列

$$1 \leqq O_{\pi}(G) \leqq O_{\pi\pi'}(G) \leqq O_{\pi\pi'\pi}(G) \leqq \cdots$$

必终止于G．这样，对π－可分群还可从得到一个其商群为π－群或π'－群的特征群列．

下面继续研究可解群．在Ⅰ§4中定义了可解群，并证明了它的一些简单性质．后来，在Ⅲ§1中又证明了G可解$\Longleftrightarrow$G的合成因子皆为素数阶循环群，从而G的主因子对某个素数p必为初等交换p－群．下面我们再证明

1．7．定理．设G是有限群，则下述事项等价：

1） G可解；

2） 对每个素数集合π，G都是π－可分群（或π－可解群）；

3） 对每个素数p，G都是p－可解群；

4） 对任意的$N \subsetneqq G$，存在素数p使$O_p(G/N) \neq 1$；

5） 对任意的$N \subsetneqq G$，存在G/N的特征子群K/N，使K/N是初等交换p－群．

证．1）$\Rightarrow$2）：任给G的主群列，因G可解，每个主因子皆为初等交换p－群．故对任一素数集合π，G是π－可分的，也是π－可解的．

2）$\Rightarrow$3）：显然．

3）$\Rightarrow$4）：设M/N是G/N的使$|M/N|$的素因子

个数最少的极小正规子群，则必有 $\pi=\{p\}$．若否，又有 $q\neq p$，$q\in\pi$，则由 M/N 的 p－可解性，有 $O_p(M/N)\neq 1$ 或 $O_{p'}(M/N)\neq 1$．这两个群都是 M/N 的特征子群，因而是 G/N 的正规子群，但它的阶的素因子个数 $<|\pi|$，与 M/N 的取法矛盾．

4）⇒ 5）：由 4）可假定对某个素数 p，有 $O_p(M/N)\neq 1$．令 $U/N=\Omega_1(Z(O_p(G/N)))\neq 1$，即满足要求．

5）⇒ 1）：由 5），G 存在正规群列，使每个商群为初等交换 p－群，于是 G 可解．//

§2. π－Hall 子群

根据 Sylow 定理，对于任一素数 p，有限群 G 的极大 p－子群都是 p－Hall 子群（参看Ⅲ§4），并且任二 p－Hall 子群是共轭的．但如果把 $\{p\}$ 换成任一素数集合 π，则类似命题一般并不正确．譬如设 $G=A_5$，$\pi=\{3,5\}$，则 G 中不存在 π－Hall 子群．（若存在 π－Hall 子群，则它应为 15 阶．但由Ⅱ，4.7 的证明知 A_5 中没有 15 阶子群．）又设 $\pi=\{2,3\}$，则 A_5 中 6 阶子群 $\langle(123),(12)(45)\rangle$ 是极大 π－子群，但不是 π－Hall 子群．最后设 $G=GL(3,2)=PSL(3,2)$ 是 168 阶单群．把 G 看作 8 阶初等交换 2－群

A的自同构群，则G传递地变换A的7个2阶子群，也传递地变换G的7个4阶子群，于是G关于某个2阶子群和某个4阶子群的稳定子群是G的两个不共轭的{2，3}－Hall子群．

但是，对于π－可分群，我们有

2．1．定理．设G是π－可分群，则

1） G的π－Hall子群和π′－Hall子群总是存在的．

2） 只要G的所有π－Hall子群或所有π′－Hall子群是可解的，则G的所有π－Hall子群共轭，并且G的所有π′－Hall子群也共轭．

3） 在2）的假定下，G的任一π－子群都包含在某一π－Hall子群之中，并且对π′－子群也有类似结论．

证．1）由Gπ－可分，或者$O_\pi(G)\neq 1$，或者$O_{\pi'}(G)\neq 1$．因为π－可分性和π′－可分性等价，故不失普遍性可令$O_\pi(G)\neq 1$．考虑$\overline{G}=G/O_\pi(G)$．用归纳法，可假定$\overline{G}$存在π－Hall子群$H/O_\pi(G)$和π′－Hall子群$U/O_\pi(G)$．这时H即为G的π－Hall子群． 再应用Schur－Zassenhaus定理，U中存在π′－Hall子群K，比较阶知K就是G的π′－Hall子群．

2）和1）相同可设$O_\pi(G)\neq 1$， 考虑$\overline{G}=G/O_\pi(G)$．由于$\overline{G}$的π－Hall子群和π′－Hall子群同构于G的相应子群的同态象，故定理的条件对$\overline{G}$也成立．于是用归纳法可假定$\overline{G}$的

所有π-Hall子群和π'-Hall子群彼此共轭．这立即推出G的π-Hall子群彼此共轭．而对G的任意的两个π'-Hall子群K_1，K_2有$\bar{K}_1=K_1O_\pi(G)/O_\pi(G)$和$\bar{K}_2=K_2O_\pi(G)/O_\pi(G)$是$\bar{G}$的$\pi'$-Hall子群．由$\bar{K}_1$和$\bar{K}_2$共轭，存在$g\in G$使$K_1^gO_\pi(G)=K_2O_\pi(G)=M$．因为$K_1^g$，$K_2$是M的$\pi'$-Hall子群，据Schur-Zassenhaus定理得K_1^g和K_2在M中共轭．于是K_1和K_2在G中共轭．

3）由π-可分性和π'-可分性等价，只须对π-子群证明定理的结论．用对$|G|$的归纳法．设K是G的任一π-子群．由G的π-可分性，有$O_\pi(G)\neq 1$或$O_{\pi'}(G)\neq 1$．分以下两种情形：

(i) 若$O_\pi(G)\neq 1$．考虑$G/O_\pi(G)=\bar{G}$．由归纳假设，$\bar{G}$的π-子群$KO_\pi(G)/O_\pi(G)$含于某个π-Hall子群$H/O_\pi(G)$中．于是$KO_\pi(G)\leq H$，$K\leq H$．因为H也是G的π-Hall子群，定理得证．

(ii) 若$O_{\pi'}(G)\neq 1$．考虑$\bar{G}=G/O_{\pi'}(G)$．由归纳假设，$\bar{G}$的π-子群$KO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$含于$\bar{G}$的某个π-Hall子群$M/O_{\pi'}(G)$中．于是$KO_{\pi'}(G)\leq M$．若$M<G$，由归纳假设，K含于M的某个π-Hall子群H中，比较阶知H亦为G之π-Hall子群，定理得证．而若$M=G$，对于G之任一π-Hall子群H，令$K_1=KO_{\pi'}(G)\cap H$．由$G=O_{\pi'}(G)\cdot H$

$=KO_{\pi'}(G)\cdot H$，故

$$|G|=\frac{|K||O_{\pi'}(G)||H|}{|KO_{\pi'}(G)\cap H|}=\frac{|K||G|}{|K_1|}$$

于是$|K_1|=|K|$．这说明K和K_1是$KO_{\pi'}(G)$的两个π-Hall子群．由Schur-Zassenhaus定理，存在$x\in KO_{\pi'}(G)$使$K^x=K_1=KO_{\pi'}(G)\cap H$，于是$K^x\le H$，$K\le H^{x^{-1}}$，定理得证．//

由本章末第4题，定理2.1可以改述为

2．1′．定理．

1）设G是π-可分群，则G中存在π-Hall子群和π'-Hall子群；

2）设G是π-可解群，则G的所有π-Hall子群共轭，并且G的所有π'-Hall子群也共轭；

3）设G是π-可解群，则G的任一π-子群包含在某一π-Hall子群之中，并且对π'-子群也有类似结论．

2．2．推论．（P. Hall）设G可解，则对任一素数集合π，G中π-Hall子群存在并彼此共轭，且任一π-子群含于某一π-Hall子群之中．

证．由G可推出G π-可解，应用定理2.1立得结论．//

2．3．定理．（P. Hall）设$|G|=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$．则$G$可解$\Longleftrightarrow$对于$i=1,\cdots,s$，$G$中存在$p_i'$-Hall子群．

证．由推论2.2，只须证明充分性．我们用对 $|G|$ 的归纳法．如果 $s=1$，即 G 是 p－群，当然可解．如果 $s=2$，由定理 II，3.7（将在第七章中证明），亦可推出 G 可解． 故可设 $s\geqq 3$，并分下面两步来证：

1．设 G 的 p_i'－Hall 子群是 H_i，先证明 H_i 可解，$(i=1,\cdots,s)$：因为 $|G:H_i|=p_i^{a_i}$，故对 $i\neq j$ 有 $(|G:H_i|,|G:H_j|)=1$．由命题 I，1.19，3），有 $|G:H_i\cap H_j|=p_i^{a_i}p_j^{a_j}$， 因此有 $|H_i:H_i\cap H_j|=p_j^{a_j}$．这说明 $H_i\cap H_j$ 是 H_i 的 p_j'－Hall 子群．由归纳假设，即得 H_i 的可解性．

2．证明 G 可解．考虑 G 的三个可解子群 H_1，H_2，H_3．设对某个素数 p，有 $M=O_p(H_1)\neq 1$ 因为 $(|G:H_2|,|G:H_3|)=1$，p 至少整除 $|H_2|$，$|H_3|$ 中的一个．不妨设 $p\mid |H_2|$，并设 $P\leqq H_2$ 是 G 的一个 Sylow p－子群．由 Sylow 定理，存在 $g\in G$ 使 $M\leqq P^g\leqq H_2^g$．再用命题 I，1.19，3），有 $G=H_1H_2^g$．故对任一元素 $x\in G$，可设 $x=x_1x_2$，其中 $x_1\in H_1$，$x_2\in H_2^g$．由 $M\lhd H_1$，且 $M\leqq H_2^g$，有

$$M^x=M^{x_1x_2}\leqq H_2^g .$$

于是若令 $N=\langle M^x\mid x\in G\rangle$，有 $N\leqq H_2^g$．这样 $1\neq N\lneqq G$．由 H_2^g 可解知 N 可解；又因 H_iN/N 是 G/N 的 p_i'－Hall 子群，由归纳假设得 G/N 的可解性．最后便得到 G 的可解性．//

2．4．注．应用定理2．3的证明方法，我们可以证明：如果有限群G有三个指数两两互素的可解子群，则G是可解的．

§3. Sylow系和Sylow补系

3．1．定义．设G是可解群，$|G|=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$．我们以$G_{p_i}$表G的某一个Sylow p_i－子群，并称$\varphi=\{G_{p_1},\cdots,G_{p_s}\}$为G的一个Sylow系，如果满足$G_{p_i}G_{p_j}=G_{p_j}G_{p_i}$，$\forall i,j$．又，设$G'_{p_i}$为G的任一个$p_i$－Hall子群，我们称$K=\{G'_{p_1},\cdots,G'_{p_s}\}$为G的一个Sylow补系，对于Sylow补系，当然有$G'_{p_i}G'_{p_j}=G'_{p_j}G'_{p_i}$，$\forall i,j$．

定理2．3表明：G可解$\Leftrightarrow$G存在Sylow补系$K=\{G'_{p_1},\cdots,G'_{p_s}\}$．下面我们证明

3．2．定理．（P. Hall）G可解$\Leftrightarrow$G存在Sylow系$\&=\{G_{p_1},\cdots,G_{p_s}\}$．

证．$\Rightarrow$：设$|G|=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$．因G可解，G存在Sylow补系$\mathcal{K}=\{G_{p_1'},\cdots,G_{p_s'}\}$．我们将由$\mathcal{K}$出发，构造G的一个Sylow系．首先，我们注意到，若H是G的任一π－Hall子群，$p_i\in\pi$，则$G_{p_i'}\cap H$是G的$(\pi-\{p_i\})$－Hall子群．这是因为$|G:H|$和$|G:G_{p_i'}|$互素，由命题Ⅰ，1.19，3），即得$|G:G_{p_i'}\cap H|=|G:H||G:G_{p_i'}|$，于是$G_{p_i'}\cap H$恰为G的一个$(\pi-\{p_i\})$－Hall子群．由此我们

便可得到$\mathcal{K}$中任意多个子群的交都是G的Hall子群．特别地，令$G_{p_i}=\bigcap_{j\neq i}G'_{p_j}$，$i=1,\cdots,s$，则$G_{p_i}$是G的一个Sylow p_i－子群．令$\mathcal{S}=\{G_{p_1}\cdots,G_{p_s}\}$．我们断言，$\mathcal{S}$即为G的一个Sylow系，即对任意的$i$，$j$，都有$G_{p_i}G_{p_j}=G_{p_j}G_{p_i}$．下面我们证明这点．因为$G_{p_i}G_{p_j}\subseteq\bigcap_{k\neq i,j}G'_{p_k}$，比较阶即得$G_{p_i}G_{p_j}=\bigcap_{k\neq i,j}G'_{p_k}$．同理又有$G_{p_j}G_{p_i}=\bigcap_{k\neq i,j}G'_{p_k}$．于是$G_{p_i}G_{p_j}=G_{p_j}G_{p_i}$．

$\Leftarrow$：设$\mathcal{S}=\{G_{p_1},\cdots,G_{p_s}\}$是群G的一个Sylow系，则由$G_{p_i}G_{p_j}=G_{p_j}G_{p_i}$，$\forall i,j$，知$G_{p_1}\cdots G_{p_{i-1}}G_{p_{i+1}}\cdots G_{p_s}=G'_{p_i}$是G的一个$p_i'$－Hall子群．于是G存在Sylow补系，由定理2．3，G可解．//

3．3．定理（P.Hall）设G是可解群，$\mathcal{K}=\{G'_{p_1},\cdots G'_{p_s}\}$和$\mathcal{K}^*=\{G^{*\prime}_{p_1},\cdots,G^{*\prime}_{p_s}\}$是G的任二Sylow补系，则$\mathcal{K}$和$\mathcal{K}^*$共轭，即存在$g\in G$使$G^{g}_{p'_i}=G^{*}_{p'_i}$，$\forall i$．

证．因为G可解，G的任二π－Hall子群共轭．于是对于$i=1,\cdots,s$，G的p_i'－Hall子群的个数应为$k_i=|G:N_G(G_{p'_i})|$，它是p_i的方幂．而G中不同的Sylow补系的个数应为$k=\prod_{i=1}^{s}k_i$．因为$k_1,\cdots,k_s$两两互素，据命题I，1.19.3），

$$k=\prod_{i=1}^{s}|G:N_G(G'_{p_i})|=|G:\prod_{i=1}^{s}N_G(G'_{p_i})|,$$

而后者恰为与K共轭的 Sylow 补系的个数．由此推出G的任二 Sylow补系共轭． //

3．4．推论．可解群G的任二Sylow系亦共轭．

证．只要注意到G的任一Sylow系可由某一Sylow补系取交得到，由3．3即得所需的结果． //

§4． Fitting 子群

4．1．引理．设G是群，N_1，N_2是G的幂零正规子群，且$c_1 = c(N_1)$，$c_2 = c(N_2)$．则N_1N_2也是G的幂零正规子群，且$c(N_1N_2) \leqq c_1 + c_2$．

证．容易验证．若A，B，C皆为G之正规子群，则有

$[AB, C] = [A, C][B, C]$，$[A, BC] = [A, B][A, C]$

（可参看第三章末第二题）于是

$$[N_1, N_2]_s = [\underbrace{N_1N_2, N_1N_2, \cdots, N_1N_2}_{s\text{个}}]$$

可表成2^s个形如$[X_1, \cdots, X_s]$的因子的乘积，其中$X_i = N_1$或N_2．如果$s \geqq c_1 + c_2 + 1$，则在$X_1, \cdots, X_s$中至少包含$c_1 + 1$个N_1或者$c_2 + 1$个N_2． 注意到$[N_1, N_2] \leqq N_1 \cap N_2$，于是由$c(N_1) = c_1$和$c(N_2) = c_2$即可得到$[X_1, \cdots, X_s] = 1$，于是$[N_1N_2]_s = 1$．这就得到$N_1N_2$幂零，且$c(N_1N_2) \leqq c_1 + c_2$． //

4.2. 定义. 设G是有限群，则由引理4.1，G的所有幂零正规子群的乘积$F(G)$仍为G之幂零正规子群，叫做G的Fitting子群.

Fitting子群的简单性质是

4.3. 定理. 设G是有限群，$F(G)$是G的Fitting子群，$\Phi(G)$是G的Frattini子群. 则

1) $\Phi(G)\leqq F(G)$; 且若G可解，$G\neq 1$，则还有$\Phi(G)<F(G)$;

2) $F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$;

3) $C_G(F(G))F(G)/F(G)$不包含$G/F(G)$的$\neq 1$的可解正规子群. 特别地，若G可解，则$C_G(F(G))\leqq F(G)$;

4) 设N是G的极小正规子群，则$F(G)\leqq C_G(N)$. 特别，若N是交换的，则有$N\leqq Z(F(G))$.

证. 1) 由V，3.8，$\Phi(G)$幂零. 又$\Phi(G)\lhd G$. 于是$\Phi(G)\leqq F(G)$. 又设G可解，且$G\neq 1$. 则$\bar{G}=G/\Phi(G)$亦可解. 且$\neq 1$. 取$\bar{G}$的极小正规子群$N/\Phi(G)$，则$N/\Phi(G)$幂零（实际上是初等交换p-群）. 由定理V，3.7，N亦幂零，于是$N\leqq F(G)$. 这说明$F(G)>\Phi(G)$.

2) 设$F(G/\Phi(G))=N/\Phi(G)$. 据V.3.7，由$N/\Phi(G)$幂零可得N幂零，于是$N\leqq F(G)$. 又由$F(G)$幂零. 有$F(G)/\Phi(G)$幂零. 故$F(G)/\Phi(G)\leqq N/\Phi(G)$