全国中专教育物资类专业统编教材

经济数学

（数学第四册）

中国物资出版社

全国中专教育物资类专业统编教材
经 济 数 学
（数学第四册）
*
中国物资出版社出版
（北京市西城区月坛北街25号）
全国各地新华书店经销
通县西定安印刷厂印装
开本：787×1092 1/32 印张：12.5 字数：280千字
1991年8月第一版 1991年8月第一次印刷
印 数：1—6000册
ISBN7-5047-0132-7/O·0009 定价：5.30元

编写说明

本教材是在物资部科教司的领导下，组织编写的全国中等物资学校、物资职工中专学校的基础课和专业基础课教材，亦可作为物资系统函授、自学及岗位培训用书。

全书共分四册，第四册《经济数学》介绍了线性代数、投入产出、线性规划、概率论及数理统计初步等基本知识。在编写过程中，力求适应四个现代化发展的要求和物资经济专业的特点。为了巩固书中所学知识，各节均配有适量习题并在书末附有答案。

本册教材由安徽省物资学校韩业岚主编。参加编写的有广东省物资学校杨冰青(第十六章)、安徽省物资学校赵惠民(第十七章)、北京市物资学校杨长青(第十八章)、安徽省物资学校韩业岚(第十九、二十章)、南京物资学校刘贵才(第二十一章)、柳正卿(第二十二章)、吉林省物资学校万家树(第二十三章)。本册教材由上海机械专科学校任必副教授主审，上海金融专科学校姚叠叁副教授任副主审。物资部科教司审定。

由于编者水平所限，编写时间仓促，错误及不当之处恳切期望读者批评指正。

《数学》编写组

1991．3

目　　录

第十六章　行列式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具，它在数学及其它科学中有着广泛的应用，本章从二阶、三阶行列式出发，引出 n 阶行列式的概念，讨论行列式的性质与计算方法以及如何用行列式来求解线性方程组。

§ 16-1　行列式的概念

一、二阶行列式

行列式的概念是从解一次方程组(又叫线性方程组)所引出的。我们知道二元线性方程组的一般形式是：

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2。 & (2)\end{cases}$$

其中 x_1、x_2 是未知数；b_1、b_2 是常数；a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 是方程组中未知数的系数，也是常数。

现用加减消元法推导解的公式。

由$(1)\times a_{22}-(2)\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

由$(2)\times a_{11}-(1)\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}。$$

当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$时，可得方程组的解为：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \tag{16-1}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}。$$

为了便于记忆和研究，把(1)中 x_1 与 x_2 的系数 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}按其在方程组中的位置写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

的形式，并规定它的值等于左上角的 a_{11} 乘以右下角的 a_{22}，减去右上角的 a_{12} 乘以左下角的 a_{21} 所得到的差，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{16-2}$$

(16-2)式的左端叫做二阶行列式，横排叫行，竖排叫列。a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}叫做行列式的元素。通常把表示行列式中第 i 行第 j 列的元素记为 a_{ij}。行列式中左上角到右下角的对角线叫做主对角线，主对角线上的元素 a_{11}，a_{22}叫做主对角元。

(16-2)式的右端 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$叫做二阶行列式的展开式。

根据上述二阶行列式的概念，(16-1)式中右端的两个分母都可写成$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，相仿地，两个分子可分别写成

$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$。

如果令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$时，方程组(I)的解可简记为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad(16\text{-}3)$$
$$x_2=\frac{D_2}{D}。$$

其中D叫做方程组的系数行列式。若将D中第一列元素a_{11}，a_{21}换成方程组(I)的常数项b_1，b_2，就得到行列式D_1；若将D中第二列元素a_{12}，a_{22}换成常数项b_1，b_2就得到行列式D_2。

例 1　计算下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}6a-b & 2b\\ 3a & b\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}$。

解(1) $\begin{vmatrix}6a-b & 2b\\ 3a & b\end{vmatrix}=(6a-b)\cdot b-2b\cdot 3a=-b^2$；

(2) $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$。

例 2　用行列式解方程组

$$\begin{cases}2x_1-3x_2-12=0,\\ 3x_1+7x_2+5=0。\end{cases}$$

解　化方程组为一般形式

$$\begin{cases}2x_1-3x_2=12,\\ 3x_1+7x_2=-5。\end{cases}$$

计算：$D=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=14-(-9)=23\neq 0$，

$D_1=\begin{vmatrix}12 & -3\\ -5 & 7\end{vmatrix}=84-15=69$，

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-10-36=-46,$$

所以方程组的解为$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=3, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=-2. \end{cases}$

二、三阶行列式

三元线性方程组的一般形式为

$$(\mathrm{II})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, & (2) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. & (3) \end{cases}$$

和二元线性方程组类似，仍用加减消元法求出解的公式为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-a_{11}a_{22}b_3-a_{23}a_{32}b_1-a_{33}a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-a_{13}b_2a_{21}-a_{23}b_3a_{11}-a_{33}b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}} \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{31}a_{12}b_2-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{32}a_{11}-b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (16\text{-}4)$$

其中分母不为零。

这种表达式比较繁杂，为了便于记忆和研究，仿照二阶行列式用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}$ $-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \tag{16-5}$$

(16-5)式的左端叫做三阶行列式，右端叫做三阶行列式的展开式。式中共有六项，每项都是不同行、不同列的三个元素的乘积，前三项前面附有“+”号，另三项前面附有“-”号，因此，三阶行列式的展开式是三个不同元素乘积的代数和。三阶行列式的展开法可用如下的画线的方法记忆，其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联

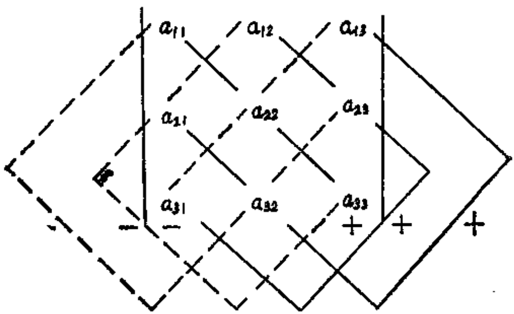

图 16-1

结的三个元素的乘积是代数和中的负项。这种展开三阶行列式的方法叫做对角线展开法。

(16-4)式中的分子与分母利用行列式表示并引入记号 D，D_1，D_2，D_3则可写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D},\ (D\neq 0) \qquad (16\text{-}6)$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_3}{D},$$

其中D是由方程组(II)的未知数x_1，x_2和x_3的系数按原来的位置次序排列构成的系数行列式，D_1，D_2和D_3是用常数项b_1，b_2，b_3分别代替D中x_1，x_2，x_3的系数的结果。

例 3 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$的值。

解 用对角线展开法可求出

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4+0-12-2-10-0=-20。$$

例 4　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = -1。 \end{cases}$$

解　用对角线展开法可求出

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 69 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 69,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 23,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -23,$$

于是方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{69}{69} = 1, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{23}{69} = \dfrac{1}{3}, \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{-23}{69} = -\dfrac{1}{3}。 \end{cases}$$

习　题　16-1

1．计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \mathrm{tg}\alpha \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} \cos 35^\circ & \sin 35^\circ \\ \sin 55^\circ & \cos 55^\circ \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} \log_a^b & 1 \\ 2 & \log_b^a \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} x-1 & x^2 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}$。

2．用行列式解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 7x-8y=10, \\ 6x-7y=11; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 5x+11y-8=0, \\ 4x-15y+6=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x_1-6x_2=2, \\ x_1-x_2=0; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} \frac{2}{3}x_1+\frac{1}{5}x_2=6, \\ \frac{1}{6}x_1-\frac{1}{2}x_2=-4。 \end{cases}$

3．计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 11 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 49 & 4 \\ 2 & 28 & 2 \\ 4 & 35 & 8 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ 7 & 5 & 14 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} a & b & o \\ c & o & b \\ o & c & a \end{vmatrix}$；

4. 用行列式解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 4x - y - 2z = 4, \\ 2x + y - 4z = 8, \\ x - 2y + z = 1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x - y + z = a, \\ x + y - z = b, \\ -x + y + z = c。 \end{cases}$

5. 解方程：

(1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & -9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$；

(2) $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0$。

§ 16-2　三阶行列式的性质及行列式按行(列)展开

用对角线法计算行列式的值，运算比较繁杂。为了简化计算，下面介绍行列式的性质，并用这些性质来计算行列式的值。

一、三阶行列式的性质

将行列式D的行与列依次互换得到的行列式叫做D的转置行列式，记为D'或D^T。即，如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}，则 D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}。$$

性质 1　行列式D与其转置行列式D'的值相等，即$D' = D$。

由这一性质可知，在行列式中行与列所处的地位相同，

因此，凡是对行成立的性质对列也一定成立，反之亦然。

性质 2　交换行列式的任意两行，行列式仅改变符号。

例如，交换行列式的第一、二两行，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}。$$

推论　若行列式中某两行的对应元素相同，则此行列式的值为零。

因为将行列式 D 中具有相同元素的两行互换其结果仍是D，但由性质 2 可知其结果应为 $-D$，因此 $D=-D$，所以$D=0$。

性质 3　行列式中某行的各元素有公因子时，可以把公因子提到行列式符号外面。

例如，$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

利用这个性质容易得出下面的两个推论：

推论 1　如果行列式中某一行的元素都为零，则此行列式的值等于零。

例如，$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0。$$

推论 2　如果行列式中某两行的对应元素成比例，则此行列式的值为零。

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$。

性质 4　若行列式的某一行的各元素都是二项式，则此行列式等于把这些二项式各取一项作成相应的行，而其余行不变的两个行列式的和。

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}。$$

上述三阶行列式的性质，都可用对角线法则展开行列式来证明。

性质 5　用一常数 k 乘行列式的某一行的各元素加到另一行的对应元素上去，行列式的值不变。

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}。$$

性质 5 也可由性质 4 和性质 3 的推论 2 证明。

三阶行列式的这五个性质（包括推论）对于二阶行列式同样成立，请同学自行验证。

例 1 计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 297 & 101 & 99 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$的值。

解 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 297 & 101 & 99 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300-3 & 100+1 & 100-1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300 & 100 & 100 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{②+①} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[②+③\times\left(\frac{3}{2}\right)]{①+②\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=12+0+0-10-0-0$$

$$=2。$$

其中“②+①”表示行列式的第一行各元素分别加到第二行的对应元素上去；“$①+②\times\left(-\frac{1}{2}\right)$”表示第二行的各元素分别乘以$\left(-\frac{1}{2}\right)$加到第一行的对应元素上去；若是交换第二行和第三行元素，则可表示为“②，③”；若是第一列各元素分别