第 36 卷 第 8 期
1987 年 8 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 36, No. 8
Aug., 1987

一般情况下二维非线性 σ 模型的等时 Kac-Moody 代数

王小林　戴元本
(中国科学院理论物理研究所)
1986 年 8 月 14 日收到

提　要

在本文中对一般的紧致单纯群和耦合常数 λ_0 的任意值证明了带 Wess-Zumino 项的二维非线性 σ 模型的等时流代数构成带中心荷的 Kac-Moody 代数.

近年来有一系列的工作研究带 Wess-Zumino 项的二维非线性 σ 模型的代数性质。Witten[1] 指出在耦合常数 λ_0^2 取 $\frac{4\pi}{n}$ (n 为 $W-Z$ 项前的系数)的特殊值时，这个模型的光锥流代数构成带中心荷的 Kac-Moody 代数，在 $n=1$ 时非线性 σ 模型在一定意义下与自由费密子模型等价。在文献 [2] 中对 $SO(N)$ 群的情况证明了在任意的 λ_0 值下带 $W-Z$ 项的二维非线性 σ 模型的等时流代数构成带中心荷的 Kac-Moody 代数. 文献 [2] 中所用的方法是用群元 g_{ab} 作为正则变量并附加正交群的约束条件 $g^Tg=I$. 这个方法不能直接推广到一般群. 在文献 [3] 中用尤拉角作为独立的正则变量，对 $SU(2)$ 群得到相似的结果。在本文中我们将用群流形的独立坐标为正则变量对一般的紧致单纯李群证明带 $W-Z$ 项的二维非线性 σ 模型的等时流代数构成带中心荷的 Kac-Moody 代数。在文献 [4] 中曾不明显地提到这个结果，但是仅对 $SU(2)$ 模型给出了证明。

这里所讨论的模型的作用量为

$$S=\int d^2x\mathscr{L}_0+n\Gamma, \tag{1}$$

$$\mathscr{L}_0=\frac{1}{2\lambda_0^2T}\mathrm{Tr}(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g), \tag{2}$$

$$\Gamma=\int_D d^3x\tilde{\gamma}=-\frac{1}{12\pi T}\int_D d^3x\varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_\mu g\cdot g^{-1}\partial_\nu g\cdot g^{-1}\partial_\rho g). \tag{3}$$

这里 $g(x)$ 取值在单纯紧致群 G 的基础表示中，D 为任一以二维时空 S^2 为边界的三维盘. 令 T_a 为群 G 的生成元的基础表示，

$$[T_a, T_b]=f_{abc}T_c,\quad \mathrm{Tr}(T_aT_b)=-\frac{T}{2}\delta_{ab}.$$

为使物理结果不依赖于 D 的选择，要求 $\tilde{\gamma}$ 在三维球面 S^3 上的积分为 $2\pi k$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$). 对 $SU(2)$ 群在取 $T_a=\frac{i}{2}\sigma_a$ 时这个要求是满足的. 对一般的单纯紧致李群 G

表 1

G	A_n	$B_n(n\geqslant 3)$	C_n	$D_n(n\geqslant 4)$	G_2	F_4	F_6	F_7	F_8
T	1	2	1	2	2	6	6	12	60

可以使 g 取值在 G 的基础表示所含 $SU(2)$ 子群的 $\mathrm{Tr}(T_a(R)T_a(R))$ 最小的表示 R 中，计算相应的 $\int_{S^3} d^3x\tilde{\gamma}$. 由文献[5]的结果可以知道，如果规一化生成元 T_a 使得群 G 的李代数的长根的长度为 $\sum_i \alpha_i^2 = 1$，并使群参数的值域按 $SU(2)$ 子群归一化，则条件 $\int_{S^3} d^3\tilde{\gamma} = 2\pi k$ 满足。在这个归一化下的 T 值见表 1.

令 $\phi^i(i=1,2,\cdots,d_G)$ 为群流形的坐标. 1 形式

$$e = g^{-1}dg = e^a(\phi)T_a = e_i^a(\phi)T_a d\phi^i, \tag{4}$$

$e_i^a(\phi)$ 为群流形的切空间的标架. e 满足 Maurer-Cartan 方程

$$de = -e\wedge e. \tag{5}$$

(2) 式可写为

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{4\lambda_0^2} g_{ij}\partial^\mu\phi^i\partial_\mu\phi^j, \tag{6}$$

其中 $g_{ij} = e_i^a e_j^a$ 为群流形的度规. 引入 3 形式

$$H = \frac{1}{3!} f_{abc} e^a\wedge e^b\wedge e^c = \frac{1}{3!} H_{ijk} d\phi^i\wedge d\phi^j\wedge d\phi^k. \tag{7}$$

它满足 $dH = 0$，因此可以局部地表为

$$H = dB, \quad B = \frac{1}{2} B_{ij} d\phi^i\wedge d\phi^j. \tag{8}$$

拉回到三维盘 D 上，由 (3)，(9) 式及 Stokes 定理可得

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi}\int_D H = \frac{1}{8\pi}\int_{S^2} B = \frac{1}{16\pi}\int d^2x\,\varepsilon^{\mu\nu} B_{ij}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j$$
$$= \int d^2x\,\gamma. \tag{9}$$

γ 确定到可差一个全微分项. (5) 和 (8) 式写成分量形式为

$$\partial_i e_j^a - \partial_j e_i^a = -f_{abc} e_i^b e_j^c, \tag{5'}$$
$$H_{ijk} = \partial_i B_{jk} + \partial_k B_{ij} + \partial_j B_{ki}. \tag{8'}$$

以 $\phi^i(x)$ 为场的正则坐标，其共轭变量为

$$\pi_i = \pi_i^0 + n\frac{\partial\gamma}{\partial\dot{\phi}^i} = \pi_i^0 + \frac{n}{8\pi} B_{ij}\partial_x\phi^j, \tag{10}$$

$$\pi_i^0 = \frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial\dot{\phi}^i} = \frac{1}{2\lambda_0^2} e_i^a e_j^a \dot{\phi}^j. \tag{11}$$

由 (10) 和 (11) 式可得如下的泊松括号：

$$\{\phi^i(x), \phi^j(y)\}_{\mathrm{PB}} = 0, \tag{12}$$

$$\{\phi^i(x), \pi_j^0(y)\}_{\rm PB} = \delta_j^i\delta(x-y), \tag{13}$$

$$\{\pi_i^0(x), \pi_j^0(y)\}_{\rm PB} = n\left(\frac{\partial^2\gamma(y)}{\partial\phi^i(x)\partial\phi^j(y)} - \frac{\partial^2\gamma(x)}{\partial\phi^j(y)\partial\phi^i(x)}\right)$$

$$= \frac{n}{8\pi}(\partial_i B_{jk} - \partial_j B_{ik} + \partial_k B_{ij})\partial_x\phi^k\delta(x-y)$$

$$= \frac{n}{8\pi}H_{ijk}\partial_x\phi^k\delta(x-y). \tag{14}$$

令 e^{ai} 为标架的逆，

$$e^{ai}e_j^a = \delta_j^i, \quad e^{ai}e_i^b = \delta_{ab}. \tag{15}$$

又令 $A_\mu^a = e_i^a\partial_\mu\phi^i$，由 (11)—(15) 式可得 A_μ^a 的泊松括号

$$\{A_1^a(x), A_1^b(y)\}_{\rm PB} = 0,$$

$$\{A_1^a(x), A_0^b(y)\}_{\rm PB} = 2\lambda_0^2 e_j^a(x)e^{bj}(y)\{\partial_x\delta(x-y)$$

$$+ e^{bj}(y)\partial_j e_i^a(x)\partial_x\phi^i(x)\delta(x-y)\}$$

$$= 2\lambda_0^2\{\delta_{ab}\partial_x\delta(x-y) + e^{bj}(y)(\partial_j e_i^a(x) - \partial_i e_j^a(x))$$

$$\cdot\partial_x\phi^i(x)\delta(x-y)\}. \tag{16}$$

利用 (5′) 式可将上式写为

$$\{A_1^a(x), A_0^b(y)\}_{\rm PB} = 2\lambda_0^2\{\delta_{ab}\partial_x\delta(x-y) - f_{abc}A_1^c\delta(x-y)\},$$

$$\{A_0^a(x), A_0^b(y)\}_{\rm PB} = 4\lambda_0^2\left\{(e^{bj}\partial_j e^{ai} - e^{aj}\partial_j e^{bi})\pi_i\right.$$

$$\left. + \frac{1}{8\pi}e^{ai}e^{bj}H_{ijk}\partial_x\phi^k\right\}\delta(x-y). \tag{17}$$

由上式及逆矩阵微分公式

$$\partial_j e^{al} = -e^{ak}\partial_j e_k^c e^{cl},$$

可得

$$\{A_0^a(x), A_0^b(y)\}_{\rm PB} = -2\lambda_0^2 f_{abc}\left(A_0^c - 2\lambda_0^2\frac{n}{8\pi}A_1^c\right)\delta(x-y). \tag{18}$$

用经典场量与量子场量的 Weyl-Wigner 对应可以把 (16)—(18) 式中的 $\{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\}_{\rm PB}$ 换为 $-i[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)]$ 而没有因算符顺序产生的附加项[3]. 引入流

$$J_\mu = -\frac{i}{2\lambda_0^2}\left(A_\mu + \frac{n\lambda_0^2}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu}A^\nu\right). \tag{19}$$

由拉氏运动方程可知，J_μ 满足守恒方程 $\partial^\mu J_\mu = 0$. 由 (16)—(19) 式可得等时对易子

$$[J_0^a(x,t), J_0^b(y,t)] = f_{abc}J_0^c(x,t)\delta(x-y)$$

$$-\frac{n}{4\pi}\delta_{ab}i\delta'(x-y). \tag{20}$$

相似地可以引入

$$gdg^{-1} = \tilde{e}_i d\phi^i, \quad \tilde{A}_\mu = \tilde{e}_i\partial_\mu\phi^i,$$

$$\tilde{J}_\mu = \frac{i}{2\lambda_0^2}\left(\tilde{A}_\mu - \frac{n\lambda_0^2}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu}\tilde{A}^\nu\right).$$

$\tilde{J}_\mu$ 满足方程 $\partial^\mu\tilde{J}_\mu = 0$. 用相似的计算可以证明

$$[\tilde{J}_0^a(x,t), \tilde{J}_0^b(y,t)] = f_{abc}\tilde{J}_0^c(x,t)\delta(x-y) + \frac{n}{4\pi}\delta_{ab}i\delta'(x-y). \tag{21}$$

利用 $\tilde{A}_\mu = gA_\mu g^{-1}$ 及 (12)—(14) 式还可以证明

$$[\tilde{J}_0^a(x,t), \tilde{J}_0^b(y,t)] = 0. \tag{22}$$

由 (20)—(22) 式知道，J_0 和 $\tilde{J}_0$ 的等时流代数组成两个对易的带中心荷的 Kac-Moody 代数，守恒流 J_μ 和 $\tilde{J}_\mu$ 分别相应于理论在群的右乘 $g \to gg_0^{-1}$ 和左乘 $g \to g_0g$ 下的对称性，拉氏量 $\mathscr{L}_0 + n\gamma$ 在这两个变换下只改变一个全散度项。由文献 [6] 的结果知道，当且仅当 n 为偶数时，Kac-Moody 代数 (20)—(22) 式有幺正表示。

本文中用的是群流形的局部坐标，在重叠处两组局部坐标相差一个正则变换。

参　考　文　献

[1] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **92** (1984), 455.
[2] Chou Kuang-chao and Dai Yuan-ben, *Commun. Theor. Phys.*, **4** (1985), 123.
[3] Dai Yuan-ben and Wang Xiao-lin, *Commun. Theor. Phys.*, **6**(1986), 347.
[4] H. J. De Vega, 预印本 PAR LPTHE 85. 23.
[5] C. W. Bernard *et al.*, *Phys. Rev.*, **D16** (1977), 2967.
[6] P. Goddard, 预印本 DAMTP 85/7.

EQUAL TIME KAC-MOODY ALGEBRA FOR GENERAL TWO DIMENSIONAL NON-LINEAR σ MODEL

Wang Xiao-lin　Dai Yuan-ben

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

Abstract

It is shown that for general compact simple Lie groups and arbitrary value of coupling constant λ_0, the equal time current algebra of the two dimensional non-linear σ model with Wess-Zumino term is a Kac-Moody algebra with center charge.