

2015 考研专家指导丛书

考研数学

最后冲刺超越135分

(数学三)

超值赠送



- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册(数学一、二、三)
- 命题人密押试卷2套及精解(数学一、二、三)
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

● 清华大学
● 北京大学
● 首都师范大学

王 欢
王德军 主编
童 武

中国石化出版社
[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)
教·育·出·版·中·心

2015 考研专家指导丛书

考研数学 最后冲刺超越135分 (数学三)

超值赠送



- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册(数学一、二、三)
- 命题人密押试卷2套及精解(数学一、二、三)
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

◎ 清华大学
◎ 北京大学
◎ 首都师范大学

王 欢
王德军 主编
童 武

中国石化出版社
[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最后冲刺超越 135 分. 数学三 / 王欢主编. —
3 版. —北京: 中国石化出版社, 2014. 4
ISBN 978-7-5114-2700-7

I. ①考… II. ①王… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-题解 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 040935 号

未经本社书面授权, 本书任何部分不得被复制、抄袭, 或者以任何
形式或任何方式传播。版权所有, 侵权必究。

中国石化出版社出版发行

地址: 北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编: 100011 电话: (010) 84271850

读者服务部电话: (010) 84289974

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail: press@sinopec.com

北京富泰印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787 × 1092 毫米 16 开本 5.5 印张 133 千字

2014 年 4 月第 3 版 2014 年 4 月第 1 次印刷

定价: 19.80 元(赠送 MP3 光盘)

前 言

中国加入 WTO 之后, 改革开放逐步深化, 经济发展速度日益加快, 社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进, 我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大, 这方面的教育也在稳步发展, 规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化, 考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说, 全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试, 即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才, 又有利于高等学校教学的原则, 强调在考查知识的基础上, 重点考查考生分析问题和解决问题的能力, 并且采用科学的办法, 保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习, 顺利通过数学考试、赢取高分, 我们根据国家教育部制定的《考试大纲》, 基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验, 以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路, 倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括:

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》

《考研数学标准模拟试卷精解数学二》

《考研数学标准模拟试卷精解数学三》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 98 考点全突破数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 70 考点全突破数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 102 考点全突破数学三》

《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学三》

《考研数学主观题 23 天突破 500 题 数学一》

《考研数学主观题 13 天突破 500 题 数学二》

《考研数学主观题 22 天突破 500 题 数学三》

《考研数学客观题 26 天突破 1500 题 数学一》

《考研数学客观题 15 天突破 1500 题 数学二》

《考研数学客观题 27 天突破 1500 题 数学三》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学一》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学二》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学三》

本套丛书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲, 反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上, 力求反映最新考试要求, 紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧, 高效突破难关

本书精辟阐明解题思路, 全面展现题型变化, 为考生全程领航和理性分析, 引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练, 检验自己的学习成果, 及时进行查漏补缺, 有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练, 这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔, 编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编写。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作, 积累了丰富的教学辅导经验, 对历年考试情况比较了解, 对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序, 力求达到完美, 但限于时间和水平, 仍可能存在不足, 纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编 者

目 录

最后冲刺试卷一	(1)
最后冲刺试卷一参考答案与解析	(3)
最后冲刺试卷二	(9)
最后冲刺试卷二参考答案与解析	(11)
最后冲刺试卷三	(16)
最后冲刺试卷三参考答案与解析	(18)
最后冲刺试卷四	(23)
最后冲刺试卷四参考答案与解析	(25)
最后冲刺试卷五	(29)
最后冲刺试卷五参考答案与解析	(31)
最后冲刺试卷六	(38)
最后冲刺试卷六参考答案与解析	(40)
最后冲刺试卷七	(49)
最后冲刺试卷七参考答案与解析	(52)
最后冲刺试卷八	(58)
最后冲刺试卷八参考答案与解析	(60)
最后冲刺试卷九	(67)
最后冲刺试卷九参考答案与解析	(69)
最后冲刺试卷十	(75)
最后冲刺试卷十参考答案与解析	(77)

最后冲刺试卷一

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ ，则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 点外的微分 dy 是()。
(A) 与 Δx 等价的无穷小 (B) 与 Δx 同阶的无穷小
(C) 比 Δx 低阶的无穷小 (D) 比 Δx 高阶的无穷小
2. 设 $I_1 = \int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx$, $I_2 = \int \frac{du}{u(1+u)}$ ，则存在函数 $u=u(x)$ ，使()。
(A) $I_1 = I_2 + x$ (B) $I_1 = I_2 - x$
(C) $I_2 = -I_1$ (D) $I_2 = I_1$
3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$ ()。
(A) 发散 (B) 收敛于 0
(C) 收敛于 $\frac{1}{b_1}$ (D) 其敛散性不确定
4. 设 $k = \iint_D (x^2 + f(xy)) d\sigma$ ，其中 f 为连续的奇函数， D 是由 $y = -x^3$ ， $x=1$ ， $y=1$ 所围成的平面闭域，则 k 等于()。
(A) 0 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{2}{3}$ (D) 2
5. A 是 n 阶矩阵，且 $A^3 = \mathbf{0}$ ，则()。
(A) A 不可逆， $E-A$ 也不可逆 (B) A 可逆， $E+A$ 也可逆
(C) $A^2 - A + E$ 与 $A^2 + A + E$ 均可逆 (D) A 不可逆，且 A^2 必为 $\mathbf{0}$
6. 已知 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ， $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 且有关系 $b_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ik}$ ($i, j=1, 2, \dots, n$)，则下列关系式正确的是()。
(A) $A(B+E) = B$ (B) $(B+E)A = B$ (C) $B(A-E) = A$ (D) $(E-A)B = A$
7. 设 X 服从正态分布 $N(0, 2^2)$ ，而 $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量 $Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)}$ 所服从的分布为()。
(A) $\chi^2(15)$ (B) $t(14)$ (C) $F(10, 5)$ (D) $F(1, 1)$
8. 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ ，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ ，则()。
(A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度
(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{n^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 某公司每年的工资总额在比上一年增加 20% 的基础上再追加 200 万元, 若以 W_t 表示第 t 年的工资总额(单位百万元), W_t 满足的差分方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

11. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 函数 $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}}) dt$ ($x > 0$) 的单调减少区间 $\underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是正交矩阵, 将 A 以行分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, 则方程组 $AX = b$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2$, 则由切比雪夫(Chebyshev)不等式, 有 $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本题满分 10 分)

设 $z = f(2x - y, y \sin x)$, 其中 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

16. (本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad (t \geq 0)$

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积。

17. (本题满分 10 分)

设 a, b 为正常系数, λ 为非负常数, 微分方程 $\frac{dy}{dx} + ay = be^{-\lambda x}.$

(I) 求该方程的通解;

(II) 证明: 当 $\lambda = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{b}{a}$, 当 $\lambda > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$

18. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上连续, 且 $f(0) > 0$, 已知其在 $[0, x]$ 上的平均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均值, 求 $f(x).$

19. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$ 的通解。

20. (本题满分 11 分)

已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解。

21. (本题满分 11 分)

设 A 是 n 阶正定矩阵, E 是 n 阶单位阵, 证明 $A + E$ 的行列式大于 1。

22. (本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是取自此总体的一个子样, 若 $F(x)$ 的二阶矩阵存在, $\bar{X}$ 为子样均值, 试证 $(X_i - \bar{X})$ 与 $(X_j - \bar{X})$ 的相关系数

$$\rho = -\frac{1}{n-1}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

23. (本题满分 11 分)

设总体 X 服从于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ ($n \geq 2$), 其样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$, 求统计量 $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$ 。

最后冲刺试卷一参考答案与解析

一、选择题

1. 【考点提示】等价无穷小

【解题分析】由导数与微分的关系 $\frac{dy}{dx} = f'(x_0) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ (当 $\Delta x = dx \rightarrow 0$), dy 是与 Δx 同阶且不等价的无穷小, 应选(B)。

2. 【考点提示】不定积分的计算

【解题分析】 $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx = \int \frac{(1+x)e^x}{x(1+xe^x) \cdot e^x} dx$, 设 $u = xe^x$, 则上式 $= \int \frac{du}{u(1+u)}$ 。应选(D)。

3. 【考点提示】级数敛散性的判定

【解题分析】 $S_n = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}$
故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{b_1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_1} - 0 = \frac{1}{b_1}$ 。应选(C)。

4. 【考点提示】二重积分

【解题分析】如图: 加一条曲线 $y = x^3$, 将 D 分为 D_1 和 D_2 ,

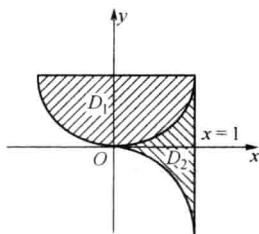
$$\iint_D [x^2 + f(xy)] dx dy = \iint_D x^2 dx dy + \iint_D f(xy) dx dy,$$

$$\text{而 } \iint_D f(xy) dx dy = \iint_{D_1} f(xy) dx dy + \iint_{D_2} f(xy) dx dy,$$

因为 f 为奇函数, 所以 $f(-xy) = -f(xy)$,

而 D_1, D_2 分别对称 y 轴和 x 轴, 故有 $\iint_{D_1} f(xy) dx dy = 0, \iint_{D_2} f(xy) dx dy = 0$,

从而原积分 $\iint_D [x^2 + f(xy)] dx dy = \iint_D x^2 dx dy = \int_{-1}^1 x^2 dx \int_{-x^3}^1 dy = \frac{2}{3}$ 。(B) 为正确答案。



5. 【考点提示】矩阵的可逆性

【解题分析】由行列式性质 $|A^3| = |A|^3 = 0$, 可知 A 必不可逆,

但从 $(E-A)(E+A+A^2) = E-A^3 = E$, $(E+A)(E-A+A^2) = E+A^3 = E$, 知 $E-A$, $E+A$, $E+A+A^2$, $E-A+A^2$ 均可逆。

当 $A^3 = 0$ 时, A^2 是否为 0 是不能确定的,

例如: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 有 $A_1^3 = 0$, 但 $A_1^2 \neq 0$, $A_2^3 = 0$, 且 $A_2^2 = 0$,

故选(C)。

6. 【考点提示】矩阵的乘法

【解题分析】由关系 $b_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ik} = a_{ij} + \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$ ($i, j=1, 2, \dots, n$),

得 $B = A + BA$, 从而得 $B = (E+B)A$ 。即选(B)。

7. 【考点提示】 χ^2 分布

【解题分析】 $\frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{4} \sim \chi^2(10)$, $\frac{X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2}{4} \sim \chi^2(5)$,

所以 $\frac{\frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{4}}{\frac{X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2}{4}} \sim F(10, 5)$, 即 $Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)} \sim F(10, 5)$, (C) 是答案。

8. 【考点提示】随机变量的概率密度函数

【解题分析】首先可否定选项(A)与(C), 因

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx = 2 \neq 1,$$

$$F_1(+\infty) + F_2(+\infty) = 1 + 1 = 2 \neq 1.$$

对于选项(B), 若 $f_1(x) = \begin{cases} 1 & -2 < x < -1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 则对任何

$x \in (-\infty, +\infty)$, $f_1(x)f_2(x) \equiv 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x) dx = 0 \neq 1$, 因此也应否定(C), 综上分析, 用排除法应选(D)。

进一步分析可知, 若令 $X = \max(X_1, X_2)$, 而 $X_i \sim f_i(x)$, $i=1, 2$, 则 X 的分布函数 $F(x)$ 恰是 $F_1(x)F_2(x)$ 。

$$F(x) = P\{\max(X_1, X_2) \leq x\} = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x\} = P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq x\} = F_1(x)F_2(x)$$

二、填空题

9. 【考点提示】根据级数的敛散性来求极限

【解题分析】由级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 0$,

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛, 因此其通项趋于 0。

10. 【考点提示】差分方程

【解题分析】由题设, 第 $t-1$ 年的工资总额为: W_{t-1} , 则 $W_t = 1.2W_{t-1} + 2$ 。

11. 【考点提示】不定积分

【解题分析】原式 $= - \int \ln(\sin x) d(\cot x) = - \cot x \ln(\sin x) + \int \cot x d[\ln(\sin x)]$

$$= - \cot x \ln(\sin x) + \int \cot x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \cot x \ln(\sin x) + \int \cot^2 x dx$$

$$= - \cot x \ln(\sin x) + \int (\csc^2 x - 1) dx = - \cot x \ln(\sin x) - \cot x - x + C.$$

12. 【考点提示】导数的应用

【解题分析】 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$, 所以 $0 < x < \frac{1}{4}$. 即单调区间为 $(0, \frac{1}{4})$.

13. 【考点提示】方程组的通解

【解题分析】因 A 为正交矩阵, 故 $A^{-1} = A^T$, 而方程组 $AX = b$ 的解为:

$$X = A^{-1}b = (\alpha_1^T \quad \alpha_2^T \quad \cdots \quad \alpha_n^T) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i^T.$$

14. 【考点提示】切比雪夫不等式

【解题分析】依切比雪夫不等式 $P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$, 有 $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}$.

三、解答题

15. 【考点提示】复合函数的偏导数

【解题分析】这是求带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数, 先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

由复合函数求导法得 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial}{\partial x}(2x - y) + f'_2 \frac{\partial}{\partial x}(y \sin x) = 2f'_1 + y \cos x f'_2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2f'_1 + y \cos x f'_2) \\ &= 2\left(f''_{11} \frac{\partial}{\partial y}(2x - y) + f''_{12} \frac{\partial}{\partial y}(y \sin x)\right) + \cos x f'_2 + \left(f''_{21} \frac{\partial}{\partial y}(2x - y) + f''_{22} \frac{\partial}{\partial y}(y \sin x)\right) y \cos x \\ &= 2(-f''_{11} + \sin x f''_{12}) + \cos x f'_2 + (-f''_{21} + \sin x f''_{22}) y \cos x \\ &= -2f''_{11} + (2 \sin x - y \cos x) f''_{12} + y \sin x \cos x f''_{22} + \cos x f'_2. \end{aligned}$$

16. 【考点提示】切线方程、平面图形的面积

【解题分析】(I) 先求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$. 由已知 $x = t^2 + 1 \Rightarrow t = \sqrt{x-1} (x \geq 1)$,

代入 y 得 $y = 4\sqrt{x-1} - x + 1$, 于是 $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x-1}} - 1$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = -(x-1)^{-\frac{3}{2}} < 0 (x > 1)$,

所以曲线 L 是凸的.

(II) 设 L 上切点 (x_0, y_0) 处的切线方程是 $y - y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1\right)(x - x_0)$.

令 $x = -1, y = 0$, 则有 $-4\sqrt{x_0-1} + x_0 - 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1\right)(-1 - x_0)$.

再令 $t_0 = \sqrt{x_0 - 1}$, 得 $-4t_0 + t_0^2 = \left(\frac{2}{t_0} - 1\right)(-2 - t_0^2)$,

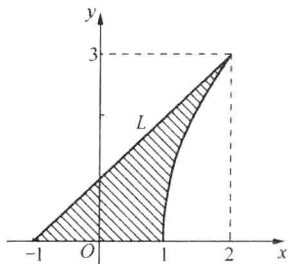
即 $t_0^2 + t_0 - 2 = 0$ 。

解得 $t_0 = 1$, $t_0 = -2$ (不合题意), 所以切点是 $(2, 3)$, 相应的切线方程是

$$y = 3 + (x - 2), \text{ 即 } y = x + 1.$$

(Ⅲ) 切点为 (x_0, y_0) 的切线与 L 及 x 轴所围成的平面图形如右图所示, 则所求平面图形的面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \int_1^2 y(x) dx = \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) \cdot 2t dt = \frac{9}{2} - \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{4}\right) = \frac{7}{3}.$$



17. 【考点提示】微分方程的通解

【解题分析】(Ⅰ) 通解为 $y = e^{-\int a dx} \left(\int b e^{-\lambda x} e^{\int a dx} dx + c \right) = e^{-ax} \left(b \int e^{(a-\lambda)x} dx + c \right)$

$$= \begin{cases} ce^{-ax} + \frac{b}{a-\lambda} e^{-\lambda x} & \lambda \neq a \\ (bx+c)e^{-ax} & \lambda = a \end{cases}$$

(Ⅱ) 当 $\lambda = 0$ 时, $y = ce^{-ax} + \frac{b}{a}$, 所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(ce^{-ax} + \frac{b}{a} \right) = \frac{b}{a}$ 。

当 $x > 0$ 且 $\lambda \neq a$ 时, $y(x) = ce^{-ax} + \frac{b}{a-\lambda} e^{-\lambda x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(ce^{-ax} + \frac{b}{a-\lambda} e^{-\lambda x} \right) = 0$,

当 $x > 0$ 且 $\lambda = a$ 时, $y(x) = (bx+c)e^{-ax}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (bx+c)e^{-ax} = 0$ 。

综上有, 当 $\lambda > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ 。

18. 【考点提示】平均值的相关计算

【解题分析】由题意得 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \sqrt{f(0)f(x)}$, 令 $a = \sqrt{f(0)}$,

有 $\int_0^x f(t) dt = ax \sqrt{f(x)}$, 两边求导, 得 $f(x) = a \sqrt{f(x)} + ax \cdot \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$,

即 $f'(x) + \frac{2}{x} f(x) = \frac{2}{ax} [f(x)]^{\frac{3}{2}}$ 。令 $z = [f(x)]^{-\frac{1}{2}}$, 得 $\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{ax}$,

可求得 $z = Cx + \frac{1}{a}$, 即 $f(x) = \left(Cx + \frac{1}{a} \right)^{-2} = \frac{f(0)}{(1 + C \sqrt{f(0)}x)^2} (x \geq 0)$ 。

19. 【考点提示】微分方程的通解

【解题分析】所给微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$,

故特征根为 -2 和 -3 。于是, 对应齐次微分方程的通解为 $\bar{y}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数。设所给非齐次方程的特解为 $y^*(x) = Ae^{-x}$, 将 $y^*(x)$ 代入原方程, 可得 $A = 1$, 由此得所给非齐次微分方程的一个特解是 $y^*(x) = e^{-x}$ 。

从而, 所给微分方程的通解为 $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + e^{-x}$ 。

20. 【考点提示】线性方程组的通解

【解题分析】由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关及 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 知, 向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 即矩阵 A 的秩为 3, 因此 $Ax = 0$ 的基础解系中只包含一个向量, 那么由

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

知, $Ax=0$ 的基础解系是 $(1, -2, 1, 0)^T$ 。

再由 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 知, $(1, 1, 1, 1)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的一个特解。

故 $Ax=\beta$ 的通解是 $k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数。

21. 【考点提示】正定矩阵的相关计算

【解题分析】因为 A 是正定阵, 故存在正交矩阵 Q , 使

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, λ_i 是 A 的特征值。

因此 $Q^T (A+E) Q = Q^T A Q + Q^T Q = \Lambda + E$,

两端取行列式得 $|A+E| = |Q^T| |A+E| |Q| = |Q^T (A+E) Q| = |\Lambda + E| = \prod (\lambda_i + 1)$ 。

从而 $|A+E| > 1$ 。

22. 【考点提示】分布函数的计算

【解题分析】由于二阶矩阵存在, 不妨设 $E(\bar{X}) = \mu$, $D(\bar{X}) = \sigma^2$,

$$\rho = \frac{\text{cov}(X_i - \bar{X}, X_j - \bar{X})}{D(X_i - \bar{X})} = \frac{E[(X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})]}{D(X_i - \bar{X})}, \quad i \neq j$$

$$D(X_i - \bar{X}) = D\left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2} D(X_i) + \frac{1}{n^2} \sum_{j \neq i} D(X_j)$$

$$= \frac{(n-1)^2 + n-1}{n^2} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$E[(X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})] = E(X_i X_j) - E(X_i \bar{X}) - E(X_j \bar{X}) + E(\bar{X}^2),$$

$$= \mu^2 - \frac{2}{n} E\left(X_i \sum_{j=1}^n X_j\right) + E(\bar{X}^2) - [E(\bar{X})]^2 + [E(\bar{X})]^2,$$

$$= \mu^2 - \frac{2}{n} E\left(X_i \sum_{j=1}^n X_j\right) + \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} = 2\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n} [E(X_i^2) +$$

$$\sum_{j \neq i} E(X_i) E(X_j)]$$

$$= 2\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n}[\mu^2 + \sigma^2 + (n-1)\mu^2] = -\frac{\sigma^2}{n}, \text{ 因而 } \rho = \frac{-\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{n-1}{n}\sigma^2} = -\frac{1}{n-1}.$$

23. 【考点提示】随机样本的正态分布

【解题分析】设 $Z_i = X_i + X_{n+i} (i=1, 2, \dots, n)$, 为从总体 Z 中取出的样本容量为 n 的样本, 则 $E(Z_i) = E(X_i) + E(X_{n+i}) = \mu + \mu = 2\mu$,

$$D(Z_i) = D(X_i + X_{n+i}) = D(X_i) + D(X_{n+i}) \quad (X_i \text{ 与 } X_{n+i} \text{ 相互独立}) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2$$

$$\therefore Z \sim N(2\mu, 2\sigma^2),$$

由样本与总体同分布, 则 $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} X_i = 2\bar{X}$, 样本方差为 $\frac{1}{n-1}Y = S^2$ 。

$\therefore S^2$ 是总体 Z 的方差的无偏估计量,

$$\therefore E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}Y\right) = \frac{1}{n-1}E(Y) = 2\sigma^2,$$

$$\therefore E(Y) = 2(n-1)\sigma^2.$$

最后冲刺试卷二

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内具有二阶导数， $f''(x) < 0$ ，且 $f(1) = f'(1) = 1$ ，则()。
(A) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$
(B) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) > x$
(C) 在 $(1-\delta, 1)$ 内 $f(x) < x$ ，在 $(1, 1+\delta)$ 内 $f(x) > x$
(D) 在 $(1-\delta, 1)$ 内 $f(x) > x$ ，在 $(1, 1+\delta)$ 内 $f(x) < x$
2. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x) = [f(x)]^2$ ，则当 n 为大于 2 的正整数时， $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为()。
(A) $n! [f(x)]^{n+1}$ (B) $n [f(x)]^{n+1}$ (C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n! [f(x)]^{2n}$
3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有定义， $f(0)=1$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2xf(x)}{x^2} = 0$ ，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处()。
(A) 可导，且 $f'(0)=0$ (B) 可导，且 $f'(0)=-1$
(C) 可导，且 $f'(0)=2$ (D) 不可导
4. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则()。
(A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$ (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$
(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$
5. 如果向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示，则()。
(A) 存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 成立
(B) 存在一组全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 成立
(C) 存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 成立
(D) 对 β 的线性表达式唯一
6. 设 λ_1, λ_2 是 n 阶矩阵 A 的特征值， α_1, α_2 分别是 A 的属于 λ_1, λ_2 的特征向量，则()。
(A) $\lambda_1 = \lambda_2$ 时， α_1 与 α_2 必成比例 (B) $\lambda_1 = \lambda_2$ 时， α_1 与 α_2 必不成比例
(C) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时， α_1 与 α_2 必成比例 (D) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时， α_1 与 α_2 必不成比例
7. 已知 $0 < P(B) < 1$ ，且 $P[(A_1 + A_2) | B] = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$ ，则下列选项必然成立的是()。
(A) $P[(A_1 + A_2) | \bar{B}] = P(A_1 | \bar{B}) + P(A_2 | \bar{B})$
(B) $P(A_1 B + A_2 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$

$$(C) P(A_1 + A_2) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$

$$(D) P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)$$

8. 设随机变量 X 与 Y 服从正态分布, $X \sim N(\mu, 4^2)$, $Y \sim N(\mu, 5^2)$, 记 $p_1 = P\{x \leq \mu - 4\}$, $p_2 = \{Y \geq \mu + 5\}$, 则()。

(A) 对任何实数 μ , 都有 $p_1 = p_2$

(B) 对任何实数 μ , 都有 $p_1 < p_2$

(C) 只对 μ 的个别值, 才有 $p_1 = p_2$

(D) 对任何实数 μ , 都有 $p_1 > p_2$

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____。

10. 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz =$ _____。

11. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{ax} = \int_{-\infty}^a te^t dt$, 则 $a =$ _____。

12. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n$ 的和函数为 _____。

13. 设 3 阶方阵 $A = (\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $B = (\beta, \gamma_1, \gamma_2)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ 都是 3 维列向量, 且 $|A| = 3$, $|B| = 4$, 则 $|5A - 2B| =$ _____。

14. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立, 则 $X \sim N(1, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$, 又 $P\{aX + bY \leq 0\} = \frac{1}{2}$ 则 a 与 b 应满足关系式 _____。

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$ 的通解。

16. (本题满分 10 分)

假设生产和销售某产品的收益 R 是产量的 q 二次函数。经统计得知: 当产量 q 分别为 0, 2, 4 时, 总收入 R 分别为 0, 6, 8 万元, 试确定 R 与 q 之间的函数关系。

17. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = 2e^x - f(x)$, 且 $f(0) = 0$, $g(0) = 2$, 求

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx。$$

18. (本题满分 10 分)

如果 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 证明: $\frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} < \tan \alpha - \tan \beta < \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}$ 。

19. (本题满分 10 分)

设 $z = f(2x - y, y \sin x)$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

20. (本题满分 11 分)

设 A 为 n 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 且 $A_{11} \neq 0$, 证明: 方程组 $Ax = b (b \neq 0)$ 有无穷多解的充要条件中 b 为 $A^*x = 0$ 的解。

21. (本题满分 11 分)

已知 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 是实对称矩阵 A 的三个特征值, 且对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 的特征向量为 $\alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, -2, 1)^T$, 求 A 对应于 $\lambda_1 = 6$ 的特征向量及矩阵 A 。

22. (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| = x$ 内服从均匀分布, 求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z = 2X + 1$ 的方差 $D(Z)$ 。

23. (本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值,

记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$, 求:

(I) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$;

(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\text{Cov}(Y_1, Y_n)$ 。

最后冲刺试卷二参考答案与解析

一、选择题

1. 【考点提示】函数单调性、函数的极值

【解题分析】设 $\varphi(x) = f(x) - x$, 则 $\varphi'(x) = f'(x) - 1, \varphi''(x) = f''(x)$,

由 $f''(x) < 0$ 得 $\varphi''(x) < 0$, 故 $\varphi'(x)$ 单调减少,

则当 $x < 1$ 时, $\varphi'(x) > \varphi'(1) = f'(1) - 1 = 0$, 当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) < \varphi'(1) = 0$;

则 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值,

当 $x \in (1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta)$ 时 $\varphi(x) < \varphi(1) = f(1) - 1 = 0$, 即 $f(x) < x$, 应选(A)。

2. 【考点提示】函数的高阶导数

【解题分析】为方便记 $y = f(x)$, 由 $y' = y^2$, 逐次求导得

$y'' = 2yy' = 2y^3, y''' = 3! y^2 y' = 3! y^4, \dots$, 归纳可证 $y^{(n)} = n! y^{n+1}$, 应选(A)。

3. 【考点提示】函数的极限

$$\begin{aligned} \text{【解题分析】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2xf(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x - 2x[f(x) - f(0)]}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} - 2 \frac{f(x) - f(0)}{x} \right] \end{aligned}$$

$$\text{而} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x} - 2}{2x} = -2, \text{ 所以} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1, \text{ 选(B).}$$

4. 【考点提示】等价无穷小

$$\begin{aligned} \text{【解题分析】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-\frac{6b}{a} \cdot ax} = -\frac{a^3}{6b} = 1, \end{aligned}$$

则 $a^3 = -6b$, 故选项(B), (C) 错误。