

經濟分析のための

因子分析法

富山大学教授

瀧 好英 著

国元書房

経済分析
のための

因子分析法

富山大学教授

瀧 好 英 著

国元書房

著者略歴

大正12年 茨城県に生まれる（本籍・東京都）。
昭和22年8月 経済企画庁調査局統計課（当時、経済安定本部総裁官房統計課）勤務。
昭和46年1月 調査局調査官。
昭和46年10月 文部省へ出向、富山大学助教授（経済学部）
昭和47年11月 富山大学経済学部教授、現在に至る。
昭和47年10月 経済指数の研究・整備により大内賞受賞。

主要著書

日本の経済指数—理論と実際、日本評論社、昭44。
経済統計学講義（共著）、八千代出版、昭44。
経済統計学概論（共著）、八千代出版、昭46。

経済分析のための 因子分析法

〈検印省略〉

昭和53年5月15日 印 刷 昭和53年5月25日 発 行

〒930 富山市上庄町79番地

著 者 瀧 好 英

発行者 国 元 孝 治

印刷所 海 外 印 刷 株 式 有 限 公 司

発 行 所 株 式 有 限 公 司 国 元 書 房

郵便番号 [101]

東京都千代田区外神田 6-14-11

電話 (03) 836-0026(代) 振替口座 東京 3-9248

© 瀧 好 英 1978年

(大場製本)

3033-780609-1703

本書の内容の一部あるいは全部を無断で複写複製（コピー）することは、法律で認められた場合を除き、著者および出版社の権利の侵害となりますので、その場合にはあらかじめ小社あて許諾を求めて下さい。

は し が き

本書は、教育心理学の分野で開発された因子分析法を、経済分析に応用することを念頭において組み立ててある。経済分析のための統計的方法は、すでに広範に開発され年々進歩を遂げている。このような分野にいまさら因子分析法を導入してみても、たいした成果は期待し得ない、ときめつける意見も聞かれる。しかし、場所系列および属性的事項系列の経済統計に関しては見るべき分析手法は開発されていない。われわれは、この統計学の盲点とも言うべき部分に因子分析法を適用しようと考えているもので、おそらく、この二つのタイプの統計系列については、ほかにさしたる分析の手はないのではないだろうか。

因子分析法は、数学的論理で組み立てられている。したがって、文科系とくに経済学部の学生にとっては、たしかに難解なものの一つと言えるかもしれない。そこで本書は、経済学部の学生を念頭において理論展開を行ない、できるだけ詳細な説明を加えるようにした。その結果簡単に理解できるようになったとは言えないまでも、根気よく順を追って読まれれば十分理解できるはずである。

因子分析法に関する論文・著書は決して少なくはない。だが、それらの多くは因子分析法の体系の一部だけを扱ったものか、あるいは、逆にあらゆる論法・手法を紹介しようとしたものか、のいずれかのタイプに属すると言ってよい。いずれにせよ、そのために、読者にとっては却って難解なものになっているように思われる。因子あるいは因子分析のアウトラインすら把握しにくいといった批判が聞かれる一方、「それらの著書を手引きにして分析してみようとしても、実際に行なうことはできない」といった苦情も耳にしている。

この点を考慮して、本書は、まず因子の概念を詳細に解説し、因子分析自体の理解に役立つよう心掛けた。また、因子抽出の方法も、セントロイド法、主因子法、直接バリマックス法の主要3方法に限定し、それらを中核として、

データの選択から分析・まとめの段階まで一連の経済分析として体系づけ、十分に解説したつもりである。理論過程を一通り述べたあと、最後の第10章では、二つのタイプの系列について因子分析の実験を行なっている。本書の全体を通読することに冗長または苦痛を感じられる読者は、第1章で因子あるいは因子分析の概念を掴んだあと第10章の実験例だけを参照されてもよい。どのみち計算部分はコンピューターに任せざるを得ないのであるから、結局は、第10章に述べたようなところが分析者の活躍の場となるからである。一般の読者も、第1章の次は第10章に飛んで因子分析法の輪郭を掴んだあと、第3章に戻るのも一法かもしれない。第2章は、行列の演算に関して必要が生じたときに参照すればよい。

各章とも、理論展開のあとに「作業手順」の一節を設け、展開した理論を手計算によって一つ一つ確認するようにした。細部にわたって理解するのに大いに役立つはずである。一方、因子分析法では反復計算が主要な役割を果たす関係上、併行してコンピューターによる完全計算も行なって一巡の手計算結果と対比するようにした。また各種分析法は、いずれも同一のモデルデータによって実証し、各種因子解の対比が可能ないようにした。手計算は、一巡だけでも膨大な作業量になったが、根気よく続けることによって、これまで見逃されていた問題点がいくつか浮彫りにされた。それらの問題点は一つ一つ検討し、その都度解明するようにした。

本書は、私の長男英志郎との共同研究で生まれたものである。彼は、現在日本電子専門学校で教鞭をとっているが、第1種情報処理技術者の資格をもち、目下、電子計算機室長を兼務しているらしい。富山と東京に別れ住んでいるため連絡上不便なことも多々あったが、こうして父子共同の研究成果がまとまってみると、やはり、一入感慨深いものがある。

本書の執筆に際して、新田隆信先生（富山大学経済学部長）・篠原三代平先生（成蹊大学教授）には終始温かい激励をいただき、種々便宜を図っていただいた。両先生のご厚情がなければ、本書が世に出る機会もなかったのではないかと思う。ここに厚くお礼申し上げたい。また、本書の出版を心よく引き受けて下さ

った国元書房ならびに終始面倒をみていただいた国元誠氏にも謝意を表する次第である。なお、校正については全面的にゼミ生倉川重見君の手を煩わしたことを付記しておく。

昭和 53 年 3 月 2 日

瀧 好 英

目 次

| | |
|------------------------|----|
| 第 1 章 序 論..... | 1 |
| 1. 1 因子の認識 | 2 |
| 1. 2 因子分析法の発達と問題点..... | 4 |
| 1. 3 因子分析法応用の実際例 | 6 |
| 第 2 章 行列の基礎 | 11 |
| 2. 1 行列とその基本演算 | 11 |
| 2. 2 ベクトル..... | 18 |
| 2. 3 対角行列 | 21 |
| 2. 4 行列の分割..... | 24 |
| 2. 5 固有値と固有ベクトル | 27 |
| 付 録 ラグランジュの未定乗数法 | 33 |
| 第 3 章 相関行列と因子構造 | 37 |
| 3. 1 相 関 行 列..... | 37 |
| 3. 2 因 子 構 造..... | 41 |
| 3. 3 相関行列と因子行列 | 48 |
| 第 4 章 セントロイド法 | 51 |
| 4. 1 セントロイド法の性格..... | 51 |
| 4. 2 第1因子抽出 | 53 |
| 4. 3 第2因子以下の抽出 | 60 |
| 4. 4 作 業 手 順..... | 61 |

| | |
|--|-----|
| 第 5 章 因子軸の回転 | 73 |
| 5. 1 因子解の単純構造 | 73 |
| 5. 2 因子軸回転の論理 | 78 |
| 5. 3 因子軸回転の作業手順..... | 89 |
| 第 6 章 主因子法 | 97 |
| 6. 1 主因子モデル | 97 |
| 6. 2 ヤコビ法による主因子解..... | 111 |
| 6. 3 主因子法の作業手順 | 118 |
| 補注 t の算定における根号選択の問題 | 126 |
| 第 7 章 直接バリマックス法..... | 129 |
| 7. 1 直接バリマックス法による因子解 | 129 |
| 7. 2 作業手順 | 139 |
| 7. 3 モデルによる各種解の比較 | 148 |
| 第 8 章 共通性の推定 | 153 |
| 8. 1 共通性の初期値決定に関する諸問題 | 154 |
| 8. 2 平方重相関係数 (SMC) 法..... | 156 |
| 8. 3 作業手順 | 167 |
| 8. 4 各種近似値の比較..... | 173 |
| 補注 1. 相関係数と決定係数 | 176 |
| 補注 2. 逆行列 $R_{(1,j)}^{-1}$ の R^{-1} との関係 | 180 |
| 第 9 章 因子スコアの算定と因子効果の評定 | 185 |
| 9. 1 因子スコアの推定..... | 185 |
| 9. 2 因子効果の算定 | 189 |

| | | |
|--------|-----------------------|-----|
| 第 10 章 | 因子分析の実験 | 192 |
| 10. 1 | 因子分析におけるデータ選択 | 192 |
| 10. 2 | 富山県における市町村の特性分析 | 195 |
| 10. 3 | 製造業における業種別分析 | 204 |
| 文 献 | | 213 |
| 索 引 | | 215 |

第 1 章 序 論

現今、もろもろの現象を定量的に把握し認識する方法が発達して、ほとんどあらゆる現象が統計データの形で記述されるようになった。そのこと自体については、いまさら多くをいう必要はあるまいが、しかし、その、われわれの間に一般化している定量化の方法は、現象を単なる事象の数ないし大きさとして記述するだけで、必ずしもその内面的・質的側面について定量的に把握する方向で十分に発展してはいない。

たとえば、多数の中学生に体育の実技テストを実施したとする。かつては、「上手」とか「下手」といった抽象的・主観的な判断基準に基づいて、甲・乙・丙などの評価がなされたものであるが、最近では、客観的評価の基準が定着した結果、その基準に照らして100点満点（または10点満点）の採点法が可能になり、上手・下手の定性的現象も定量的に記述されるようになった。しかしなお、その結果は、たとえば鉄棒が何点、平行棒が何点、走幅跳が何点というように、あくまでも演技種目ごとに評価されているだけであって、個々人の体育に関する能力の評価とは必ずしも直接の関連はない。つまり、鉄棒のうまい生徒は平行棒や走幅跳でも優れた成績を得るとはかぎらず、各人は、得手不得手に応じて演技に差を生ずるのであろうし、教師の採点は、それら演技種目の結果だけを一つの現象として評価することになる。中学生の能力を引き出し、向上させるといった面からみれば、演技の形よりもむしろ能力とその所在をつきとめることの方が大事であるかもしれない。

では、それら体育実技の各種目に働いていると考えられる人間の能力とは、一体いかなるものであろうか。そしてまた、その能力とは一つだけなのか、それともいくつかの相異なる能力が組み合わさっているものなのだろうか。この分野については全くの門外漢であるわれわれが明快な回答を引き出せるわけも

ないが、ちなみに、浅野長一郎氏は、その著『因子分析法通論』において興味深い叙述をなされている。「生物学から心理学への橋渡しを試みた H. Spencer の時代、精神能力というものは、情動などの知的でない因子の影響を除けば、知能という 1 因子に基づいて賢い人は何をやっても同様に賢く、愚かな人は何をやっても愚かであると 1 因子説が考えられていた。そして 1904 年に、C. Spearman が g と s の因子の存在をモデル化し、いわゆる 2 因子説を提唱した……」と。

体育の演技に際して、どのような能力がどのように作用するかの問題は、ここでは単なる導入部分のたとえ話として持ち出しただけであるが、しかし教育心理学の分野では、因子分析法を用いてそのような問題の解明につとめ、多くの成果を収めていることは事実である。はやくから定量的記述法が発達していた経済統計の分野において、経済分析の方法をいま一段と飛躍せしめるためには、経済現象に対する認識の仕方の角度を変えてみることも必要であろう。経済現象は、一定の経済法則が基礎になって生起しているとは考えられるが、その経済法則なるものも、実際には不十分な推測の域を出ておらず、諸法則の結合形態を解明することは至難とされる部分が多い。関数モデルが多く利用されるようになった現在でも、なおこの問題は十分に解明されていない。

1.1 因子の認識

体育テストの例に戻って、体育実技の得点が演技という結果現象の皮相的認識にすぎないというのなら、それ以上の何を知る必要があるのだろうか。そしてまた、どのようにしてそれ以上のことを知るができるのだろうか。

いま、体育テストとして、鉄棒数種目、平行棒数種目の実技のほか、走幅跳・三段跳・走高跳等々多数の種目が実施されたとする。もちろん、演技種目の一つ一つについて 100 点満点で得点がつけられる。

一方、鉄棒の各種目は、仮に腕力によって大きく左右されるが、平衡感覚や跳躍力も若干ずつ影響しているとする。また平行棒は、平衡感覚が最大の要素

で、これに次いで腕力・跳躍力の順に影響力をもっていると仮定する（もちろん全くの仮定ではあるが）。そして走幅跳や三段跳・走高跳などの種目は跳躍力が最大の要素で、腕力・平衡感覚も若干ずつ影響すると仮定する。簡単にするため、体育の実技を左右する内面的要素をこの三つだけと仮定して考えてみる。ところで、生徒一人一人は、多数の演技種目についてそれぞれ独立に採点され、得点数で各種目の上手・下手が定量的に記述されるが、腕力・平衡感覚・跳躍力というような体育に関しては本質的な要素と考えられるいわゆる能力が、有効に評価されたとはいえない。

そこで、これらテストの得点を、演技種目ごと個人別に配列すれば一つの統計データ一覧表ができる。もちろん、教師の採点は絶対公平というわけにはいくまい。教師の得意な種目、不得意な種目によって採点基準は同じではないかもしれないし、生徒個人にしても能力はあるがコンディションの良し悪しで演技の巧拙に偶然性が介入することは大いに予想される。しかし、生徒個人々の得点に偶然的要素が含まれているとしても、多数の生徒について概観すれば、必ずやそこに一定の法則が機能しているにちがいない。

多数の生徒の得点結果を種目間で対比すれば、たとえば、鉄棒のうちの「蹴上がり」と「逆上がり」の得点傾向にはかなり強い関係が認められるにちがいない。しかし、「蹴上がり」の得点傾向と「走幅跳」の得点傾向を対比した場合には、前の対比に比べてそれほど強い関係は認められないかもしれない。そしてまた、「走幅跳」と「三段跳」の得点傾向にはかなり強い関係があるとする。体育の得意な生徒はどの種目も優秀で、体育を苦手とする生徒はどの種目も低得点しかとれないということもあろうが、多数の生徒の得点傾向としてみれば、このように、特定種目間では強い相関を示しているのに、別の種目間ではあまり相関が認められないという傾向が出てくるはずである。

そうすると、たとえば「蹴上がり」と「逆上がり」の間では強い相関を示すが、それらと「走幅跳」や「三段跳」との間ではあまり強い相関を示さない何かが存在すると考えられるし、また「走幅跳」と「三段跳」の間では強い相関を示すが、それらと鉄棒種目との間では弱い相関しか示さない何かが存在する

と考えるのが自然であろう。つまり、鉄棒各種目間には共通に機能するが、他の種目にはわずかな影響力しかもたない要素と、「走幅跳」と「三段跳」の間で共通に必要なで他の種目においてはわずかししか要求されない要素が明らかに存在すると判断されれば、それらの要素が一体何を意味するかは、専門的立場から容易に判断しうるだろう。

この例のように、種目間に共通に機能していると考えられる要素が、因子分析法でいうところの**因子** (factor) に相当する。その因子を、教育心理学の分野ならば何らかの能力と解釈するかもしれないし、経済学の分野ならば経済変動の要因と解釈するかもしれない。いずれにせよ、因子分析の主たる仕事は、各種統計系列間の相互比較を通じて、それらの中に含まれているであろう共通の因子を抽出することにある。多数の統計系列が、それぞれ個々のデータを配列する方法で記述されていたのを、因子というほんのわずかな要素に縮約して記述を簡潔にしうると同時に、それまで個別的・皮相的認識に終始していた記述方式から、内面的・質的評価へと認識の角度が大きく転換せしめられることが期待されるわけである。

従来 of 統計学におけるこの種分析法では、一つまたは多数の原因 (独立変数) 群と一つの結果 (従属変数) とを想定して、それらの変数の間の回帰を求める方法が多く用いられてきた。計量経済モデルの構築も、この回帰分析の手法を発展させたものにほかならない。これに対して因子分析法では、原因も結果も問題ではなく、独立変数も従属変数もない。すべての変数 (統計系列) が、全く同じ立場に置かれ、結果としての現象相互間の相関から因子を見いだそうとする手法が用いられる。

1.2 因子分析法の発達と問題点

因子分析法は、現在でこそ広範に応用される統計学的手法として一般に認められているが、その由来をたどれば、心理学の分野において人間の能力や行動を心理学的に説明する数学モデルを構築する必要から起こっている。

因子分析法は C. Spearman の研究に始まり、1904年、彼が“American Journal of Psychology”に発表した『一般的知力の客観的決定および測定』によって誕生せしめられたといわれる。彼のこの研究は、一つの一般因子と多数の特殊因子を想定したいわゆる2因子論に基づくもので、当初は、因子という明確な形で展開されてはいなかったらしい。

因子分析法が多くの注目を浴び大きく発展したのは1930年代から40年代までの時期で、この時期に、まずスピアマンの2因子論がつねに妥当するわけではないことが解明された。すなわち、C. Spearman, Cyril Burt, Karl Pearson, Godfrey H. Thomson, J.C. Maxwell Garnett, Karl Holzinger らの研究がこの時期の特色で、その中には、一般因子の存在や四価差の標準偏差に関する研究、それに、セントロイド解の基本公式に関する論戦などがあげられる。かくしてスピアマンの2因子論は多群因子の理論に取って代われ、諸テスト間の相関行列から、直接いくつかの因子を抽出する可能性が論議の中心となり、ガーネットらの多因子分析の概念が生起することとなった。

1940年代における実際的な面での貢献者としては、L. L. Thurstone をあげなければならない。彼は多因子解法の立場に立って、現在広範に利用されている主因子解の計算上の妥協策としてセントロイド法を整備した第1人者の一人に数えられる。とりわけ、多因子解の方法が注目されるに伴って、諸因子の解釈をめぐる問題も生じてくるが、因子軸の回転を通じて因子の単純構造化を図る彼の持論は著名である。

1930年代、40年代における因子分析法の研究には目覚ましいものがあったが、実証的な面では膨大な計算量に突き当たり、実際の適用を遅らせていたものと考えられる。近年は高速電子計算機の使用が可能になり、その面の困難は克服されている。

かくして、いまや、高速電子計算機を駆使して因子抽出を行なう手法は、数えきれないほど案出されている。だが、そのためにまた、新しい少なくとも二つの問題が持ち上がっている。一つは、それら多数の因子分析法が存在するなら、特定のデータを分析するにはいずれの方法が最適なのかを判断する分析法

選択の問題であり、もう一つは、同一のデータ群に相異なるいくつかの因子分析法を適用したとき、当然、それぞれ異なる因子解を得ると考えなければならないが、それでは、どの因子解が正当な解なのかを定義づける問題である。

第1の問題は、直ちに一意的な規定はなしえない問題である。元来、因子分析の手法は、心理学の分野において、因子をどのように想定するかによってそれぞれ独自の分析法が案出され、次いで、それぞれの解析法に技術的な面が加わって、結局、現今のように多数の方法が出現したもので、そのうちのいずれを採用するかは、分析者の主観によることは避けられない。

また第2の問題は、分析の方法が違えば得られる因子解も違ってくるというのが自然の成り行きで、したがって、分析者の意図ないし事前の仮説を良く説明しうるかどうか、判断の基準になると考えざるをえない。一定のデータ群に対してある特定の因子分析法を適用し、その結果得られた因子解が、事前の仮説をよく説明しえなければ、それは、分析法が適当でなかったのかもしれないが、データの不適正にも原因があったかもしれない。双方を吟味して再度分析を試み、どうしても仮説が説明されなければ、仮説自体を修正することもありえよう。他の統計学的分析においても、一度の分析で仮説（意図）が完全に説明されることはむしろまれで、同様に、因子分析法に関しても一つの方法だけで完全解を期待するのは早計というほかはない。とくに因子分析法については、多数の変数群に関する完全な一意的解を得るものと考えべきではなく、むしろ、未知の領域について概括的輪郭を認識する基礎的な統計的手法と理解しておくのが無難であろう。

1.3 因子分析法応用の実際例

心理学の分野に生まれ育ってきた因子分析法も、いまでは、すでに統計学の一分野として多方面に応用され、ほとんどあらゆる分野に適用されていると聞く。しかし、それらの応用例の詳細に立ち入るのはここでの主旨ではない。経済分析の分野では比較的応用例が少ないところから、心理学的発想の殻がなお

付着している因子分析法も、多方面に適用可能であることを付言したいだけである。この主旨から、以下に、応用例の変わり種を二つほど紹介したい。

〔応用例 1〕 『インドの村落近代化に関する因子分析』——文献(23)

このケースは、「インドの村落社会を変革し、村落をして国内開発に参与せしめる経済的・社会的過程を分析」するために因子分析法を利用したものである。

まず、1967年夏現在での調査可能村落300地区の中から、標本として108地区が選定された。この地区が、前の体育テストの例における個体(生徒)に相当する。

次には、近代化の度合を表示するとみられる変数を選定しなければならないが、それには、正負いずれかの面で近代化を表現し、しかも標本地区別に定量的把握が可能なものでなければならない。結局、分析者は次の17種類の統計系列(場所系列)を採用した。

- ① 人 口
- ② カスト数
- ③ 商品化の度合(年間産出額に対する販売額の割合)
- ④ 農業技術の特質(灌漑されている耕作地の割合、化学肥料ないし殺虫剤を使用している農家世帯の割合)
- ⑤ 輸送手段までの距離と接近法(ここでの輸送手段とは、全天候道路・バスサービス・鉄道サービスを指している)
- ⑥ 社会法に対する認識(不可触賤民の身分を禁じた法律を知っている村民の割合)
- ⑦ 教育(通学児童5~14歳の割合、女子学童5~14歳の割合、読み書きのできる男子14歳以上の割合、村落内または付近で利用しうる教育施設)
- ⑧ 同居家族の型(単純世帯——一組の夫婦と未婚の子供——の割合)
- ⑨ 女子の結婚(14歳未満の女性で既婚者の割合)
- ⑩ 低カスト世帯の割合
- ⑪ 協同組合の会員(多目的協同組合の会員になっている世帯数の割合)

- ⑫ 所得（世帯当たり平均月間所得，所得分布の不平等性の度合）
- ⑬ 1人当たり耕作面積
- ⑭ 地域開発活動（地域共同体が企画している開発計画の件数と規模）
- ⑮ 農業における雇用量
- ⑯ 土地を所有している世帯の割合
- ⑰ 借地農業の割合

以上のデータ群に基づいて因子分析を行なった結果，顕著な因子として5個ほど認められ，それぞれは次のように特徴づけられるという。

第1因子：村落水準の経済的・社会的近代化の度合を表わしている。

第2因子：近代家族制慣行化の度合を示している。

第3因子：所属カストの低位性と協同組合組織度（この因子については明快な判断を避けている）。

第4因子：村落の貧困度を示している。

第5因子：土地保有の仕方，農業特化に有利な土地資源の度合を描写している。

以上の分析によって，分析者は「村落近代化に対する各種経済力の重要度ははっきりした」として，各種指標の経済的関連は「インドにおける農業開発政策が形式的な経済計画ともうまく関連づけられていることを暗示している」という。さらに，「インドの村落においては，因襲的な社会慣習を切り捨てることが，経済的向上や社会的状態の変化より遅れているように思われる」と判断している。

(1)

[応用例 2] 『現代作家の文体分析』——文献(15)

この分析ではまず，泉鏡花，国木田独歩ら100人の現代作家が個体として指定されている。次に，それぞれの作家の代表作品を1編ずつ（計100編）を選定し，『現代日本文学全集』（筑摩書房）に収録された紙面（1ページ3段組）から，各作品とも無作為に20個の段を抽出し，次の12項目について，標本スペース中に含まれている該当数を調べる。

(1) このタイトルは原名ではないが，便宜上このように呼ばせていただく。