数理統計学

—正規型理論に基礎をおいて—

シミオン　M．バーマン著

河田龍夫
川田孝行 訳

数理統計学

—正規型理論に基礎をおいて—

河田龍夫
川田孝行 訳

産業図書

MATHEMATICAL STATISTICS

An Introduction Based
On the Normal Distribution

Simeon M. Berman
Associate Professor of Mathematics
New York University

訳　者　序

本書は

Simeon M. Berman: Mathematical Statistics——An Introduction based on the Normal distribution——. Intext Educational Publishers. (1971)

の全訳である.

著者 Berman は現在ニューヨーク大学・クーラン研究所の助教授であり，確率過程論の研究者として，数多くの論文を発表している.

この書物が訳者に送られてきたとき，彼がこんな書物を出したのかと，最近発表の彼の論文の内容からして，やや意外な気がしないでもなかったが，それは余りにも専門分化してものをみることに慣れている者の偏見でもあった. そのあたりの興味も手伝ってこの本を教材として読んでいるうちに，大学２年生程度の教科書として大変すぐれていると考えるようになったのが，この訳をはじめた最初の動機であった.

実際，本書は数理統計学のかなりの範囲と多くの考え方を少ない準備のもとに一貫した論法で説きすすんでいる. 原書の副題がしめすように，専ら正規分布を各章の話題の中心に据えて，対象を制限することにより，かえって入門書としての統一性を保つことに成功していると同時に，そのほかの場合との相違点をも際立たせることにもなっている. そしてこの教科書を基礎にして，必要に応じて，さらに掘り下げて各論の勉強にすすむことができると思われる.

邦訳ができることがかえって学生諸君をして原書にむかわしめる機会を奪うことにもなり，ひいてはいわゆる「翻訳文化」を助長する一遠因にもなるとも考えられないこともないが，数理統計の多くの教科書が出版されているなかに

あって，やや異色の本書が並び置かれることも意味があると考え，読者諸賢の御批判を仰ぐ次第である．

出版に際して産業図書の江面竹彦氏，西川宏氏は注文ばかり多いこの種の作業に終始快く御協力下さった．ここに謝意をあらわす次第である．

1975年8月

河田龍夫
川田孝行

序　　文

数学分野における，あるいはどんな分野でもそうであるが，入門コースでは学習すべきことが多く，しかも時間には制約があるものである．したがって，教官は，二つのつぎの型のコースの何れかの選択をせまられることが多い．

（ａ） 多くの代表的な事柄を，時には関連しない分野でも，急いで紹介するという型と

（ｂ） 重要な特定の範囲を深く学習するという型である．

多くのコースではこれらの型の組合せであるが，通常どちらか一方に片寄りがちになる．どちらにも長所，短所はある．実際，(a) は広範囲にわたるがおそらくは浅い見方を与える．また (b) は深く掘り下げるが，おそらくはせまい観点を提供することになる．

数理統計の入門的な教科書はほとんどすべて (a) の型のコースがとられる．しかし，個人的には著者は (b) のコースの方が好きであって他の本とはちがったものを目指してこの本をかいたのである．

数理統計学へのこの入門書を読まれるのに，１変数の微積分の知識は前提としたが，２変数，３変数の場合は形だけ知っていればよいとした．**極限の概念**，**最小上界**つまり**上限**（l. u. b)†，**最大下界**つまり**下限**（g. l. b)††の概念は必要である．それは微積分の本ならどれにでも説明されている．確率に関しては，正式にしろ正式でないにしろ予備知識を必要としないが，一方もし知っていれば読みやすくなることはたしかである．

（訳注） 原著には，全体を通して l. u. b.，g. l. b. が用いられている．訳もそれに従うが，

† least upper bound を supremum といい sup と書き，

†† greatest lower bound を infimum といい inf と書くことが多い．

統計学のすぐれた入門書は多い．しかし，その中で測度論は前提としない水準で，数学的に完全で，統一的で，しかも推定論の古典的定理を尽している本は全くない．この線に沿った教科書が必要だ，というのがこの本を著す動機であった．この本では多くの話題を正規分布の場合にしぼっている．それはつぎの理由からである．

（i） 理論が完結していて，統一的である．

（ii） 正規分布論における多くの結果は，一般統計理論における結果の古典的な例であり，またその動機を与える例でもある．

（iii） 最もよく知られ，かつ最も広く実際に使われている統計的手法は正規分布に基礎をおく．

（iv） 応用上現われる多くの分布型は近似的に正規分布になるか，またはそれに変換できる．

（v） 正規性を仮定した統計的手法は，非正規的のときも多くの場合**強固**(robust)† である．

もちろん，正規分布の理論が統計学で，価値あるただ一つの分野であると主張しようとは思わない．実際，ノンパラメトリック統計の重要なテーマは，この正規性の仮定を除く必要性から生まれてきている．正規性の結果が一般の場合にどのように拡張されるかを簡単に示すために，各章最後に 1 節を設けた．それらの節では十分厳密ではないが，一般の場合の理論と関連して正規分布がどのような位置にあるかを示すよう意図した．

この本の多くの結果は，これを完全に説明しようとすれば，従来は，測度論にもとづくかなり高度の知識を必要とする書物にたよらねばならなかった（たとえば，E. Lehmann, Testing Statistical Hypotheses, H. Cramér, Mathematical Methods of Statistics)．しかし，それらはリーマン積分を基礎とした確率論でも証明できるのであって，もっと一般ではあるがもっと抽象的なルベーグ積分を用いなくてすむ．したがって，その確率測度が σ-加法族上の可算加法性という偉力を欠いているのは事実だが，重要な結果を証明するのにはそれで十分である．

---

†（訳注） この言葉の訳に，“強靱”，“頑健” とした本もある（参照：本書 4-6 節，12-5 節）．

ここでそのように証明できる例をあげよう.

1.　標本平均は母平均の一様最小分散不偏推定量である（Cramér-Rao の下限）.

2.　正規母集団の平均の片側検定は一様最強力である.

3.　両側検定は一様不偏最強力である.

4.　t-検定は一様不変最強力である.

5.　1要因分散分析の F-検定は不変検定の中でパラメータ空間の球上で最良平均検定力をもつ（完全な分布理論が展開される）.

6.　線形回帰モデルでつぎの観測点の通常の推定量は最良不偏推定量である.

もっと進んだ，この他のトピックで，測度論を使わない程度で，完全に取り扱ったものとしては：

7.　正規母集団の母平均の逐次検定がのべられる．観測すべき平均個数が数値的に推定できる．Wald の方程式は用いていない.

8.　Stein による2標本信頼区間が定義され，その正当なことの証明がされる．そこでは無限次元の標本空間または条件つき分布は用いていない.

数理統計学の入門コースで用いる方法は多岐にわたるのが普通である．たとえば，線形代数，フーリエおよびラプラス変換，高次元空間での積分などである．この本の大部分を通じて極く僅かの基本的な方法しか用いていない．標本空間における**回転**と**十分性**がそのうちの二つの方法である．回転の幾何的説明は完全にのべ，それと積分との関係を議論した．行列に関する理論とその記号はいっさい必要としない．多重積分の変換も，ヤコビヤンを用いる一般論にはたよらないで，そのかわり最も関連の深い場合の総合的な議論，すなわち回転の議論を展開した．また，十分性の概念は専ら測度論にもとづく教科書でのみ十分に扱われてきたのであるが，本書では正規型の場合に正規標本空間の特殊な性質を用いて，その理論を完全に示している．この標本空間では標本平均と標本分散を与えたときの関数の条件つき期待値は，その関数のある球面上での平均——球面平均——であって未知母数を含まない．このような球面平均に関

する理論は第6章にある．その主要な定理は，連続関数の正規標本空間上での積分は条件つき平均の積分に等しい，ということである．この結果は本書全体を通じて何回も用いられる．

測度論を用いる場合の統計理論の一つの要因は標本空間の部分集合のクラス（いわゆる事象）を使いやすいように定義することおよび確率測度―それに関する積分である．その重要性はよく知られている．たとえば，検定の棄却領域の概念には棄却確率――尤度関数のその領域上の積分――がはっきりと定義されなければならない．事象と積分の，この問題は入門的段階では無視されるか，またはうまく逃げているように思う．しかしながら本書ではそれを表面に出そうとした．第3章で，リーマン積分をふくむ中程度の積分論が展開される．その積分は**正則な**集合のクラスで定義される．この正則性の証明をすべて読むことは，初めて通読するとき，または簡単な教科コースでは必ずしも必要でなく適当でもないが，しかし読者はこの集合の定義と性質に慣れることが必要である．

著者の目的は現在，一般に興味ある問題をすべて扱うことではない．ベイズ理論，ミニマックス理論は正規性の理論ととくに関連しないので省いた．

本書は微積分を一とおり学んだ段階での数学の他の教科と同じ精神で，またそれらの教科の標準に照らして書くことを目指した．この本の意図は単に，統計学を専攻しようとする人々のためだけでなく，統計のコースをとっているが，他の純粋数学または応用数学を専攻する多くの学生たちのためでもある．正規母集団に関する古典的推定理論は，その理論構造の面からは古典的なニュートン・ポテンシャル論に類似していると思う．両者とも直接応用の分野から派生したものである．ポテンシャル論の多くの問題は多重積分の変分問題であることはよく知られているが，ここで展開した統計学の多くの問題はそれと非常に似た性質をもっている．

この本の構想は以上のようである．本書の構成は各章が節にわかれ，それに練習問題が続く．問題は本でのべた結果の応用，拡張，そして本では省いた議論の段階をたしかめることである．各章の節は大部分正規母集団に関するものである．各章の終りは，正規型の結果が一般の場合にどのように拡張されるかを示す1節で結んだ．また，付録の正規分布表を用いた数値例を示して結んだ

節もある．数値を求める練習問題は選択にまかせる．卓上計算機，コンピューターが使えるならば，できる問題である．実際の統計データの例は生物学，財政，教育，農業などの分野からのもので，これらは数学理論の有用性を示すために選んだ．

この教科書の目的は数理統計学の最初のコースを対象としたもので，それは

（i）　学部学生に対し，確率・統計の併合コースの第2学期用，

（ii）　大学院学生に対し確率を前提とした1学期または通年コース用，

に用いるのが普通であると思う．(i)の場合，教官は確率・統計を併合した通年コース用の本を選ぶことが多い．そのコースの確率論の内容は統計学に必要な項目からなっているのが普通である．本書では確率の特定の準備を必要としていないので，教官は通年コースの前期には確率論の本を任意に選ぶことができる．

この本は講義期間とその内容によって，いろいろのコースに使用できる．適当な内容を1学期でする講義要目には“選択”の意味の※印以外のすべての節をふくむのがよい．（選択の※印をつけた節の標題は目次にも示した）．この場合，第3章のいくつかは，そこで注意するように，省いてもよい．さらに広い講義要目では第3章のすべてと※印のないいくつかまたはすべてを含むことがすすめられる．

最後に，数表の転載を許可して下さったつぎの各位に感謝を表わしたい．Rand Corporation, E. S, Pearson 教授と Biometrika の評議会，Wistar 解剖・生物研究所，アメリカ工業教育学会，アイオワ州立大学出版部．

ニューヨーク，1970年12月

S. M. バーマン

目　　次

訳者序……………………………………………………………………… *1*
序　文……………………………………………………………………… *3*

第1章　母集団，標本，確率変数 ……………………………………… 1

1-1　母集団と標本…………………………………………………………… 1
1-2　無作為標本……………………………………………………………… 5
1-3　確率変数，確率分布，標本空間……………………………………… 8
1-4　乱　数……………………………………………………………………13
　　文　献……………………………………………………………………14

第2章　正規分布……………………………………………………………15

2-1　Duhamel の原理と標準正規分布 ……………………………………15
2-2　平均と分散，一般の正規分布…………………………………………19
2-3　正規分布表について……………………………………………………23
2-4　正規母集団の構成………………………………………………………25
2-5※　正規母集団の数値例…………………………………………………27
2-6　正規母集団の確率変数…………………………………………………32
2-7　正規乱数…………………………………………………………………32
2-8　一般の連続母集団………………………………………………………33
　　文　献……………………………………………………………………41

第3章　n 次元正規標本空間 ……………………………………………43

3-1 n 次元空間の幾何……44
3-2 回 転……47
3-3 $\boldsymbol{R}^n$ 上の積分……52
3-4 正則集合……61
3-5 正則集合上の積分……69
3-6 正規標本空間……72
3-7 一般母集団の標本空間……74
文 献……76

第4章 統計量とその分布……77

4-1 統計量の定義……77
4-2 統計量の分布とその密度関数……78
4-3 カイ自乗分布（χ^2-分布）……86
4-4 標本平方和の基本分解とその幾何的意味……89
4-5 正規分布の再生性：標本点の座標の和の分布……94
4-6 一般標本空間の統計量とその分布……97
4-7※ 統計量の分布の数値例……100
文 献……103

第5章 統計量の同時分布：独立性……105

5-1 2統計量の同時分布と独立性……105
5-2 標本平均と標本分散の同時分布……112
5-3 独立な2統計量の比の分布……114
5-4 統計量二つ以上の同時分布……120
5-5※ 一般母集団の統計量の同時分布……121
文 献……122

第6章 球面平均，十分性，2乗可積分関数……123

6-1 連続関数の球面平均……123

6-2　条件つき平均と十分性 …… 127
6-3　2 乗可積分関数 …… 131
6-4※　一般標本空間での十分性と 2 乗可積分関数 …… 137
文　献 …… 140

第 7 章　未知母数の推定 …… 141

7-1　統計的な背景 …… 141
7-2　推定問題の定式化と十分性による簡単化 …… 145
7-3　最小化問題の解：Cramér-Rao の下限 …… 148
7-4※　σ^2 の推定（μ：未知の場合）…… 151
7-5※　一般母集団の母数の推定 …… 155
7-6　数値例 …… 160
文　献 …… 162

第 8 章　信頼区間 …… 163
8-1　μ の信頼区間（σ：既知の場合）…… 163
8-2　μ の信頼区間（σ：未知の場合）…… 166
8-3※　Stein の"2 段階標本手順" …… 169
8-4※　信頼区間についての注意（正規分布以外の場合）…… 176
8-5　信頼区間の数値例 …… 177
文　献 …… 179

第 9 章　仮説検定 …… 181
9-1　単一仮説 …… 181
9-2　Neyman-Pearson の補題と最強力検定 …… 187
9-3※　複合対立仮説；不偏検定 …… 192
9-4※　複合仮説；不変検定 …… 201
9-5※　一般母集団の仮説検定 …… 209
9-6　数値例 …… 212
文　献 …… 213

第10章 逐次検定 ……215

10-1 観測数と逐次検定……215
10-2 “壁” A と B の設定 ……220
10-3 逐次検定の平均標本個数……224
10-4 一般母集団に関する逐次検定……229
10-5 数値例……232
文 献 ……233

第11章 多数正規母集団からの標本抽出 ……235

11-1 ボールのはいった箱からの標本抽出と n 個の正規母集団からの標本抽出……235
11-2 平方和の分解とその幾何的説明……238
11-3 平均の1次関数の推定；(多数正規母集団の場合)……242
11-4 非心カイ自乗分布……249
11-5 均一性の検定と不変検定……252
11-6※ 多数・一般母集団からの標本抽出と平均の線形推定……259
文 献……261

第12章 線形回帰 ……263

12-1 線形回帰モデルの実際的背景……263
12-2 最小自乗法とその幾何的説明……266
12-3 線形回帰モデル＝その統計的推測と分布理論＝……271
12-4 予 測……279
12-5 線形回帰（正規型でない場合） ……285
12-6 正規線形回帰の数値例……289
文 献……291

第13章 1要因分散分析 ……293

13-1 実際的な背景，観測の繰返し，自乗和の分解……293

13-2　分散分析とそれに関連する統計量の分布……296
13-3※　分散分析の理論的根拠＝不変性と平均検出力＝……303
13-4　1要因分散分析モデルにおける母数の推定……314
13-5※　数値例……316
13-6　実際例（教育方法の比較）……317
文　献……319

第14章　相関と2変数正規分布……321

14-1　2変数正規分布の定義と実際的背景……321
14-2　2変数正規分布の解析的性質……326
14-3　2変数正規母集団からの標本抽出；標本相関係数……330
14-4※　仮説“$\rho=0$”の検定……334
14-5※　一般の2変数母集団……337
文　献……340

付　録……341

表Ⅰ　正規曲線の面積……341
表Ⅱ　カイ自乗分布のパーセント点……342
表Ⅲ　t-分布のパーセント点……344
表Ⅳ　F-分布の上側5％点……345
表Ⅴ　乱数表……347
表Ⅵ　正規乱数……353

索　引……359

第1章　母集団，標本，確率変数

1-1　母集団と標本

統計学は母集団の数量的特性に関して決定する科学である．母集団とは人のグループだけでなく，どんな性質をもった対象でも一つの集合と考えられるものであればよい．たとえば，動物の発育にある栄養添加飼料がどの程度効果があるのかを調べている動物学者にとっては，母集団は動物であり，数量的特性は発育（重さの変化）である．このとき決定すべきことは，その栄養添加飼料を使用すべきか否かである．また，建築材を強化する化学処理の効果を調べている技術者にとって，母集団は種々の建築材であり，数量的特性はその強度である．決定事項は化学処理をすべきか否かである．その他，多くの例が経済学，心理学，物理学など多くの分野でみられる．

統計学の基本方法は母集団から比較的少数の標本を抽出すること，その標本の対象となる数量的特性を観測，計測すること，そしてその標本観測により決定を基礎づけることである．動物学者が栄養添加飼料を使用するか否かを決定する場合，いわゆる動物実験という標本の効果，計測に基礎をおく．技術者が化学処理に関する決定をする場合，標本の実験，計測に基礎をおく．

統計学の数学的理論は**抽象的**母集団からの抽出方法と決定方法の数学に関係するが，それは実際の研究の**具体的**母集団に応用できる．直観的に理解するために，標識のついたボールがはいった箱を抽象的母集団と考えよう．各標識は実数 x である．この章では，**有限**な確率の基礎を紹介するが，これはあとの章で正規母集団とその標本空間を学ぶための論理的な前提としてあとで必要なものである．

箱の中のボール全体（それは有限個だが）を**母集団**とよぶ．その部分集合に**完全な順序**

関係がある場合，**標本**という．ここでつぎのことを想い起こそう．集合における関係とは二つの要素についての関係で，$<$ であらわす．つまり，$A<B$ で相異なる要素 A, B 間の関係を示す．**順序関係**は推移的である．つまり，もしも A, B, C が三つの要素で，$A<B$ かつ $B<C$ ならば，$A<C$ が成り立つことである．**完全**順序関係であるというのは，任意の組 A, B に対して，関係 $A<B$ か $B<A$ かのいずれか一方が成り立つことである．**標本**はある順序をもった要素の部分集合のことである．たとえば，$A, B, C, \cdots$ がその部分集合に属し，その順序が $A<B<C<\cdots$ ならば，標本は $[ABC\cdots]$ とあらわせる．

例 1-1

箱の中に標識 A, B, C, D のついた4個のボールがはいっている．標識 A, C, D からなる部分集合はつぎの六つの異なる完全順序関係にある．

$$A<C<D,\ \ A<D<C,\ \ C<A<D,$$
$$C<D<A,\ \ D<C<A,\ \ D<A<C.$$

これらに対応する標本はそれぞれ

$$[ACD],\ [ADC],\ [CAD],$$
$$[CDA],\ [DCA],\ [DAC],$$

であらわせる．■

つぎの順列組合せの基本補題は，ある大きさの母集団から抽出する場合の，大きさ一定の標本の総数に関するものである．

補題 1-1

大きさ N の母集団から n 個のボールを抽出してできる標本の総数は

$$N(N-1)\cdots(N-n+1), \tag{1-1}$$

または，同じことであるが，

$$N!/(N-n)!$$

で与えられる．

証明 ボール N 個の母集団から標本を抽出する場合，その標本の第1番目にこれるのは N 個である．その中1個が決まれば，標本の第2番目にこれるのは残りの $(N-1)$ 個である．母集団のボール全体の標識を $A_1, \cdots, A_N$ とする．このとき標本の第1，第2番