2003

公共课系列

研究生入学考试应试指导丛书

Entrance Exams for MD

北京大学研究生院策划

研究生入学考试
数学模拟试卷
（经济学类）

范培华　姚孟臣
李永乐　刘书田　编著

9

北京大学出版社

2003年研究生入学考试应试指导丛书

数学模拟试卷

（经济学类）

范培华　姚孟臣
李永乐　刘书田　编著

北京大学出版社
·北　　京·

图书在版编目(CIP)数据

数学模拟试卷·经济学类/范培华，姚孟臣，李永乐，刘书田编著. —北京：北京大学出版社，2002.3

(2003年研究生入学考试应试指导丛书)

ISBN 7-301-04479-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①范… ②姚… ③李… ④刘… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.013-44

内 容 简 介

本书是经济和管理类硕士研究生入学考试数学科目的模拟精练用书.本书作者多年来一直参加有关经济类考研数学试卷的命题、阅卷和考研辅导班的教学，深知考生的疑难与困惑.作者把他们的教学经验以及潜心研究试卷命题的体会加以细化、归纳和总结，整理成书奉献给广大读者，旨在提高考研者的考试成绩与命中率.

本书由两部分组成：一部分是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试题共十四份，其中数学三、四各7份；另一部分是1999、2000、2001和2002年全国硕士研究生入学统一考试数学三、四考研试题及解答.本书作者是在深入研究了历年考研试卷的结构、知识点及难度的分布，并紧密结合他们的命题实践、阅卷过程中常见问题及在全国各大城市"考研辅导班"辅导的经验来编好每一道题.因此，每一份试卷都从不同角度选择了具有多种风格的题目，基本上涵盖了全部命题思路，能够达到实际考试效果.

本书可作为经济类硕士研究生入学考试数学考试科目应试者的一本模拟精练用书，也可作为理工类考研者的模拟用书.对于在校的经济类和管理类本科生、大专生、及自学考试者本书也是一本较好的学习用书和参考书.

书　　名：数学模拟试卷(经济学类)
著作责任者：范培华　姚孟臣　李永乐　刘书田　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-04479-8/G·563
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京飞达印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787×1092　16开本　12.875印张　330千字
2001年5月第2版　2002年3月第1次修订
2002年3月第2次印刷
定　　价：16.00元

前　言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的数学内容，我们根据教育部制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，结合我们多年参加数学考研及有关考试的命题、阅卷和辅导积累的经验，编写了这套数学《2003年研究生入学考试应试指导丛书》，其中包括复习指导书：《高等数学（工学类）》、《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》以及《数学模拟试卷（经济学类）》共5册，其中《线性代数》、《概率论与数理统计》供数学一至数学四考生共同使用，《微积分》、《数学模拟试卷（经济学类）》为经济学与管理学考生所编写。

本套应试指导丛书的每一章由以下四部分构成：

一、考试要求——编写这部分的目的是使广大考生明确每一章考的内容是什么，掌握到什么程度就可以了。在编写过程中，根据我们多年以来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，使广大考生能够正确把握考试要求，这是区别于其他考研辅导书的一大特点。

二、重要定义、定理及公式——这部分根据考试大纲的要求，将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要地叙述、归纳和总结；精选了各种典型的例题并作详细的解答，使得考生能够在较短的时间内对重点、难点、热点问题进行复习，全面、系统地掌握所需要的知识，在考试时能够拿得出、用得上。

三、典型例题分析——这部分根据考试大纲要求的题型进行了分类、归纳，总结了各种题型解题的方法及技巧，开阔了考生的解题思路，使所学的知识能够融会贯通，并迅速提高考生的综合解题能力。

四、练习题——每章的最后部分精选了适量的练习题，全部习题都附有答案或提示，这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用，这有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

《数学模拟试卷（经济学类）》一书由两部分组成：一部分是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试题共十四份，其中数学三、四各7份；另一部分是1999、2000、2001和2002年全国硕士研究生入学统一考试数学三、四考研试题及解答。

本套书可作为参加硕士研究生入学考试数学一至数学四考生的复习指导书，对于在校的大学生、大专生及自学考试者，本套书也是较好的学习参考用书。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2002年3月

目　录

第一部分　模拟试题

第二部分　1999～2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三、四试题参考解答

第一部分　模 拟 试 题

数学三模拟试题(一)

注意:(1) **本卷共十二个大题,满分** 100 **分**

(2) **根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用** $\tan x$,$\cot x$,$\arctan x$ **和** $\operatorname{arccot} x$ **表示**

得分	评卷人

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin t^2\mathrm{d}t$ 所确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ____1+csc1____.

2. 设 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$,其中 $\varphi(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ____cos xy____. - xysinxy - $\frac{1}{y^2}\varphi'$

3. 三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$ 的秩为 2,则 $a=$ ____−1____.

4. 设 X 是在[0,1]上取值的连续型随机变量,且 $P\{X\leqslant 0.29\}=0.75$,如果 $Y=1-X$,有 $P\{Y\leqslant k\}=0.25$,则 $k=$ ____0.71____.

5. 设 A,B,C 是两两独立且不能同时发生的随机事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=p$,则 p 的最大值为____1/2____.

得分	评卷人

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续;　　(B) 连续但不可导;

(C) 可导但 $f'(x)$ 不连续;　　(D) 可导且 $f'(x)$ 连续.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 有连续的导数,又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=2$,则(　　).

(A) $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点;

(B) $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点;

(C) $(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

(D) $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(1,f(1))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

3. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为 $\begin{cases}x_1+\ x_2+\ x_3=0,\\ x_1+tx_2+\ x_3=0,\\ x_1+\ x_2+tx_3=0,\end{cases}$ 若存在三阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 |A|=0

(　　).

(A) $t=-2$，且 $|\boldsymbol{B}|=0$；　　(B) $t=-2$，且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$；

(C) $t=1$，且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$；　　(D) $t=1$，且 $|\boldsymbol{B}|=0$.

4. 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$ 相似的矩阵是(　　).

(A) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\3&0&1\end{bmatrix}$；　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$；　(C) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\1&0&0\end{bmatrix}$；　(D) $\begin{bmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

5. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $p(x)$ 是一个偶函数，$F(x)$ 为 X 的分布函数，则对任意实数 $x\in\boldsymbol{R}$，有 $F(-x)+F(x)$ 等于(　　).

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) -1.

得分	评卷人

三、(本题满分 6 分)

设 a,b 为常数，有 $a>b>0$，n 为大于 1 的自然数，试证明不等式

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}<\sqrt[n]{a-b}.$$

得分	评卷人

四、(本题满分 6 分)

设 $y'=\arctan(x-1)^2$，$y(0)=0$，求 $I=\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$

得分	评卷人

五、(本题满分 6 分)

设生产某种产品须投入两种要素，K 和 L 分别为两种要素的投入量，Q 为产品的产出量. 若生产函数为 $Q=50K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$. 又设两种投入要素的价格分别为 6 和 4，当成本约束为 72 时，试确定两种要素的投入量，以使产量最高，并求最高产量.

$K=8.\ L=6$　　$Q_{max}=200\sqrt[3]{6}$

得分	评卷人

六、(本题满分 7 分)

设可微函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定的隐函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值.　极小值　$z(-2,0)=1$

极大值　$z(\frac{16}{7},0)=-\frac{8}{7}$

得分	评卷人

七、(本题满分 6 分)

设有级数 $2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，

(1) 求此级数的收敛域；$(-\infty, +\infty)$

(2) 证明此级数满足微分方程 $y''-y=-1$；

(3) 求此级数的和函数. e^x+1

得分	评卷人

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，试证：

(1) 若 $f(x)$为偶函数,则 $F(x)$也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$单调不增,则 $F(x)$单调不减.

得分	评卷人

九、(本题满分 8 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$有特征值 $\lambda=1$,求 a 取最大值时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量, $a=-1$ $\lambda_1=\lambda_2=1$ $\lambda_3=4$

并说明 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化. 不能

得分	评卷人

十、(本题满分 9 分)

设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r+1}$是 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 $r+1$ 个线性无关的解,若秩 $r(\boldsymbol{A})=n-r$,证明该方程组的任一解均可表示为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r+1}$的线性组合.

得分	评卷人

十一、(本题满分 8 分)

在电源电压不超过 200 伏,200～240 伏和超过 240 伏三种情况下,某仪器损坏的概率分别为 0.1,0.001 和 0.2,假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,25^2)$,试求 (1) 该仪器损坏的概率 α; (2) 该仪器损坏时,电源电压为 200～240 伏的概率 β.(已知 $\Phi(0.8)=0.788$)

0.06419b 0.00906

得分	评卷人

十二、(本题满分 8 分)

设 A 和 B 是试验 E 的两个事件,且 $P(A)>0,P(B)>0$,并定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 发生}, \\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生};\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 发生}, \\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生}.\end{cases}$$

证明：若 $\rho_{XY}=0$,则 X 和 Y 必定相互独立.

参 考 答 案

一、填空题

1. 答案是：$1+\frac{1}{\sin 1}$.

分析 由已知方程可得 $y(0)=1$. 已知方程两端对 x 求导，得

$$1=\sin(y-x)^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1\right),$$

将 $y(0)=1$ 代入上式即可.

2. 答案是：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi_v'\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\left[\varphi_{vu}''\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}\varphi_{vv}''\left(x,\frac{x}{y}\right)\right]$.

分析 $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi_v'\left(x,\frac{x}{y}\right)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi_v'\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\left[\varphi_{vu}''\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}\varphi_{vv}''\left(x,\frac{x}{y}\right)\right].$$

3. 答案是：-1.

分析 二次型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & a\\ -1 & a & 0\end{bmatrix}.$$

由于二次型的秩 $\mathrm{r}(f)=2$，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. 显然 $\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$，因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2\Longleftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$. 可解出 $a=-1$.

4. 答案是：0.71.

分析 设 X 的分布函数为 $F(x)$，于是

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-X\leqslant y\}=P\{X\geqslant 1-y\}\\&=1-P\{X<1-y\}=1-F(1-y).\end{aligned}$$

欲使 $P\{Y\leqslant k\}=0.25$，即有 $F_Y(k)=1-F(1-k)=0.25$，即 $F(1-k)=0.75$，由于 $F(0.29)=0.75$，所以可取 $1-k=0.29$，从而 $k=0.71$.

5. 答案是：$\frac{1}{2}$.

分析 由题设，有

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=p^2,\quad P(ABC)=0,$$

于是

$$\begin{aligned}P(A+B+C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=3p-3p^2.\end{aligned}$$

而 $$P(A+B+C)\geqslant P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2p-p^2,$$

有 $$3p-3p^2\geqslant 2p-p^2,$$

即 $$p(1-2p)\geqslant 0,$$

解得 $$p\leqslant\frac{1}{2}.$$

二、选择题

1. 答案是：D.

分析　先考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否可导. 若不可导，再考察在 $x=0$ 处是否连续. 若可导，则进一步求 $f'(x)$，考察 $f'(x)$ 在 $x=0$ 是否连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{|x|}=\frac{\pi}{2}.$$

$x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\arctan\frac{1}{|x|}+x\frac{1}{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}\left(\frac{1}{|x|}\right)'=\arctan\frac{1}{|x|}+x\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{-\operatorname{sgn}x}{x^2}$$

$$=\arctan\frac{1}{|x|}-\frac{x}{1+x^2}\operatorname{sgn}x,$$

其中 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 因此，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\frac{\pi}{2}=f'(0)$，即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

2. 答案是：B.

分析　考虑 $f'(1)$ 与 $f''(1)$.

$$\lim_{x\to 1}f'(x)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f'(x)}{x-1}(x-1)\right]=2\cdot 0=0=f'(1),$$

又

$$f''(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=2>0,$$

由 $f'(1)=0,f''(1)>0$ 知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

3. 答案是：D.

分析　因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，即齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故 $|\boldsymbol{A}|=0$. 作为选择题对于 $t=-2$ 与 $t=1$ 显见 $t=1$ 时 $|\boldsymbol{A}|=0$，因而排除(A)，(B).

若 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆，那么对 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 用 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 右乘可得到

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{ABB}^{-1}=\boldsymbol{OB}^{-1}=\boldsymbol{O}.$$

与已知矛盾，所以 $|\boldsymbol{B}|=0$.

4. 答案是：C.

分析　$\boldsymbol{A}$ 是下三角矩阵，故主对角线元素是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，那么 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，因此

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & 0\end{bmatrix}.$$

仅(C)中矩阵特征值是 2，3，0 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其他 3 个矩阵虽然能对角化，但因特征值与 $\boldsymbol{A}$ 不同，所以均不与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

5. 答案是：B.

分析

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t\xlongequal{s=-t}\int_{+\infty}^{-x}p(-s)\mathrm{d}(-s)=-\int_{+\infty}^{-x}p(s)\mathrm{d}s=\int_{-x}^{+\infty}p(s)\mathrm{d}s,$$

$$F(-x)+F(x)=\int_{-\infty}^{-x}p(s)\mathrm{d}s+\int_{-x}^{+\infty}p(s)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{+\infty}p(s)\mathrm{d}s=1.$$

可见应选 B.

三、分析 证明数值不等式的**思路**：可采用特殊——一般——特殊，即先由待证的数值不等式（或经恒等变形）作相应的辅助函数；其次证明该辅助函数的不等式；最后取 x 为某一特定的值即为待定的不等式.

证 设 $F(x)=\sqrt[n]{x-b}-\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{b}$，$x\in(b,+\infty)$. 因

$$F'(x)=\frac{1}{n}[(x-b)^{\frac{1}{n}-1}-x^{\frac{1}{n}-1}]>0,\quad x\in(b,+\infty),$$

所以 $F(x)$ 在 $x>b$ 时单调增加；又 $F(b)=0$，故当 $x>b$ 时，有 $F(x)>0$，即

$$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{b}<\sqrt[n]{x-b}.$$

取 $x=a>b$，有

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}<\sqrt[n]{a-b}.$$

四、分析 不必由 y' 先去求 $y(x)$，再求 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$. 可以将 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$ 用分部积分法，转化为求与 $y'(x)$ 有关的定积分.

解
$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 y(x)\mathrm{d}(x-1)=(x-1)y(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)y'(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\arctan(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)^2\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t\arctan t\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln(1+t^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

五、解 由题设知，生产该产品的成本函数为

$$C=6K+4L.$$

本题是在约束条件 $6K+4L=72$ 之下求生产函数 $Q=50K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$ 的最大值.

作拉格朗日函数

$$F(K,L)=50K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}+\lambda(6K+4L-72).$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial K}=\dfrac{100}{3}K^{-\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}+6\lambda=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial L}=\dfrac{50}{3}K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}}+4\lambda=0, & (2)\\ 6K+4L-72=0. & (3)\end{cases}$$

由(1)式和(2)式的比可得 $L=\frac{3}{4}K$.

将 L 的表示式代入(3)式得 $K=8$，从而 $L=6$.

因驻点惟一，且实际问题存在最大值，故两种要素的投入量当 $K=8,L=6$ 时，产量最高. 最高产量为

$$Q=200\sqrt[3]{6}.$$

六、分析 求隐函数的极值与求显函数的极值是一样的，只不过需用隐函数求导法计算

z'_x, z'_y 及 B^2-AC.

解 先求隐函数的驻点，将方程两端对 x,y 求导，得

$$\begin{cases} 4x + 2zz'_x + 8z + 8xz'_x - z'_x = 0, & (4) \\ 4y + 2zz'_y + 8xz'_y - z'_y = 0. & (5) \end{cases}$$

令 $z'_x=z'_y=0$，得 $\begin{cases} 4x+8z=0, \\ y=0. \end{cases}$ 代入原方程得 $7z^2+z-8=0$ 得驻点及其函数值

$$\begin{cases} z = -8/7, \\ x = 16/7, \\ y = 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} z = 1, \\ x = -2, \\ y = 0. \end{cases}$$

将(4)式对 x 求偏导，(4)式对 y 求偏导，(5)式对 y 求偏导，得

$$\begin{cases} 4 + 2z'_x z'_x + 2zz''_{xx} + 8z'_x + 8z'_x + 8xz''_{xx} - z''_{xx} = 0, \\ 2z'_y z'_x + 2zz''_{xy} + 8z'_y + 8xz''_{xy} - z''_{xy} = 0, \\ 4 + 2z'_y z'_y + 2zz''_{yy} + 8xz''_{yy} - z''_{yy} = 0. \end{cases}$$

将 $z'_x=0, z'_y=0, x=\dfrac{16}{7}, y=0, z=-\dfrac{8}{7}$ 代入得

$$B^2 - AC = (z''_{xy})^2 - z''_{xx} \cdot z''_{yy} = 0^2 - \left(-\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{4}{15}\right) < 0.$$

又 $A=-\dfrac{4}{15}<0$，所以 $z\left(\dfrac{16}{7},0\right)=-\dfrac{8}{7}$ 为极大值.

将 $z'_x=z'_y=0, x=-2, y=0, z=1$ 代入得

$$B^2 - AC = (z''_{xy})^2 - z''_{xx} \cdot z''_{yy} = 0^2 - \left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{4}{15}\right) < 0.$$

又 $A=\dfrac{4}{15}>0$，故 $z(-2,0)=1$ 为极小值.

七、分析 本题之(3)，求级数的和函数不能用通常的办法求得，须应用(2)的结果，从求微分方程满足相同初始条件的特解来求得级数的和.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}=0$，故知级数对任何 x 收敛，即收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 设 $y(x)=2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，则 $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

代入微分方程得

$$y'' - y = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) - \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = -1.$$

得证级数满足方程.

(3) 由级数的和函数 $y(x), y'(x)$ 可知：

$y(0)=2, y'(0)=0$，故知满足 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的方程 $y''-y=-1$ 的特解，即是原级数

的和函数.

由 $r^2-1=0, r=\pm1$,得对应齐次方程通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

又设该方程的一个特解为 y^*,显然 $y^*=1$,故微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+1.$$

由 $y(0)=2, y'(0)=0$,可定出 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$. 故级数的和函数为$\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})+1$,即

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})+1=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

八、证 (1) 因 $f(-x)=f(x)$,则

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t.$$

令 $t=-u$,于是

$$F(-x)=-\int_0^x(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-2u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=F(x),$$

即 $F(x)$为偶函数.

(2) $F'(x)=\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)$

$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)],$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

因为 $f(x)$单调不增,则

当 $x>0$ 时,$f(\xi)-f(x)\geqslant0$,故 $F'(x)\geqslant0$;

当 $x=0$ 时,显然 $F'(0)=0$;

当 $x<0$ 时,$f(\xi)-f(x)\leqslant0$,故 $F'(x)\geqslant0$.

由此得 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$F'(x)\geqslant0$.

综上所述,若 $f(x)$单调不增,则 $F(x)$单调不减.

九、解 因为 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,故

$$|E-A|=\begin{vmatrix}0&-1&-a\\-a&0&2\\-1&1&-3\end{vmatrix}=a^2+3a+2=0.$$

解出 $a=-1$ 及 $a=-2$,由题意所以取 $a=-1$. 此时特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\1&\lambda-1&2\\-1&1&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-[1+1+4]\lambda^2+\left(\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-2\\-1&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&4\end{vmatrix}\right)\lambda-|\boldsymbol{A}|$$

$$=\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4=0,$$

由此得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=4$.

当 $\lambda=1$ 时，$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=1$ 的特征向量.

当 $\lambda=4$ 时，由$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即由

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得$(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=4$ 的特征向量.

因为 $\lambda=1$ 是二重特征值，但仅有一个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

十、解 由方程组解的结构，知 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_{r+1},\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_r-\boldsymbol{\beta}_{r+1}$是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 若

$$k_1(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_{r+1})+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_{r+1})+\cdots+k_r(\boldsymbol{\beta}_r-\boldsymbol{\beta}_{r+1})=\boldsymbol{0},$$

即

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r-(k_1+k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{\beta}_{r+1}=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r+1}$线性无关，故

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0.$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_{r+1},\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_r-\boldsymbol{\beta}_{r+1}$线性无关. 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-r$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_{r+1},\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_r-\boldsymbol{\beta}_{r+1}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，那么 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解 $\boldsymbol{\gamma}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}_{r+1}+l_1(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_{r+1})+l_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_{r+1})+\cdots+l_r(\boldsymbol{\beta}_r-\boldsymbol{\beta}_{r+1}).$$

命题得证.

十一、解 引进事件 $A_1=\{$电压不超过 200 伏$\}$，$A_2=\{$电压为 200～240 伏$\}$，$A_3=\{$电压在 240 伏以上$\}$；$B=\{$仪器损坏$\}$. 由题设 $X\sim N(220,25^2)$，可见有

$$P(A_1)=P\{X\leqslant 200\}=P\left\{\frac{X-220}{25}\leqslant\frac{200-220}{25}\right\}=\Phi(-0.8)=0.212,$$

$$P(A_2)=P\{200<X<240\}=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576,$$

$$P(A_3)=P\{X\geqslant 240\}=1-0.212-0.576=0.212.$$

(1) 由题设条件知，$P(B|A_1)=0.1$，$P(B|A_2)=0.001$，$P(B|A_3)=0.2$，于是由全概率公式，有

$$\begin{aligned}\alpha=P(B)&=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)\\&=0.212\times0.1+0.576\times0.001+0.212\times0.2=0.0462.\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式，知

$$\beta=P(A_2|B)=\frac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)}\approx 0.09.$$

十二、证 只需证明对于(X,Y)的一切可能值(x_i,y_j)，

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}\quad(i,j=1,2).$$

X,Y 的分布律分别为

X	0	1
p_i	$1-P(A)$	$P(A)$

Y	0	1
p_j	$1-P(B)$	$P(B)$

XY 的分布律为

XY	0	1
p_k	$1-P(AB)$	$P(AB)$

于是有
$$E(X)=P(A),\quad E(Y)=P(B),\quad E(XY)=P(AB).$$

由 $\rho_{XY}=0$ 推出 $E(XY)=E(X)E(Y)$，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 A,B 相互独立，即 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立. 从而有
$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=P\{X=0\}P\{Y=0\}.$$

类似地可推出
$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\},$$
$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\},$$
$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\},$$
因此 X 与 Y 相互独立.

数学三模拟试题(二)

注意:(1) **本卷共十二个大题,满分** 100 **分**

(2) **根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用** tan$x$,cot$x$,arctan$x$ **和** arccot$x$ **表示**

得分	评卷人

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^{-x}}dx=$ 1/3 .

2. 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n n}x^{2n-3}$ 的收敛半径 $R=$ $\sqrt{2}$.

3. 设 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,α 是 n 维列向量,α^{T} 是 α 的转置. 若 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=2$,则矩阵 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}-\frac{1}{3}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的 n 个特征值是 4/3, . 2, ... 2 (n-1)个

4. 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<+\infty,$$

则 $E[\min(|X|,1)]=$ $\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}$

5. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$,(x_1,x_2) 为取自此总体的一个样本,则 $Y=\frac{(x_1+x_2)^2}{(x_1-x_2)^2}$ 服从分布 ________.

得分	评卷人

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$. 若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$,则( ).

(A) $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值;

(B) $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值;

(C) 点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

(D) $f(x_0)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点,点 $(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

2. 微分方程 $y''-2y'-3y=e^{4x}$ 的一个特解是( ).

(A) $y=\frac{1}{5}e^{4x}$; (B) $y=5xe^{4x}$; (C) $y=\frac{1}{5}xe^{4x}$; (D) $y=5e^{4x}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,那么对任何 n 维向量 $\boldsymbol{b}$,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$(其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置)必满足( ).

(A) 有无穷多解; (B) 无惟一解;