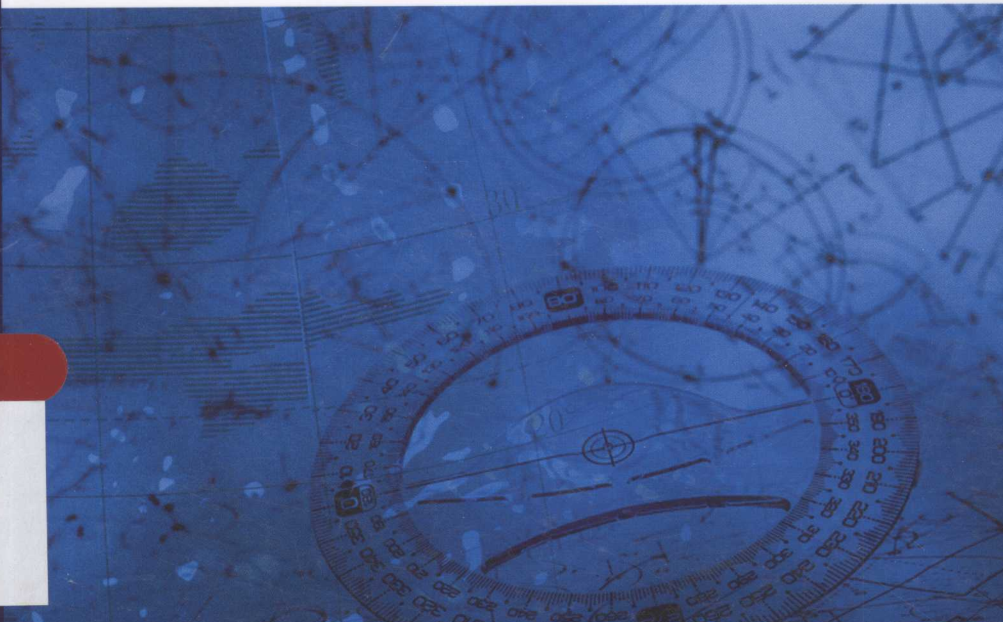
Introduction to
Modular Curves

模曲线导引

（第2版）

黎景辉　赵春来◎著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

Introduction to Modular Curves

模曲线导引

（第2版）

黎景辉　赵春来◎著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

模曲线导引：第2版/黎景辉，赵春来著. —2版. —北京：北京大学出版社，2014. 2

ISBN 978-7-301-23438-9

Ⅰ. ①模… Ⅱ. ①黎… ②赵… Ⅲ. ①模型式–研究生–教材 Ⅳ. ① O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 262194 号

书　　名：模曲线导引(第2版)
著名责任者：黎景辉　赵春来　著
责 任 编 辑：尹照原
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-23438-9/O · 0958
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn
新 浪 微 博：@北京大学出版社
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962
印 刷 者：北京大学印刷厂
经 销 者：新华书店
890 毫米×1240 毫米　A5　9.25 印张　267 千字
2002 年 4 月第 1 版
2014 年 2 月第 2 版　2014 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：35.00 元

内容简介

模曲线理论是近半个世纪发展起来的算术代数几何的最好的体现，而算术代数几何是现代数论的最深刻、最富有成果的分支之一．迄今为止，这套理论散见于国际上多种文字的大量文献中，尚未出现这方面的任何一本专著．本书的目的在于使读者较快地了解模曲线理论，进而能够阅读当前最先进的文献，为深入的研究打下基础．书中首先介绍 Grothendieck 理论里模空间的定义和初等性质，然后说明模曲线作为椭圆曲线的模空间，进而讲述模形式的几何理论并以 Deligne 的 Ramanujan 猜想的证明为终结．书中也讲了范畴及 2-范畴的基本性质、Grothendieck 拓扑、层 (sheaf)、平坦下降、形变理论(deformation theory)、余切复形(cotangent complex)、代数空间、叠 (stack)、Hilbert 函子、Picard 函子、谱序列(spectral sequence)、Gauss-Manin 联络、Kodaira-Spencer 映射、Tate 曲线和 Hecke 算子相应的算术代数几何理论.

本书可作为高等学校数学系研究生教材，也可供从事数论、代数几何及密码学方面研究的工作者使用.

序

模曲线是一种特殊的代数曲线. 我们在本书所考虑的模曲线一般是一组有某种性质的椭圆曲线的参数空间. 这个参数空间有代数曲线的结构. 利用这个代数结构我们便可以使用代数几何来研究一种称为“模形式”的解析函数. 模形式是一种具有非常强的对称性质的解析函数. 正是因为这种对称性质, 所以模形式很有用. 它在数论中非常重要, 比如悬疑了四百年关于不定方程 $x^n + y^n = z^n$ 的费马定理最终由 Wiles 证出 (Annals of Mathematics 141(1995)). 这个证明就要用模形式理论. 因为这个工作, Wiles 获得了 1995 年 Fermat 奖, 1996 年 Wolf 奖, 1997 年 Cole 奖以及 2005 年邵逸夫奖.

在说明这本书要谈什么之前, 应告诉读者这不是一本给初学者讲代数曲线或代数几何的教科书. 假如你已经学过一点代数几何 (比如李克正的《代数几何初步》; 或是 Hartshorne 著的《代数几何学》(冯克勤等译); 或是扶磊的 *Algebraic Geometry*), 加上一点代数数论 (比如冯克勤的《代数数论》; Serre 著的《数论教程》(冯克勤译)), 以及一点模形式论 (比如潘承彪的《模形式导引》; 陆洪文的《模形式讲义》; 或 Diamond, Shurman 著的 *A First Course in Modular Forms*). 现在你想继续看看下一幕将要演什么, 也许本书正是你想找的.

在这个旅程开始之前, 请你做好心理准备 —— 以下是一个新的世界, 说的是新的语言. 你习惯了一个空间, 比如一条代数曲线, 是一个带有某种结构的集合. 在这个新世界里, 一个空间是一个函子 (functor). 这不是容易习惯的. 至于这是不是一个必要的旅程, 年青人, 那就要看你的了! 传统的代数几何还有很多人在做. 正如现在还有人研究平面欧几里德几何, 他们不需要知道黎曼几何. 不过很多研究数论的人会说这个新世界的语言. 如果你决定看这部书, 那就请你放下你对空间这个概念的成见. 敞开怀抱进入这个新世界.

假如我们有一组椭圆曲线

$$\mathscr{E} = \{E_x \mid x \in X\},$$

在这里对每一个 x 我们以 E_x 代表一条椭圆曲线, x 是 E_x 的参数, X 是 $\mathscr{E}$ 的参数集合. 在多复变函数论范畴内, 集合 X 常有复流形结构, 这就让我们用上复流形理论和微分几何学了. 但是在代数的范畴内, 这个 X 几乎不会是一个概形 (scheme). 这就引起很多困难了! Grothendieck 一开始便要面对这个难题. 在他写《代数几何元论》(*EGA — Elements de Geometrie Algebrique*, 有北大中文翻译) 之前, 他在 Bourbaki 作了几个报告, 谈他对模参数空间的看法. 这些报告合编成一部叫 FGA 的讲义 (有现代版 Fantechi, *Fundamental algebraic geometry*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, volume 123). 除了一篇没有公开没有完成的笔记 (Pursing stacks), 他以后没有发表任何文章谈及此事. 但可以从他写给朋友 (如 Serre) 的信, 或追随他的人的作品 (如 Murre, Seminaire Bourbaki 294 (1965), 或 Raynaud, Springer Lecture Notes in Math 119 (1970)) 中多学一点.

我们在本书中以介绍模形式的几何理论的背景知识为主轴. 沿途谈及多个代数几何的基本概念. 这些很有用的概念与工具都在代数几何学的入门教科书之外. 这方面的资料散见于不同语言的各种文献, 对于我国读者非常不便. 我们希望达到两个目的: 一方面, 为希望应用这套方法的读者提供一条路径来掌握基本的理念, 以求比较快就可以运用; 另一方面, 对于准备深入研究这个专题的读者提供一个开端. 如书名所说, 这是一个“导引”. 就像旅行的导游一样, 指出一些景点和路线. 所以我们并没有提供每一条定理的详细证明, 反而比较注意解释定义及例子. 我们相信, 要真正地了解这套技术, 最好还是在适当的时候阅读原始文献. 所以我们没有必要重复所有的原文. 模曲线只不过是这方面理论的起步, 进一步便是研究一般的志村簇作为模空间及其对于自守表示的应用, 这套理论是 Langlands 纲领的中心对象之一, 正在迅速发展之中. 读者在读过本书之后可以看懂参考文献中的 Katz 和 Mazur, Harris 和 Taylor, Faltings 和翟敬立, Drinfeld 以及 Lafforgue 等人的工作. Mazur 得 1982 年 Cole 奖; Faltings 得 1986 年菲尔兹奖; Taylor 获得 2002 年 Cole 奖; 2001 年 Fermat 奖及 2007 年邵逸夫奖; Drinfeld 得 1990 年菲尔兹奖; Lafforgue 得 2002 年菲尔兹

奖; Langlands 得 1982 年 Cole 奖; 1995 年 Wolf 奖; 2005 年 Steels 奖; 2006 年 Nemmers 奖; 2007 年邵逸夫奖.

当然有人说既然都是外文资料, 发表文章也是用外语, 何不用英语写此书呢? 我们觉得一方面我国学生看中文比较快, 另一方面我们认为一个文化、民族没有自己的科技语言是没有希望的. 所以需要用中文写的基础数学书. 借此开发中文数学语言. 又有人认为网上什么都有, 何必写书呢? 我们的回应是: 你在网上输入一个专题, 得到很多的资料, 你根本就不知从何开始. 年青人需要一些基本教材帮助他们走第一步, 让他们可以进入重要的研究所里. 这是科教兴国的一条路.

本书的第一个目的是向读者解释代数几何学里模参数空间的意义. 据我们所知本书是全国第一部介绍这个理论的书. 我们也从未看到过一本英法德意日文像本书一样的专著. 本书所谈的这套理论中所谓模参数空间问题是指怎样去理解一个函子在具有什么代数结构的范畴上的可表性. 所以我们的第一章从可表函子出发, 顺便了解群概形这一概念 (椭圆曲线就是群概形), 然后利用线性变换作为例子, 介绍模空间 (第 2 章) 作为可表函子这一观念. 对第一次学习这个理论的同学来说这并不容易. 因为这和过去所学的太不同了. 我们只能鼓励同学们不要放弃. 事实上, 自改革开放以来, 除了几个重点院校之外, 大学水平的代数教育, 相对于其他数学专业, 是发展得比较慢的.

一个函子的可表性是受这个函子定义在什么范畴上所影响. 所以下一步便是讨论这些范畴应该具有的代数结构. 在第 3 章我们从连续函数开始, 引入 Grothendieck 拓扑以及用这个拓扑所定义的层 (sheaf). 作为深入了解这个概念的第一个重要工具就是平坦下降法 (见参考文献 Grothendieck [FGA]), 对此本章是有详细证明的.

第 4 章我们介绍叠 (stack) 的概念. 一般的模曲线就是一个叠 (见参考文献 Deligne 和 Rapoport). 在 2010 年得菲尔兹奖的 Ngo 的工作中叠的理论是基本的工具.

Hilbert 函子和 Picard 函子是代数几何中经常使用的工具, 它们算是最重要的可表函子了! 在第 5 章我们依照 Grothendieck (见参考

文献 Grothendieck [FGA]) 用射影几何的方法构造 Hilbert 函子, 即利用 Grassmann 簇 (及 m-正则性) 实现 Hilbert 函子. 本章亦有详细证明. 第 6 章讨论 Picard 函子, 并顺便用现代语言介绍 Jacobian —— 参看 Serre [Ser88]. Serre 在模曲线理论方面有非常重要基本性的工作. Serre 获得 1954 年菲尔兹奖, 1985 年 Balzan 奖, 2000 年 Wolf 奖, 2003 年 Abel 奖.

有了以上的背景就可以明白模曲线的算术几何定义了, 这就是第 7 章的内容. 习惯上我们考虑定义在一个域 k 上的椭圆曲线 E, 它实际上是在一点 s_0 (Spec k) 上的曲线. 为了了解椭圆曲线的结构, 我们需要考虑 E 在 s_0 附近的变化. 这就导致了在一个概形 S 上的椭圆曲线, 这是第 7 章 §7.1 中的话题 (这也是为什么我们在第一章 §1.3 中讨论 S-概形以及在第 6 章 §6.2 中讨论相对除子的原因). 作为椭圆曲线的初等例子, 我们在此节也介绍了怎样利用 Weierstrass 方程解决一个椭圆曲线的可表函子问题. 若以 $\mathfrak{H}$ 记复上半平面, Γ 记 $SL(2,\mathbb{Z})$, Y 记 $\mathfrak{H}/\Gamma$, 则经典的模形式 f 便是定义在这个黎曼面 Y 上的函数, 而这个 Y 就是我们所讨论的模曲线的复数点. 为了了解 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, 我们需要在 Y 上添加一个点 ∞, 得到紧黎曼面 X. 同样, 为了紧化 (compactify) 用可表函子所定义的模曲线, 我们便在第 7 章 §7.2 中引入 Deligne-Rapoport 的广义椭圆曲线. 上述的经典的模形式 f 在无穷远处的性质可用它的 Fourier 展开: $f(z)=\sum a_n q^n$ (其中 $q=\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}}$) 来描述. 这样的表达式在几何理论中是什么呢? 为了解答这个问题, 我们在第九章引入椭圆曲线的 Tate 理论. Tate 获得 1956 年 Cole 奖和 2010 年 Abel 奖.

在此之前我们温习了一下微分形式的代数理论. 这也是 Grothendieck 的工作. 我们讲的是 Katz-Oda 的结果. 此章最后介绍 Kodaira-Spencer 映射, 这是用来定义尖形式的工具, 有关这方面的近日的工作见参考文献 [Fal 99].

第 8 章是从谱序列开始的, 原因是我们在大学几乎不学代数拓扑了. 老实说: 交换代数是代数几何的基础, 而同调代数是代数几何的工具. 学习代数几何是不能不学交换代数和同调代数的.

最后我们把读者带到第 10 章: 将模形式看做用可表函子所定义的模曲线上的微分形式, 并且给出其 Hecke 算子.

Deligne 于 1969 年 2 月 在 Bourbaki Seminar 发表了他给出的 Ramanujan 猜想的证明. 在这篇文章里他利用了模曲线作为椭圆曲线的模空间, 把模形式看做这个模空间上的微分形式, 把 Hecke 算子看做椭圆曲线类的运算, 把模形式的 Fourier 系数的估值化为代数几何中的一个上同调群上的算子的特征根的估值, 这样便从 Weil 猜想推出 Ramanujan 猜想. 本书的目的是提供一些背景知识希望帮助读者了解这些成果. Deligne 获得 1978 年菲尔兹奖, 1988 年 Crafoord 奖, 2004 年 Balzan 奖, 2008 年 Wolf 奖, 2013 年 Abel 奖. 我们会以介绍 Deligne 这个证明结束本书.

书中关于模空间与可表函子的理论几乎完全是由 Grothendieck 开创的, 它的发展深受他的影响. 特此向他致敬. Grothendieck 在 1966 年得菲尔兹奖.

本书的第一版在 2004 年出版. 丁石孙教授对于本书给予了高度的重视和热情的鼓励; 北京大学出版社的邱淑清编审为本书的出版作了杰出的工作; 北京大学数学科学学院和数学研究所给予了大力支持, 在此我们对于他们深表谢意. 我们感谢北京大学张继平教授、清华大学冯克勤教授和首都师范大学李庆忠教授的支持以及北京大学出版社陈小红副编审和尹照原编辑的协助让第二版顺利出版.

本书部分原是 1975 年黎景辉在美国加大 UCLA 所开的研究生课程的讲义. 应广州中山大学出版社之约, 黎景辉与马麟俊、黎百恬整理了此讲义的初等部分, 于 1985 年交稿, 没有付印. 2000 年冬黎景辉在北大重开此课. 黎景辉与赵春来合作, 引进新资料, 完成此书.

这是第二版. 首先, 我们更正了一些由 Tex 引起的误印. 第二, 回应第一版的读者在网上的要求, 在第 1 章我们改从范畴的定义开始和增加了一节讲 Abel 范畴. 并且在第 4 章加入 2-范畴理念和补充了形变和叠的介绍. 在第 3 章加入层范畴及上同调群. 在第 7 章补上椭圆曲线的一些资料. 在第 10 章加入 Ramanujan 猜想的证明. 这对读者比较方便. 第三, 我们在适当的地方加入国内外新出的参考资料和新的诠释以增理解. 这样全书就更加完整.

本书可供数学系研究生作为教材, 也可供从事数论、代数几何等专业的数学工作者使用.

由于作者的水平有限, 加之时间仓促, 书中难免有错误和不当之处, 敬请读者给予指正和更正.

黎景辉

2013 年 5 月于首都师范大学

目录

第 1 章　范　　畴

Grothendieck 在他的代数几何理论中常用范畴的语言来总结一些结果. 比如, 仿射概形范畴等价于交换环范畴; 又如, 设 A 为交换环, $X = \operatorname{Spec} A$, 则 A-模范畴等价于拟凝聚 $\mathscr{O}_X$-模范畴, 并且 A 的理想对应于 X 的闭子概形.

可表函子是代数几何里的中心概念. 判定某个函子是否为可表函子是一个重要的问题. 我们将用可表函子处理模曲线问题. 本章将介绍可表函子的概念和一些基本性质.

在本书中, 除了特别声明之外, 所有的环都是指有 1 的交换环.

§1.1　函　　子

1.1.1　范畴的概念

我们首先回顾范畴理论中的一些记号和基本概念.

一个**范畴** (category) $\mathfrak{C}$ 包含以下资料:

(1) 给定一个集合 $|\mathfrak{C}|$, 我们称这个集合里的元素为范畴 $\mathfrak{C}$ 的**对象**(object), 我们又记这个集合为 $\operatorname{Obj} \mathfrak{C}$.

(2) 对应于 $|\mathfrak{C}|$ 内任一对元素 (A, B) 给定一个集合 $[A, B]_{\mathfrak{C}}$. 我们称这个集合里的元素为范畴 $\mathfrak{C}$ 内由 A 到 B 的**态射**(morphism). 我们又记这个集合为 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ 或 $\operatorname{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ 或 $\mathfrak{C}(A, B)$. 我们引入记号

$$\operatorname{Mor}(\mathfrak{C}) = \bigcup_{A, B \in |\mathfrak{C}|} \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B).$$

(3) 对应于 $|\mathfrak{C}|$ 内任意三个元素 (A, B, C) 给定一个映射

$$[B, C]_{\mathfrak{C}} \times [A, B]_{\mathfrak{C}} \to [A, C]_{\mathfrak{C}},$$

我们用下面的符号来记这个映射的计算:

$$(g,f) \mapsto g \circ f = gf.$$

我们称 $g \circ f$ 为态射 g,f 的**合成**(composition), 我们要求以上的资料满足以下的条件:

(a) 如果 $(A,B) \neq (C,D)$, 则 $[A,B]_{\mathfrak{C}} \cap [A,B]_{\mathfrak{C}}$ 为空集.

(b) 若 f,g,h 为范畴 $\mathfrak{C}$ 的态射并且 $(hg)f$ 是有定义的, 则 $(hg)f = h(gf)$.

(c) 对任一对象 $B \in |\mathfrak{C}|$, 存在态射 $1_B \in [B,B]_{\mathfrak{C}}$, 使得对任意的 $f \in [A,B]_{\mathfrak{C}}$ 及 $g \in [B,C]_{\mathfrak{C}}$ 都有 $1_B f = f$ 和 $g 1_B = g$.

设有范畴 $\mathfrak{C}, \mathfrak{B}$. 若 $\mathrm{Obj}\ \mathfrak{B} \subset \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$, 对任意的 $A,B \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{B}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(A,B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ 及 $\mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ 有相同的合成映射, 则称 $\mathfrak{B}$ 为 $\mathfrak{C}$ 的**子范畴**(subcategory). 再者, 如果对任意的 $A,B \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{B}$ 有 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B)$, 则称 $\mathfrak{B}$ 为 $\mathfrak{C}$ 的**全子范畴**(full subcategory).

下面举一些例子:

(1) 集合范畴 Sets 的对象就是集合. 对任意两个集合 A,B, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(A,B)$ 是由所有从 A 到 B 的集合映射组成的. 而 $g \circ f$ 是通常集合映射的合成.

(2) 把所有的群放在一起得到 $|\mathfrak{G}|$. 对任意两个群 A,B, 所有从 A 到 B 的群同态组成 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(A,B)$. $g \circ f$ 是映射的合成. 这样我们就得到了群范畴 $\mathfrak{G}$.

(3) 把所有的拓扑空间放在一起得到 $|\mathfrak{T}|$. 对任意两个拓扑空间 A,B, 所有从 A 到 B 的连续映射组成 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(A,B)$. $g \circ f$ 是映射的合成. 这样我们就得到了拓扑空间范畴 $\mathfrak{T}$.

(4) 把所有的拓扑群放在一起得到 $|\mathfrak{T}\mathfrak{G}|$. 对任意两个拓扑群 A,B, 所有从 A 到 B 的连续群同态组成 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}\mathfrak{G}}(A,B)$. $g \circ f$ 是映射的合成. 这样我们就得到了拓扑群范畴 $\mathfrak{T}\mathfrak{G}$.

注 在范畴论中会出现非常大的集合, 因而可能会引起逻辑的矛盾. 一个方法是引进类(class) 和集合(set). 类的元素可以是集合. 详情可见 Bourbaki, Set Theory 或讨论 von Neumann–Bernays–Gödel 集

合论的教材. 一般范畴的定义假设 $\mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$ 是一个类.

1.1.2 函子

设 $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ 是两个范畴, 由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个 (共变 (covariant)) 函子 (functor) F 是指:

(1) 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, F 规定了 $\mathfrak{D}$ 中的相应的对象 $F(X)$;

(2) 设 X, Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任意二对象. 对于任一 $f \in [X,Y]$, F 规定了 $[F(X),F(Y)]$ 中的一个元素 (态射) $F(f)$, 满足

$$F(g\circ f) = F(g)\circ F(f), \quad \forall\, f \in [X,Y],\ g \in [Y,Z]$$

以及

$$F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

如果将上述的条件 (2) 改为

(2′) 对于任一 $f \in [X,Y]$, F 规定了 $[F(Y),F(X)]$ 中的一个元素 (态射) $F(f)$, 满足

$$F(g\circ f) = F(f)\circ F(g), \quad \forall\, f \in [X,Y],\ g \in [Y,Z]$$

以及

$$F(1_X) = 1_{F(X)},$$

则称 F 为由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个**反变函子** (contravariant functor).

设 $\mathfrak{C}^{\mathrm{opp}}$ 为 $\mathfrak{C}$ 的反范畴, 即规定 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)$. 则由范畴 $\mathfrak{C}$ 到范畴 $\mathfrak{D}$ 的反变函子可以视为由 $\mathfrak{C}^{\mathrm{opp}}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的共变函子.

设 $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ 是一个函子. 如果存在函子

$$G:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C},$$

满足: 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, $\mathfrak{D}$ 的任一对象 Y 以及所有的 $f \in [X,X']$, $g \in [Y,Y']$ (X' 为 $\mathfrak{C}$ 的任一对象, Y' 为 $\mathfrak{D}$ 的任一对象), 都有

$$G(F(X)) = X, \quad F(G(Y)) = Y, \quad G(F(f)) = f, \quad F(G(g)) = g,$$

则称 F 是由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个**同构** (isomorphism), 同时也称 $\mathfrak{C}$ 与 $\mathfrak{D}$ 同构.

联系两个函子的概念是"函子态射"(或"自然变换"(natural transformation)). 设 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 为两个范畴, F 和 G 为由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的两个函子. 由 F 到 G 的一个**函子态射**(functorial morphism) Φ 是指: 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, 给定一个态射 $\Phi_X : F(X) \to G(X)$,使得下面的图表交换:

$$
\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & G(X) \\
{\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\
F(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & G(Y)
\end{array}
$$

其中 X, Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任意两个对象, f 为 X 到 Y 的任一态射. 我们记函子态射 Φ 为 $\Phi : F \to G$. 又把 $\Phi_X : F(X) \to G(X)$ 写做 $\Phi X : FX \to GX$. 当所有 Φ_X 是同构时我们说函子态射 Φ 是**同构**(isomorphism) 或**自然同构** (natural isomorphism).

由 F 到 G 的函子态射的全体记为 $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}(F, G)$ 或 $[F, G]$.

利用函子态射的语言可以简化前面给出的范畴的同构定义的叙述,还可以进一步定义范畴的等价.

我们称函子 $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 为一个范畴**同构**(isomorphism), 若存在函子 $S : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$, 使得

$$ST = 1_{\mathfrak{C}} \quad \text{以及} \quad 1_{\mathfrak{D}} = TS.$$

我们称函子 $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 为一个范畴**等价**(equivalence), 若存在函子 $S : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ 和同构

$$ST \approx 1_{\mathfrak{C}} \quad \text{以及} \quad 1_{\mathfrak{D}} \approx TS.$$

一个函子 $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 的**像**(image) 是指 $\mathfrak{D}$ 的全子范畴 $\mathfrak{C}'$ 使得 $\mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}' = \{T(X) \mid X \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}\}$. 函子 T 的**要像** (essential image) 是指 $\mathfrak{D}$ 的全子范畴 $\mathfrak{C}''$ 使得若 $Y \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{D}$ 及有 $X \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$, Y 与 $T(X)$ 同构, 则 $Y \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}''$. 若 T 的要像等于 $\mathfrak{D}$, 则称函子 T 为**要满函子**(essentially surjective functor).

我们称函子 T 是**忠实的**(faithful), 如果由任意对象 $A, B \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$

所定义的映射

$$T: \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(T(A),T(B))$$
$$(A \xrightarrow{f} B) \longmapsto (T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B))$$

是单射. 如果这个映射是满的, 则说函子 T 是**全的**(full).

可以证明函子 T 是等价当且仅当 T 是全忠实的, 并且是要满的.

范畴, 函子, 自然变换这些概念最早是由 Eilenberg 和 Mac Lane 在代数拓扑学的研究中引进的 (见 Relations between homology and homotopy groups of spaces, Annals of Mathematics 46 (1945), 480—509).

1.1.3 Yoneda 引理

以下讨论"Yoneda 引理", 它在可表函子的研究中有基本的重要性.

如通常一样, 以 Sets 记集合组成的范畴. 设 $\mathfrak{C}$ 为一个范畴. 则对于任一 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 有 (共变) 函子

$$h_X:\ \mathfrak{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets},$$
$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X).$$

对于 $\mathfrak{C}^{\mathrm{opp}}$ 中的任一态射 $f: Z \to Y (\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{opp}}}(Y,Z))$, h_X 在其上的作用是自然的:

$$h_X(f):\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z,X),$$
$$g \mapsto g \circ f.$$

当然, h_X 也是由 $\mathfrak{C}$ 到 Sets 的一个反变函子.

设 $F:\ \mathfrak{C} \to \mathrm{Sets}$ 为任一反变函子, $\Phi \in [h_X, F]$ 为任一函子态射, 即对于 C 的任一对像 Y, 有范畴 Sets 中的态射

$$\Phi_Y:\ h_X(Y) \to F(Y),$$