統計の論理と方法

兵頭次郎 著

統計の論理と方法

兵頭次郎著

成　文　堂

著者略歴

兵 頭 次 郎（ひょうどうじろう）

1915年　愛媛県生まれ

1940年　東北大学法文学部卒業

現　在　学習院大学経済学部教授　統計学専攻

統計の論理と方法　定価3500円

1983年7月10日　初版第1刷発行

著　者　兵　頭　次　郎

発行者　阿　部　義　任

〒162　東京都新宿区早稲田鶴巻町514番地

発行所　株式会社　成　文　堂

電話03(203)9201(代)　振替東京9—66099

製版　日成エンタープライズ　印刷　上野印刷　製本　佐抜製本

3041—811111—3851

はしがき

この書物は，大学の経済学部学生を対象とする統計学の講義案をもとに，これに多少手を加えて，統計学自習者の参考書としても役立つようにまとめたものである。表題を「統計の論理と方法」としたのは，統計的方法における論理，統計的なものの見方・考え方を重視する著者の立場をはっきりさせたかったからである。データ解析の方法を学ぶことも必要ではあるが，型通りの計算ならコンピュータの方がうまくやれるはずである。コンピュータで代替できない独自の思考力・判断力を身につけることが大切である。統計の論理がわからず，「何故」という問いに答えられないようでは，実際の問題を定式化してコンピュータに適切な指令を与えることも，コンピュータからのアウトプットを正しく使いこなすこともできない。手足よりも頭の方が重要である。このため，本書執筆に当たっては，あれこれの分析道具が一揃い何でも詰め込まれた道具箱のようなものではなく，全体が首尾一貫した論理によって組み立てられた自己完結的な方法論の体系となるように志した。

しかし，統計の論理は必然的に統計の数理につながる。数理といえばとかく難解になりやすい。そこで数理的問題にどこまで立ち入るかが問題になる。論理を重視する以上，定理や公式の数理的解明が必要である。一方，高校卒業程度の読者に数学的予備知識の多くを期待するわけにはいかない。「わかりやすさ」と「論理的」ということ，この二つの要請にいかに答えるか。ここに，論理を重視する立場に附随する独得の困難がある。数理的基礎づけを断念することにすれば，ことは簡単であるが，それでは著者の意図を生かすことができないし，読者も「証明は他書を見よ」では恐らく満足しないであろう。高度な数学的予備知識を前提とせず，しかも数理的基礎づけに関して他書を借りることなく，本書だけでほぼ自己完結的な説明を与えること，これが著者の念願であった。このため，正規分布をはじめ，χ^2 分布，F 分布，t 分布ならびに中心極限定理その他の諸定理については，煩をいとわ

ず証明を加えることにした。その際,「わかりやすさ」の要請に答えるように努めたつもりではあるが,その成果は読者の評価に委ねるほかはない。

なお,経済分析における利用度が高いことを考慮して,回帰分析,分散分析についてはやや詳しく解説した。また読者の自学自習に資するため各章に10題ずつ,計100題の練習問題を用意するとともに,詳細な解答をつけ加えた。練習問題のなかには難易度がやや高いと思われるものも若干含まれているが,読者はこれらの問題に取組み,解を導く過程で,統計的なものの見方・考え方・統計的方法独自の問題処理の仕方等についておのずから会得する所があるであろう。統計学の実力は,実際の問題を手がけるのでなければ身につくものではない,とよく言われる。ヒントや答だけに止まらず,冗長をもいとわず詳細な解答をつけ加えたのも,結果を導く思考過程について読者が一歩一歩みずから確かめることができるように,と願ったからである。十分に活用されることを期待したい。

本書出版に当たって,学習院大学の小山昭雄教授は校正刷に丹念に眼を通し,数学専門家の立場から数多くの適切な助言を与えてくださった。また,学習院大学経済学部副手の渋沢久美,新田祥子両氏には面倒な索引作製に協力していただいた。これらの方々に心から謝意を表する。

巻末の数表は,日本規格協会の許可を得て「簡約統計数値表」から転載したものである。転載を許可された日本規格協会に感謝する。

さらに,成文堂の土子三男氏には原稿の割りつけ,図版の作製から装本に至るまで終始お世話になった。記して厚く謝意を表したい。

昭和58年6月

著　　者

目　　次

序　　　説

1　統計学の対象と課題

統計学の対象は集団現象である。その実体が自然現象であるか，社会現象であるかを問わない。集団とは同種個体の集合をいう。同種とは，ある共通の概念（標識）によって統一されたもののことで，個体差を含むものである。集団は，標識を共有するかぎりにおいて等質的なものの集合であるが，個体差を含むかぎりにおいて種々様々な変量の集合である。

統計学の課題は，集団現象を数量的に分析する方法を研究することである。統計と統計学とはもちろん区別しなければならない別個の概念であって，集団現象の量的記述としての統計は統計学の単なる素材にすぎない。統計学は統計または観察値の集まり（データ）を数量的に分析する方法を研究する形式科学である。形式科学は実質科学と対立する概念である。物理学や経済学は，たとえば万有引力の法則や「一般均衡理論」等によって知られるように，それぞれ特定された固有の領域を対象とする実質科学であるが，統計学の対象は実質を捨象した集団現象一般である。その内容が経済現象・物理現象・生物現象等々のいずれに属するかという質的側面は問うところでなく，それぞれ集団現象であるかぎりにおいて一様に数量分析の対象とするのが統計学の立場である。つまり，観察されたデータを数量分析のフィルターにかけてデータに含まれている有用な情報を導き出す方法を研究することが統計学の課題である。その意味で統計学は実質科学ではなく，方法論としての形式科学である。

なお，形式科学という点では論理学も数学も統計学と同様であり，相互にそれぞれ密接な関連をもっているが，これら三者の異同を明らかにしておく

ことは，「統計学とは何か」を知るために役立つであろう。すなわち，論理学は正しい思考のあり方，進め方を一般的・体系的に研究する学問であり，特定の世界・特定の論理に限定されるものではないが，数学と統計学は数量の世界における論理の体系である。統計学は数学に基礎づけられた方法によって観察値を分析するのであるから，応用数学の一分野ともみなすこともできるが，両者の重要な相違は，数学が演繹的な論理の体系であるのに対して統計学は帰納的論理の体系である点にある。D. Hilbert によれば，数学は現象世界との対応におけるその真理性を追求するものではない。それは，単に「矛盾を生じない」という条件のみを要求された「仮定」から形式的に結論を導いていく「抽象理論」の建設をもってその責務とし，それ以外にはなんらの目的をももたない。公理・公準は真理である必要はなく，単なる仮定で十分であるという。つまり，数学は無矛盾の演繹論理の体系である。これに対し，統計学では，論理的帰結と事実との対応関係の追求がその本来の責務である。すなわち，ある仮説が事実に適合するかしないかをある特定の仕方で判定すること，これが統計学の課題である。換言すれば事実に照らして仮説を取捨選択するのが統計学の責務であり，このような方法の論理と応用を研究するのが統計学の課題である。「事実」とは観察された有限個のデータのことであり，「仮説」は普遍妥当性が要求される命題である。したがって，事実に照らして仮説を取捨選択するということは，部分から全体を推測することであり，特殊から普偏へと遡ることを意味する。統計学が帰納的論理の体系であるといわれる所以である。

2　経験科学の方法と統計的方法

経験科学は，思弁的な議論や言葉の綾や主観的な意見のかわりに，経験的知識すなわち観察と計測に基礎を置く客観的な論理の体系である。経験科学の領域において，観察から理論の確立に至るまでの過程を図式的に示せば

観察 → 仮説 → 検証 → 理論

というステップを辿る[1]。仮説は観察の結果，直観的に構想されることもある

が，直観による結論だけでは仮説として不十分で，既知法則との関連において前提 ― 演繹 ― 結論という構造をもち，前提から結論に至る推論の過程に矛盾があってはならない。科学は演繹的な論理の体系である。少数の基本的命題から多数の命題が次々と演繹によって導き出され，個々の命題は整合的な論理の体系の一環として位置づけられる。したがって，仮説は前提としての既知の法則から演繹的に導き出された一つの結論としての意味をもっている。しかし経験科学においては，無矛盾ということは仮説の要件であるに過ぎず，仮説を理論たらしめる十分条件ではない。仮説が理論として確立されるためには，事実による検証という過程を通過しなければならない。検証に耐え得た仮説のみが理論として確立され，検証に耐え得ない仮説は棄却される。この観察 ― 仮説 ― 検証の試行錯誤の過程こそ経験科学研究の道である。

仮説を検証するということは，演繹的な推論の結果を客観的な事実と対決させて，両者が一致するか否かを確認することである。その具体的方法は，仮説の立て方とその内容次第で一様ではないが，便宜上演繹型と帰納型とに大別して考察することにする。いま，演繹的推論の一例として仮言三段論法を図式的に示せば

ＰならばＱなり	（第一前提）
Ｐなり	（第二前提）
故にＱなり	（帰　　結）

となる。ここで，第一前提は，ＰはＱが真であるための十分条件であり，ＱはＰが真であるための必要条件であることを規定している。したがって，第二前提として「Ｐなり」という命題が成立すれば十分条件がみたされるから帰結命題「Ｑなり」は必ず成立する。演繹型仮説検証の方法は，第一前提を仮説として立て，第二前提がみたされる条件のもとで，帰結命題の成立が事実によって確認できるかどうかを見究めようとするものである。肯定的な結果が得られた場合には仮説を採択し，否定的な結果が得られた場合には仮説を棄却することになるこの方法は仮説の成否を排中律[2)]によって明確に決定

づけるやり方であるから決定論的仮説検証の方法と呼んでもよい。問題は，第二前提が成立する状況をいかにして設定するか，ということである。たとえば，「水を1気圧のもとで熱すると100°Cで沸騰する」という仮説を検証する場合，「水を1気圧のもとで100°Cに熱する」という状況の設定は比較的容易である。しかし，「水を電気分解すれば水素と酸素とになる」という仮説を検証する場合には，より入念な注意と工夫が必要になる。不純物の混入を防ぐために蒸溜水を使用するとか，電気分解装置を真空中に設置する等によって，過程の進行を純粋に確保することが必要である。このようにして第二前提が成立するかぎりにおいては，ただ一回の実験の結果だけでも仮説の採否を決定するに十分である。「過程の進行が純粋に確保される」かぎり，「自然の斉一性」の原理[3)]によって，同一条件のもとではつねに同一の結果が得られることが期待されるからである。一回かぎりの実験の結果は個別的なものであるが，ここでは個別的なものがそのまま普遍的なものを代表するものとして認められるのである。しかしながら，このような条件がみたされるのは物理・化学現象のうちの一部の領域に限られているから，演繹型仮説検証の方法の適用範囲もまたそれだけ制限されざるを得ない。同じ物理現象でも，天体力学に関する仮説の場合には上述のいわゆる精密実験の方法は適用できないので，改めて別の方法を考えばならない。また，「植物の成長力は自花授精より他花授精の方がすぐれている」という仮説の検証になると，あらたな困難がともなってくる。C. Darwin は，ジキタリス，ツクバネアサガオ等7種の植物について自花授精のものと他家受精のものとを一つずつ組合わせて対とし，各対はそれぞれ同時に発芽したものを同一の鉢に植えることによって土壌条件を同一にする等細心の注意を払って実験した結果を記録している[4)]。これによると，平均に関するかぎりでは他花授精が自花授精よりすぐれているといえそうであるが，個々の対については少数例ながら反対の結果も生じている。生物実験においては，どんなに注意を加えても，比較のための処理以外の条件を完全に同一にすることは不可能に近い。つまり，制御不能の攪乱要因が混入するために，「過程の進行を純粋に確保すること」が

できないのである。肝腎の第二前提「Ｐなり」という条件が成立しないのであるから，このような場合に演繹型仮説検証の方法を適用しても無意味である。そこで別の方法すなわち帰納型仮説検証の方法を考えなければならない。

仮言三段論法に対応する帰納的推論の図式を示せば

Ｐならば Ｑなり

Ｑなり

故にＰであろう

となる。ここで，ＰはＱが真であるための十分条件であるが，ＱはＰが真であるための必要条件にすぎない。演繹的推論においては，前提Ｐが真ならば，十分条件から結論Ｑは必ず真であるといえるが，帰納的推論は帰結Ｑから前提Ｐに遡るものであって，Ｑが真であっても必要条件からはＰが真である蓋然性が認められるに止まり，「故にＰなり」と断定することはできない。「後件肯定の虚偽[5]」を犯す惧れがあるからである。ここに帰納的推論の特色がある。帰納型仮説検証の方法は，演繹法における第二前提「Ｐなり」という条件を現実に充足できない場合に，「Ｑなり」という帰結命題の真偽の判定から出発して，演繹法とは逆の方向を辿って仮説の採否をきめようとするものである。その推論の順序は，「Ｑなり」，「ＰならばＱなり」，「故にＰであろう」となる。ここで仮説は「Ｐなり」という命題で示される。「Ｐならば Ｑなり」という命題は，帰結命題と仮説命題とを結びつける論理的媒介項であって，既知の法則から理論的に展開されたものであるとともに，それ自体ＰからＱへの論理的必然性を示すものである。帰納型仮説検証の方法は，帰結命題「Ｑなり」の真偽の判定から遡って推論を進めるものであるから，十分条件を充足せず，必要条件だけから判断を導くものである。したがってその結論は決定論的なものではなく，蓋然的なものにすぎない。この意味で帰納型仮説検証の方法は蓋然論的方法と呼ぶことができよう。しかしながら，媒介項が必要十分条件をそなえていて「ＰならばＱなり，かつＱならばＰなり」といえる特殊な場合にはもちろん「Ｑなり」から出発して「故にＰなり」という決定論的な結論を導くことができる。たとえば「リトマス試験

紙が赤くなる」という命題をＱとし，「液体が酸性である」という命題をＰとするとき，「Ｑなり」から出発して「故にＰなり」と断定することができる。この場合「ＰならばＱなり，かつＱならばＰなり」という必要十分条件がみたされているからである。また個々の命題が論理的な連鎖の一環として緊密に結びつけられ，体系化されている物理現象のような場合には，ある仮説が真である蓋然性は関連する他の仮説が検証されることによって著しく高められる。たとえば，「万有引力の作用によって惑星の軌道が定まる」という仮説において，「天体間に万有引力が作用している」という命題をＰとし，「惑星の軌道が定まる」という命題をＱとするとき，Ｐそのものの真偽を直接検証することはできないが，万有引力説にもとづく理論値と観測結果とが一致すれば「Ｑなり」という命題は確認され，これより「Ｐであろう」という推論が成り立つ。しかし，これだけではまだ蓋然性が認められるに過ぎないが，地球のまわりの月の運動や潮汐現象に関する観測結果が同一のＰからの論理的帰結と一致するならば，Ｐの蓋然性は著しく高められる。さらに，落体の現象・振子の運動・毛細管現象等々に関する種々の実験によってＰが真である蓋然性はほとんど決定論的な高さにまで高められる[6)]。しかしこのような例は物理・化学現象の一部に限られたものであって，広大な経験科学の領域においてこのような好条件にめぐまれることがつねに期待できるわけではない。一般的にいえば，帰納型仮説検証の方法によって仮説の蓋然性が認められたとしても，それだけではまだ仮説が検証されたとはいえないのである。

帰納型仮説検証の方法の問題点は，推論の形式にともなう上述の蓋然性の問題のほかに，「Ｑなり」という帰結命題そのものの真偽の判定が必ずしも容易でない場合が多い，ということである。万有引力や酸性反応の例のように，Ｐから演繹的に導き出された帰結命題Ｑが事実と一致するか否かを判定するのにほとんど何らの困難も生じないという場合もある。しかし，これは「自然の斉一性」がみられる物理・化学現象などの比較的限られた場合であって，たとえば前掲の C. Darwin の他花授精と自花授精の相違による植物

成長力の比較実験のような場合には，現象を支配する諸要因を完全に制御することはできないから，「自然の斉一性」を期待することができず，実験結果から「Qなり」と認定してよいのか悪いのか判断に苦しむことが多い。「Qなり」という普遍的命題の真偽を限られた観察結果たる特殊具体的な事実によって判定しようとするかぎり，やはり特殊から普遍への帰納法の論理に依拠せざるを得ない。しかもこれによって保証されるのは蓋然性にすぎないのであるから，このような理論的弱点をできるだけ補強するための工夫が必要となってくる。帰納型仮説検証の方法にともなうこのような二重の困難をできるだけ軽減して，蓋然性の高い結論を導くための工夫としては，一致法，差異法，一致差異法，共変法，剰余法等 J.S. Mill によって定式化された種々の方法がある[7]。これらの方法は帰納法の基礎的形態としての枚挙的推論に改善を加えたものであるが，その改善の方向は，要するに特殊から普遍へと飛躍する論理的難点の補強に向けられているといってよい。

物理・化学の領域における一部の現象にみられるように，「過程の進行を純粋に確保できる」場合，すなわち攪乱要因の混入を排除して現象を完全に制御できる場合には，個別的事例がそのまま普遍性を代表するとみることができる。ところが単純な枚挙的推論においては，n 個の事例について

$$p_1 \to q_1$$

$$p_2 \to q_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n \to q_n$$

という結果が得られたとしても，これからただちに普遍的判断として

$$\therefore \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$$

と主張することはできない。ただし，P, Q はそれぞれ p_i, q_i $(i=1, 2, 3\cdots, N, N>n)$ の集合を表わすものとする。普遍的判断はまだ観察されないすべての個別についての主張を含むものであるが，現実に $n+i$ 番目の事例について

$$p_{n+i} \to q_{n+i}$$

となる保証はないからである。したがって，枚挙的推論では「PならばQなり」という仮説は蓋然的なものとしか認められない。しかし，ここで「現象」すなわち「過程の進行」を制御することが可能ならば，その可能性の程度に応じて「特殊」と「普遍」との間の論理的ギャップを埋めることが可能となり，またそれだけ結論の蓋然性を高めることが可能となる。一致法・差異法等のいわゆる実験の方法は，現象をある程度まで制御することが可能な条件のもとに開発されてきた方法である。しかし，このような条件は経験科学の領域においてつねに成立するとはかぎらない。仮説が定性的命題ではなくて定量的命題から成る場合はなおさらである。たとえば前述の C. Darwin の例にもみられるように，授精の仕方だけを異にして他はすべて同一の条件のもとで植物を成長させるということは事実上不可能に近い。制御可能な幾つかの条件のほかに，植物の成長に影響する攪乱要因の混入を排除することはきわめて困難だからである。制御可能条件が十分にみたされないこのような場合には，帰結命題「Qなり」の真偽の判定そのものにも問題が残る。C. Darwin の実験の場合でも少数ではあるが自花授精植物の方が他花授精のそれよりもすぐれた成長力を示した事例もみられたのである。生物現象のみならず，気象現象，経済現象，社会現象等経験科学の領域には制御可能条件が十分にみたされない広大な領域が残されている。攪乱要因の混入を排除することができないこのような場合における仮説検証の方法は何か。それが統計的方法である。

3　統計的方法の原理

統計的方法は観察値を数量分析のフィルターにかけて，観察値に含まれている有用な情報すなわち普遍的知識を導き出す方法である。観察結果としての n 個の観察値の集合は特殊的に限定された知識にすぎない。統計的方法は，この特殊的な知識から普遍的な知識を導き出す方法であるから，論理的にはやはり特殊から普遍へと遡る帰納的論理の体系に属するものである。帰納的推論の問題点は，特殊的なものと普遍的なものとの間の論理的ギャップ

をいかにして埋めるか，ということであった。統計的方法の特色はこのギャップを確率論によって架橋するところにある。

Boyleの法則は，温度一定なる条件のもとで気体の体積 V とその圧力 p との間に $V=a/p$（a は定数）なる関数関係が成立することを示すものであるが，これは演繹型のいわゆる精密実験によって検証することができる。温度を一定不変に保ちながら圧力 p を種々に変化させるとき，それに対応して気体の体積 V がどのように変化するかという p に応ずる V の変化を正確に観察することができるからである。すなわち，攪乱要因の混入を排除して過程の進行を純粋に確保することができるからである。これは制御可能条件が十分にみたされている場合である。このような場合には，誰がいつどこで実験を行なっても，つねに $V=a/p$ という同一の結果が得られるのであるから，同じことを何度も繰返す必要はないといってよい。

これに対して，品種改良のための農業試験とか，ある種の工業試験などの場合には，攪乱要因の混入を避けることができない。たとえば，ある農産物の収獲量を y, 特定の肥料の投下量を x として, y に対する x の効果を正確に測定しようとしても，それは困難である。何故なら，y に影響を及ぼす要因は x のほかに土壌・日照・通風等数多く存在し，農産物の生育過程においてこれら諸要因の影響を人為的に十分に制御することはできないからである。つまり，特定の x に対する y の純粋な関係を観察しようとしても，x 以外の攪乱要因の影響が y の中に混入してくることを避けるわけにはいかないのである。単一の x ではなく多種類の x が考えられる場合でも事柄の本質にはいささかの相違もない。問題は，攪乱要因の混入が避けられない場合，これを少なくとも一定の限度内に制御できるかどうか，ということである。ある種の工夫によって，これらの影響を中立化するかまたは一定の許容限界内に封じ込めることができるならば，攪乱要因の制御を媒介として，所与のデータは操作可能な集団となるのである。ここではじめて，x の種々の変化に対応する y の変化の関係を，たとえば $y=\phi(x,\varepsilon)$ の形で定式化して，観察することが可能となる。誤差項 ε の制御を媒介として説明変数 x に応ずる目的変数