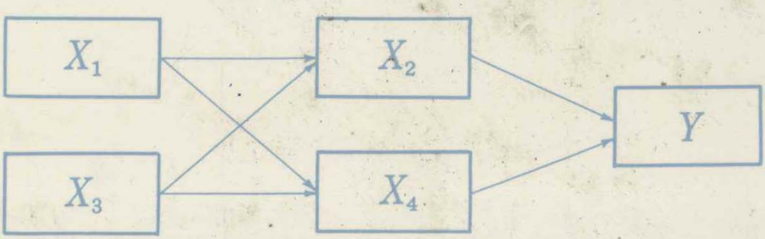
計量経済学の研究

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF STATISTICAL INFERENCE IN ECONOMETRICS

竹内　啓　著

東洋経済新報社



計量経済学の研究

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF
STATISTICAL INFERENCE IN ECONOMETRICS

竹内　啓著

東洋経済新報社

著者紹介

1933年　東京に生まれる．

1956年　東京大学経済学部卒業，その後同大学大学院，同大学同学部助手を経て，1963年４月助教授となり現在に至る．

専　攻　数理統計学（経済学博士）

著　書　『数理統計学』『多変量解析の基礎』共に東洋経済新報社，『線型数学』培風館，『社会科学における数と量』東京大学出版会，『転機にたつ科学』（共著）中央公論，など．

訳　書　フィッシャー著『統計的方法と科学的推論』（共訳）岩波書店，ジョンストン著『計量経済学の方法』東洋経済新報社，など．

住　所　神奈川県鎌倉市山崎1488-9

計量経済学の研究　定価 2800 円

昭和47年９月16日発行

著　者　竹内（たけうち）　啓（けい）

発行者　村山公三

発行所　東京都中央区日本橋本石町１の４　東洋経済新報社

郵便番号 103　電話東京(270)代表4111　振替口座東京6518

3033-3121-5214

は し が き

計量経済学 econometrics における統計理論は，1950年代初めごろ，Cowel's Commission の Monograph Series において，それまでの結果が集大成されて以後，かなり長い間にわたって発展が停滞していたといってよいように思われる（H. Theil のいくつかの貢献はおそらくその中でほとんど唯一の例外といってよいであろう）．1960年代にはいって出版された Johnston, Goldberger, Christ, Malinvaud らの本も，教科書としてはそれぞれに特色をもったものではあっても，理論的な内容においては，それまでの研究水準を抜くものではなかった．

これに対して，ようやく1960年代の中ごろから，新たな理論的展開が比較的少数の人々によってではあるが，本格的に始められるようになったといってよいように思われる．その中で主要な結果は，小標本理論の新たな展開，時系列理論の応用の精密化，分布の近似，あるいは漸進展開の精密化等があり，これらはまたまとまったというよりも，発展の途中にあるといってよいであろうが，それぞれについて佐和，Richardson, Hannan, Kadane, 等の研究をあげることができよう．この発展の中で少なからぬ貢献を果たし，また，現に果たしつつある佐和隆光氏の研究の一部は，すでに『計量経済学の基礎』（東洋経済新報

社，1970年)にまとめられている．

この本は，この間において筆者自身が得た若干の結果について，これまでいくつかの学術誌に発表したもの，および未発表のノート，あるいは筆者の学位論文「計量経済モデルにおける統計的推測の諸問題」(1966年)の中に展開したものをまとめたものであり，英文のタイトルならば，“Contributions to the Theory of Statistical Inference in Econometrics,” とでも題すべきものである．

したがって，この本は体系的な教科書ではない．ただのちのための便宜に，最初の2章で統計的推測の基本的な概念について，一通りの説明だけを加えておいた．

残りの，すなわち本書の主要な部分は2部に分けられる．一つはエコノメトリック・モデルにおいて統計的推測の問題一般を扱い，もう一つの部では予測の問題を扱っている．

なお，章の順序は，一応理論的な展開の順になっているので，もともとの論文の書かれた時間的順序には一致していない．中には書かれてからすでに10年近くたっているものもあり，それらは一部すでに乗り越えられたもの，あるいは，のちになって筆者自身修正ないし改善できることに気づいたものもあるので，それらについてはそれぞれの章に“補論”として付け加えておいた．

各章について，一応そのおもなもとになった出所を次にあげておく．ただ今回収録にあたって大幅に編成を変えたものもある．なお，『季刊理論経済学』は理論・計量経済学会の機関誌(発行元は東洋経済新報社)，『季刊経済学論集』は東京大学経済学会の発行によるものである．

第1章，第2章　書き下ろし，1972年

第3章　『季刊理論経済学』第14巻2号，1964年

第4章　『季刊理論経済学』第16巻1号，1965年

第5章　『季刊理論経済学』第16巻2号，1966年

第6章，第7章　書き下ろし，1972年

第8章　『季刊理論経済学』第18巻2号，1967年

第9章 『季刊経済学論集』第33巻2号，1967年

第10章 『季刊経済学論集』第31巻1号，1965年

第11章，第12章 『季刊経済学論集』第37巻1号，1971年

第13章 『季刊経済学論集』第32巻3号，1966年

第14章 書き下ろし，1972年

第15章 『季刊理論経済学』第23巻1号，1972年

第16章 書き下ろし，1972年

なお，この本の出版については，東洋経済新報社出版局編集部の丸山常喜氏にたいへんお世話になった．ここでお礼を申し上げたい．

1972年7月

竹内 啓

目　　次

I 序論

第 1 章

統計的推測の基本概念

1.1 確 率 モ デ ル

観測されたデータ $X=(X_1, \cdots\cdots, X_n)$ が，ある一定の確率法則に従って分布する確率変数(ベクトル)であるとし，その分布を規定したものを確率モデル probability model という．

統計的推測が問題とされる場合には，確率法則は少なくとも部分的に未知の部分を含む．未知の部分は，一般には母数 parameter で表わされる．母数は実数または実ベクトルで表わされることが多いが，無限次元の場合もある．データから母数 θ，あるいは，その函数として表わされるような量について判断を下すことが，統計的推測 statistical inference の問題と呼ばれるものである．

母数 θ が与えられたときの X の確率分布を P_θ，また X の分布が連続の場合には，その密度函数を $f(x, \theta)$ と表わす．また X の任意の実函数を $T=t(X)$ の平均，分散をそれぞれ $E_\theta(T)$，$V_\theta(T)$ で表わす．すなわち X が連続ならば，

$$E_\theta(T)=\int t(x)f(x, \theta)\,dx$$

$$V_\theta(T)=\int t^2(x)f(x, \theta)\,dx-(E_\theta(T))^2$$

である．

Xの函数 $T=t(X)$ を一般に統計量 statistic という．Tと与えたときのXの条件付き分布がθに無関係であるとき，Tを十分統計量 sufficient statistic という．Xが連続のとき，Tが十分統計量になるための条件は，密度函数が，

$$f(x, \theta)=h(x)g(t(x), \theta)$$

という形に分解されることである．

Tが十分統計量であれば，Xに含まれるθに関する情報は，すべてTの値だけを知ることによって得られることが示される．したがって，十分統計量は統計的推測においてきわめて重要な概念である．

観測されるデータの数が大きいとき，近似的な結論を得るために，確率変数の無限の系列 $\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots\}$ を考えることがある．このとき，これから計算される統計量の系列 $T_n=t_n(X_1, \cdots\cdots, X_n)$，$(n=1, 2, \cdots\cdots)$ について，もし任意の $\varepsilon>0$ について $n\to\infty$ のとき，

$$P_\theta\{|T_n-c_\theta|>\varepsilon\}\to 0$$

となるならば，$\{T_n\}$はc_θに確率収束 converge in probability するといい，

$$\operatorname{plim} T_n=c_\theta$$

と表わす．

また，T_nの分布がある確率法則に収束する，すなわち任意のaについて，

$$\lim P_\theta\{T_n\leq a\}=F(a, \theta)$$

となるとき，T_nは漸近的 asymptotically に分布函数 $F(a, \theta)$ をもつ分布に従うという．

重要な例として，$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots$がすべて互いに独立に平均$\mu(\theta)$，分散$\sigma^2(\theta)$をもつ同一の分布に従うとき，$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ とすると，

$$\operatorname{plim}\overline{X}_n=\mu(\theta)$$

となることが示される(大数の弱法則)，また $\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu(\theta))$ が漸近的に平均0，分散$\sigma^2(\theta)$の正規分布に従う(中心極限定理)．

1.2 推　　　定

実数 θ, あるいは, 一般には母数の実函数 $g(\theta)$ を推定する場合を考える. $X=(X_1, \cdots\cdots, X_n)$ に対応して, 一つの推定値 $\hat{g}(\theta)$ を対応させるような方式を点推定 point estimation, あるいは単に推定といい, $\hat{g}(\theta)=\gamma(X)$ を推定量 estimator という.

推定量の期待値がつねに $g(\theta)$ に等しい. すなわち, すべての θ に対して,

$$E_\theta\{\hat{\gamma}(X)\}=g(\theta)$$

であるとき, $\hat{\gamma}$ は不偏 unbiased であるという.

不偏な推定量の中で, 分散をつねに最小にするものも一様最小分散不偏推定量 uniformly minimum variance unbiased estimator (略して UMV 推定量) という. すなわち, γ^* が UMV 推定量であるとは, 任意の不偏推定量 γ に対して,

$$V_\theta(\gamma^*(X))\leqq V_\theta(\gamma(X))$$

がすべての θ について成り立つことである. UMV 不偏推定量は, つねに存在するとはかぎらないが, もし存在するならば, それはよい推定量であると考えられる.

$\theta=(\theta_1, \cdots\cdots, \theta_p)$ が実ベクトルであり, 密度函数が θ に関して連続微分可能であるとき,

$$\begin{aligned}I_{ij}&=E\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log f(X, \theta)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log f(X, \theta)\right)\\&=\int\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}f(x, \theta)\frac{\partial}{\partial\theta_j}f(x, \theta)/f(x, \theta)\right]dx\end{aligned}$$

を要素とする行列をフィッシャー情報行列 Fisher's information matrix という.

$g(\theta)$ の任意の不偏推定量 $\gamma(X)$ に対して, 一定の制約条件の下で次の関係が成り立つ (Cramér-Rao の定理).

$$V_\theta(\hat{\gamma}(X))\geqq\sum_i\sum_j I^{ij}\frac{\partial}{\partial\theta_i}g(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta_j}g(\theta)$$

ただし，I^{ij} は情報行列の逆行列の要素を表わしている．

十分統計量と不偏推定量に関しては，次のことが成り立つ(Rao-Blackwell の定理)．すなわちTが十分統計量，$\gamma(X)$ が $g(\theta)$ の不偏推定量とするとき，$\gamma^*(T)=E_\theta(\gamma(X)/T)$($T$を与えたときの条件付き期待値)とするとき，

$$E_\theta(\gamma^*(T))=g(\theta)$$

すなわち，$\gamma^*(T)$ は不偏推定量で，かつ

$$V_\theta(\gamma^*(T))\leqq V_\theta(\gamma(X))$$

となる．

十分統計量Tが完備 complete であるとは，

$$E_\theta(\phi(T))=0$$

がすべてのθについて成り立つならば，$\phi(T)\equiv 0$ となることをいう．このとき，Tの函数である母数 $g(\theta)$ の不偏推定量となるようなものは一義的に定まるから，もし不偏推定量が存在すれば，UMV 推定量が存在することになる．

このような考え方とは別個の考え方として，最尤法 maximum likelihood がある．すなわち，θが実ベクトル，Xが密度函数 $f(X,\theta)$ をもつとき，

$$\max f(X,\theta)=f(X,\hat{\theta})$$

となるような$\hat{\theta}$を最尤推定量という．最尤推定量は観測値の数が大きくなると，多くの場合よい推定量になる．すなわち，$(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots)$ が互いに独立に同じ分布に従い，またθが実数のとき，その密度函数を$f(X,\theta)$とすると，$(X_1, \cdots\cdots, X_n)$ に基づく最尤推定量$\hat{\theta}_n$は，漸近的に正規分布に従う．より詳しくいえば，$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$が漸近的に平均0，分散$1/I_\theta$の正規分布に従うことになる．ただし，ここで，

$$I_\theta=E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right)^2$$

である．

もしある$\hat{\theta}_n$について，$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$ の分布が，ある $\theta=\theta_0$ の近くで一様に平均0，分散σ_θ^2の漸近正規分布に近づくならば，$\sigma_\theta^2\geqq I_\theta^{-1}$ となることが示されるから，最尤推定量は漸近的に正規分布に従う推定量の中で漸近分散が最小に