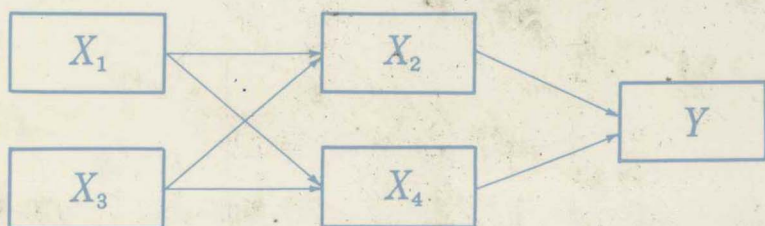


計量経済学の研究

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF
STATISTICAL INFERENCE IN ECONOMETRICS

竹内 啓 著

東洋経済新報社



計量経済学の研究

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF
STATISTICAL INFERENCE IN ECONOMETRICS

竹内 啓 著

東洋経済新報社

著者紹介

- 1933年 東京に生まれる。
1956年 東京大学経済学部卒業，その後同大学大学院，
同大学同学部助手を経て，1963年4月助教授
となり現在に至る。
専攻 数理統計学（経済学博士）
著書 『数理統計学』『多変量解析の基礎』共に東洋
経済新報社，『線型数学』培風館，『社会科学
における数と量』東京大学出版会，『転機に
たつ科学』（共著）中央公論，など。
訳書 フィッシャー著『統計的方法と科学的推論』
（共訳）岩波書店，ジョンストン著『計量経済
学の方法』東洋経済新報社，など。
住所 神奈川県鎌倉市山崎1488-9

計量経済学の研究

定価 2800 円

昭和47年9月16日発行

著者 たけうち けい 竹内 啓

発行者 村山公三

発行所 東京都中央区日本橋本石町1の4 東洋経済新報社

郵便番号 103 電話東京(270)代表4111 振替口座東京6518

© 1972 <検印省略>落丁・乱丁本はお取替えいたします。 3033-3121-5214

は し が き

計量経済学 econometrics における統計理論は、1950年代初めごろ、Cowell's Commission の Monograph Series において、それまでの結果が集大成されて以後、かなり長い間にわたって発展が停滞していたといつてよいように思われる (H. Theil のいくつかの貢献はおそらくその中でほとんど唯一の例外といつてよいであろう)。1960年代にはいつて出版された Johnston, Goldberger, Christ, Malinvaud らの本も、教科書としてはそれぞれに特色をもつたものではあつても、理論的な内容においては、それまでの研究水準を抜くものではなかつた。

これに対して、ようやく 1960年代の中ごろから、新たな理論的展開が比較的小数の人々によつてではあるが、本格的に始められるようになったといつてよいように思われる。その中で主要な結果は、小標本理論の新たな展開、時系列理論の応用の精密化、分布の近似、あるいは漸進展開の精密化等があり、これらはまたまとまつたというよりも、発展の途中にあるといつてよいであろうが、それぞれについて佐和、Richardson, Hannan, Kadane, 等の研究をあげることができよう。この発展の中で少なからぬ貢献を果たし、また、現に果たしつつある佐和隆光氏の研究の一部は、すでに『計量経済学の基礎』(東洋経済新報

社, 1970 年)にまとめられている。

この本は、この間において筆者自身が得た若干の結果について、これまでいくつかの学術誌に発表したもの、および未発表のノート、あるいは筆者の学位論文「計量経済モデルにおける統計的推測の諸問題」(1966 年)の中に展開したものをまとめたものであり、英文のタイトルならば、“Contributions to the Theory of Statistical Inference in Econometrics,” とでも題すべきものである。

したがって、この本は体系的な教科書ではない。ただのちのための便宜に、最初の 2 章で統計的推測の基本的な概念について、一通りの説明だけを加えておいた。

残りの、すなわち本書の主要な部分は 2 部に分けられる。一つはエコノメトリック・モデルにおいて統計的推測の問題一般を扱い、もう一つの部では予測の問題を扱っている。

なお、章の順序は、一応理論的な展開の順になっているので、もともとの論文の書かれた時間的順序には一致していない。中には書かれてからすでに 10 年近くたっているものもあり、それらは一部すでに乗り越えられたもの、あるいは、のちになって筆者自身修正ないし改善できることに気づいたものもあるので、それらについてはそれぞれの章に“補論”として付け加えておいた。

各章について、一応そのおもなもとになった出所を次にあげておく。ただ今回収録にあたって大幅に編成を変えたものもある。なお、『季刊理論経済学』は理論・計量経済学会の機関誌(発行元は東洋経済新報社)、『季刊経済学論集』は東京大学経済学会の発行によるものである。

第 1 章, 第 2 章 書き下ろし, 1972 年

第 3 章 『季刊理論経済学』第 14 巻 2 号, 1964 年

第 4 章 『季刊理論経済学』第 16 巻 1 号, 1965 年

第 5 章 『季刊理論経済学』第 16 巻 2 号, 1966 年

第 6 章, 第 7 章 書き下ろし, 1972 年

第 8 章 『季刊理論経済学』第 18 巻 2 号, 1967 年

第 9 章 『季刊経済学論集』第 33 卷 2 号, 1967 年

第 10 章 『季刊経済学論集』第 31 卷 1 号, 1965 年

第 11 章, 第 12 章 『季刊経済学論集』第 37 卷 1 号, 1971 年

第 13 章 『季刊経済学論集』第 32 卷 3 号, 1966 年

第 14 章 書き下ろし, 1972 年

第 15 章 『季刊理論経済学』第 23 卷 1 号, 1972 年

第 16 章 書き下ろし, 1972 年

なお, この本の出版については, 東洋経済新報社出版局編集部の丸山常喜氏
にたいへんお世話になった。ここでお礼を申し上げたい。

1972 年 7 月

竹 内 啓

目 次

は し が き

I	序 論	1
第 1 章	統計的推測の基本概念	3
1.1	確率モデル.....	3
1.2	推 定.....	5
1.3	検 定.....	7
第 2 章	線 型 モ デ ル	10
2.1	単一方程式モデル.....	10
2.2	同時方程式モデル.....	13
II	統計的推測の問題	17
第 3 章	多重共線性と変数選択	19
3.1	多重共線関係.....	19
3.2	不 偏 推 定.....	20

3.3	変数の除去——平均平方誤差の吟味	22
3.4	変数の変換——成分分析法の応用	25
3.5	モデルの解釈	27
3.6	推定方式の考え方——共線関係の検出	31
3.7	いくつかの注意	32
3.8	補論——変数除去規準について	35
第4章	モデルと手法の妥当性	38
4.1	簡単な推定問題	38
4.2	数値的考察	45
4.3	標本からの分布形推定	49
4.4	時系列の場合	52
4.5	標本調査の場合	59
4.6	単純回帰モデルへの応用	63
第5章	非正則な漸近理論	67
5.1	一致推定量の必要条件	67
5.2	最尤推定量の一致性	71
5.3	最尤推定量の漸近正規性	73
5.4	無数の母数を含む場合	76
第6章	変数誤差のモデル	81
6.1	理論的な考察	81
6.2	操作変数法	87
第7章	多くの母平均の同時推定——Stein の例	94
7.1	問題の再吟味	94
7.2	いくつかの拡張	101
第8章	同時方程式体系における母数推定の漸近理論	107

8.1	BAN 推定量	107
8.2	最尤推定量	108
8.3	連立方程式体系の BAN 推定量	115
8.4	単一方程式における BAN 推定量	119
8.5	部分体系の場合	124
8.6	補論——先決内生変数が含まれる場合	128
第 9 章	同時方程式推定量の小標本モーメント	132
9.1	最小 2 乗推定量の計算	132
9.2	操作変数法	139
9.3	補論——4 次までのモーメントの漸近式	143
第 10 章	多変量解析の手法と問題点	152
10.1	多変量解析法の応用	152
10.2	相 関 行 列	154
10.3	成分分析法	158
10.4	データの比重の問題	162
10.5	時系列データへの応用に際しての問題	166
10.6	行列データへの応用	168
10.7	2 組のデータ間の関連表現	171
10.8	成分分析法の拡張	173
10.9	正準相関分析	176
10.10	判別函数分析	179
Ⅲ	統計的予測の問題	183
第 11 章	予測の問題点 (I)——単純予測の場合	185
11.1	予測の諸条件	185
11.2	単純予測の基準形	188
11.3	線型性の問題	190

11.4	誤差項の独立性	195
11.5	誤差項の分布形	197
11.6	モデル選択の問題	200
第12章	予測の問題点（Ⅱ）——複雑な予測形式	203
12.1	多段予測	203
12.2	同時方程式体系の問題	209
12.3	政策変数に関する条件予測	211
12.4	共変変数に関する条件予測	218
12.5	政策変数の決定	221
12.6	補論——政策変数の決定	226
第13章	予測の形式と基準	231
13.1	問題の抽象的な定式化	231
13.2	予測方式の分類	235
13.3	点予測の問題	236
13.4	予測域の構成	240
13.5	多重予測の問題	245
第14章	なめらかに変化するトレンドの予測	249
14.1	予測の線型ミニマックス解	249
14.2	何期か先の時点予測	257
第15章	予測の単一方程式法	261
15.1	予測の方法	261
15.2	予測量の導出	263
15.3	予測量の漸近分散	267
15.4	予測量の方程式	270
15.5	先決内生変数を含む場合	273
15.6	モデルテストへの応用	275

第 16 章 予測に関しての同値なモデル	278
16.1 予測に関して同値なモデルの条件	278
16.2 内生変数が二つの場合	279
16.3 一般の場合	281

索 引

I 序 論

第 1 章

統計的推測の基本概念

1.1 確率モデル

観測されたデータ $X=(X_1, \dots, X_n)$ が, ある一定の確率法則に従って分布する確率変数(ベクトル)であるとし, その分布を規定したものを確率モデル probability model という.

統計的推測が問題とされる場合には, 確率法則は少なくとも部分的に未知の部分を含む. 未知の部分は, 一般には母数 parameter で表わされる. 母数は, 実数または実ベクトルで表わされることが多いが, 無限次元の場合もある. データから母数 θ , あるいは, その函数として表わされるような量について判断を下すことが, 統計的推測 statistical inference の問題と呼ばれるものである.

母数 θ が与えられたときの X の確率分布を P_θ , また X の分布が連続の場合には, その密度函数を $f(x, \theta)$ と表わす. また X の任意の実函数を $T=t(X)$ の平均, 分散をそれぞれ $E_\theta(T)$, $V_\theta(T)$ で表わす. すなわち X が連続ならば,

$$E_\theta(T)=\int t(x)f(x, \theta)dx$$

$$V_\theta(T)=\int t^2(x)f(x, \theta)dx-(E_\theta(T))^2$$

である。

X の函数 $T=t(X)$ を一般に統計量 statistic という。 T と与えたときの X の条件付き分布が θ に無関係であるとき、 T を十分統計量 sufficient statistic という。 X が連続のとき、 T が十分統計量になるための条件は、密度函数が、

$$f(x, \theta) = h(x) g(t(x), \theta)$$

という形に分解されることである。

T が十分統計量であれば、 X に含まれる θ に関する情報は、すべて T の値だけを知ることによって得られることが示される。したがって、十分統計量は統計的推測においてきわめて重要な概念である。

観測されるデータの数が大きいき、近似的な結論を得るために、確率変数の無限の系列 $\{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ を考えることがある。このとき、これから計算される統計量の系列 $T_n = t_n(X_1, \dots, X_n)$, $(n=1, 2, \dots)$ について、もし任意の $\varepsilon > 0$ について $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$P_\theta \{|T_n - c_\theta| > \varepsilon\} \rightarrow 0$$

となるならば、 $\{T_n\}$ は c_θ に確率収束 converge in probability するといひ、

$$\text{plim } T_n = c_\theta$$

と表わす。

また、 T_n の分布がある確率法則に収束する、すなわち任意の a について、

$$\lim P_\theta \{T_n \leq a\} = F(a, \theta)$$

となるとき、 T_n は漸近的 asymptotically に分布函数 $F(a, \theta)$ をもつ分布に従うという。

重要な例として、 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ がすべて互いに独立に平均 $\mu(\theta)$ 、分散 $\sigma^2(\theta)$ をもつ同一の分布に従うとき、 $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とすると、

$$\text{plim } \bar{X}_n = \mu(\theta)$$

となることが示される(大数の弱法則)、また $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu(\theta))$ が漸近的に平均 0、分散 $\sigma^2(\theta)$ の正規分布に従う(中心極限定理)。

1.2 推 定

実数 θ , あるいは, 一般には母数の実函数 $g(\theta)$ を推定する場合を考える.
 $X = (X_1, \dots, X_n)$ に対応して, 一つの推定値 $\hat{g}(\theta)$ を対応させるような方式
 を点推定 point estimation, あるいは単に推定といい, $\hat{g}(\theta) = \tau(X)$ を推定量
 estimator という.

推定量の期待値がつねに $g(\theta)$ に等しい. すなわち, すべての θ に対して,

$$E_{\theta} \{\hat{\tau}(X)\} = g(\theta)$$

であるとき, $\hat{\tau}$ は不偏 unbiased であるという.

不偏な推定量の中で, 分散をつねに最小にするものも一様最小分散不偏推定量 uniformly minimum variance unbiased estimator (略して UMV 推定量) という. すなわち, τ^* が UMV 推定量であるとは, 任意の不偏推定量 τ に対して,

$$V_{\theta}(\tau^*(X)) \leq V_{\theta}(\tau(X))$$

がすべての θ について成り立つことである. UMV 不偏推定量は, つねに存在するとはかぎらないが, もし存在するならば, それはよい推定量であると考えられる.

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ が実ベクトルであり, 密度函数が θ に関して連続微分可能であるとき,

$$\begin{aligned} I_{ij} &= E \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log f(X, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log f(X, \theta) \right) \\ &= \int \left[\frac{\partial}{\partial \theta_i} f(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} f(x, \theta) / f(x, \theta) \right] dx \end{aligned}$$

を要素とする行列をフィッシャー情報行列 Fisher's information matrix という.

$g(\theta)$ の任意の不偏推定量 $\tau(X)$ に対して, 一定の制約条件の下で次の関係が成り立つ (Cramér-Rao の定理).

$$V_{\theta}(\hat{\tau}(X)) \geq \sum_i \sum_j I^{ij} \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\theta)$$

ただし, I^{ij} は情報行列の逆行列の要素を表わしている.

十分統計量と不偏推定量に関しては, 次のことが成り立つ (Rao-Blackwell の定理). すなわち T が十分統計量, $r(X)$ が $g(\theta)$ の不偏推定量とすると, $r^*(T) = E_\theta(r(X)|T)$ (T を与えたときの条件付き期待値) とするとき,

$$E_\theta(r^*(T)) = g(\theta)$$

すなわち, $r^*(T)$ は不偏推定量で, かつ

$$V_\theta(r^*(T)) \leq V_\theta(r(X))$$

となる.

十分統計量 T が完備 complete であるとは,

$$E_\theta(\phi(T)) = 0$$

がすべての θ について成り立つならば, $\phi(T) \equiv 0$ となることをいう. このとき, T の函数である母数 $g(\theta)$ の不偏推定量となるようなものは一義的に定まるから, もし不偏推定量が存在すれば, UMV 推定量が存在することになる.

このような考え方とは別個の考え方として, 最尤法 maximum likelihood がある. すなわち, θ が実ベクトル, X が密度函数 $f(X, \theta)$ をもつとき,

$$\max f(X, \theta) = f(X, \hat{\theta})$$

となるような $\hat{\theta}$ を最尤推定量という. 最尤推定量は観測値の数が大きくなると, 多くの場合よい推定量になる. すなわち, $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ が互いに独立に同じ分布に従い, また θ が実数のとき, その密度函数を $f(X, \theta)$ とすると, $(X_1, \dots, X_n)$ に基づく最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ は, 漸近的に正規分布に従う. より詳しくいえば, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ が漸近的に平均 0, 分散 $1/I_\theta$ の正規分布に従うことになる. ただし, ここで,

$$I_\theta = E\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta)\right)^2$$

である.

もしある $\hat{\theta}_n$ について, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ の分布が, ある $\theta = \theta_0$ の近くで一様に平均 0, 分散 σ_θ^2 の漸近正規分布に近づくならば, $\sigma_\theta^2 \geq I_\theta^{-1}$ となることが示されるから, 最尤推定量は漸近的に正規分布に従う推定量の中で漸近分散が最小に