境界要素法の基礎

三重大学教授 工学博士
神谷紀生 著

境界要素法の基礎

三重大学教授 工学博士
神谷紀生 著

培風館

神 谷 紀 生 略歴
かみ や のり お

1963年 名古屋大学工学部応用物理学科
卒業
1968年 工学博士(名古屋大学)
現 職 三重大学工学部機械系学科教授

主要著書

固体の力学/理論(共訳, 培風館, 1970)
非線形動的弾性学(共訳, 培風館, 1973)
異方弾性板の理論(訳, 森北出版, 1975)
連続体の力学入門(共訳, 培風館, 1980)
境界要素法入門(共訳, 培風館, 1980)
境界要素法の基礎と応用
(共訳, 培風館, 1981)
有限要素法と境界要素法
(著, サイエンス社, 1982)

© 神谷紀生 1982

昭和57年10月15日 初 版 発

境界要素法の基礎

著 者 神谷紀生
発行者 山本健二

発行所 株式会社 培 風 館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話(03)262-5256(代表)・振替 東京 4-44725

定 価 ¥ 2800.

中央印刷・三水舎製本

本書の内容の一部あるいは全部を無断て複製すると，著作権
および出版権侵害となることかありますので御注意ください。

推せんのことば

It is a great pleasure for me to introduce the new book written by my friend and colleague Norio Kamiya. The book covers the important topic of foundations of boundary element methods and is well suited to engineers in Japan who want to be introduced to the technique and its applications. The text starts by pointing out the characteristics of the three main engineering methods of numerical analysis, i.e. finite differences, finite elements and boundary elements and continues by stressing the simplicity of applying boundary elements. It is only after the reader is fully aware of the rationale behind the boundary element technique that Norio Kamiya introduces the relevant theory which progresses from simple linear elastic problems to more complex cases.

This book is an important contribution to the understanding of boundary element methods by engineers and is to be recommended to those who wish to become acquainted with the main characteristics and advantages of the new technique.

Dr. Carlos Brebbia
Southampton
England.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

推せんのことば（訳）

私の友人てしかも研究上の同僚てもある神谷紀生氏が著した新しい本を紹介てきることをたいへん光栄に思う。この本は境界要素法の基礎に関する重要な内容を含んており，この方法とその応用を知ろうとする日本のエンジニアにとってふさわしいものてある。この本は，まず3種類の主要な解析法，すなわち差分法，有限要素法および境界要素法の特徴を示し，次に境界要素法の応用のしやすさを強調している。境界要素法の理論を十分に理解てきるようにしたあとで，著者は，簡単な線形弾性問題からより複雑な問題へ進むための適切な理論を導入している。

この本は，エンジニアが境界要素法を理解するために貴重な役割をはたすと思われるので，この新しい方法の主要な特徴と優れた点を知りたい人に推せんする。

カルロス　ブレビア

序　文

さまざまな分野の技術者，研究者にとって，数値解析技術，あるいはコンピュータ利用技術はいまや必要欠くべからざるものとなっている。自然現象や人工的に作り出される現象を定量的に明らかにするためには，実験的研究のほかに，数値シミュレーション，ことにディジタルシミュレーションが有効な手段である。その手段にとって必要なコンピュータが要請にこたえられるような能力をもつに至ったことが，このような状況を作り出したともいえる。したがって，以下で述べる数値解析技術はこのような高速度，高容量のコンピュータの利用を前提にしている。

現在のところ，数値解析法としてもっとも汎用性に富む有効な方法は有限要素法(Finite Element Method, FEM)である。構造解析におけるマトリックス法からスタートしたといわれるこの方法は，ここ十数年間の世界的規模での熱心な開発研究，応用，試行錯誤の結果として構造解析だけでなくきわめて広い分野に普及し，他に類をみない有効な方法としての地位が確立された。わが国においても，コンピュータを利用した大規模計算といえばほとんどすべて何らかの形で有限要素法のソフトウェアに関連しているといっても過言ではない。ブラックボックスとして利用するにしろ，有限要素法では入力データの準備に一般に手間がかかる。考える対象領域全体を要素分けするためにこのようになるわけである。また，種々の方策が試みられているが，通常高能力のコンピュータを利用することが避けられない。この結果，計算コストは一般に安いといえない。

このような有限要素法のなきどころを解決する可能性をもった数値解析法として，最近急成長をとげた手法が境界要素法(Boundary Element Method, BEM)である。境界要素法は古くて新しい方法であるといわれる。これは，境界要素法のもとになる考え方は従来から知られている方法であるが，これに有限要素法と同様な要素分けによるコンピュータ向きの新しい扱い方をとり入れた方法，あるいは従来の方法をみなおした方法であることを意味する。境界要素法では，境界だけを要素に分割して扱うので，対象が2次元領域であればそれを囲む曲線，3次元領域であればこれを囲む曲面だけを考える。したがって，有限要素法に比べ，考える空間の次元が1次元低くなり，入力データ量は大幅に減少することにつながる。

境界要素法のもとになる考え方は，微分方程式で表わされた境界値問題を境界上の積分方程式に変換することからスタートする。したがって，境界要素法のよび名がつけられる以前は積分方程式法(Integral Equation Method)あるいは境界上の積分方程式を扱うという意味で境界積分方程式法(Boundary Integral Equation Method)などとよばれていた。これらは古くから微分方程式を Green 関数を用いて解く1つの標準的な手段として知られていたし，またポテンシャル論の名でよばれる方法とも密接な関連をもつ。積分方程式法にもさまざまな方法があり，それぞれ長所，短所がみられるが，本書で示す直接法とよばれる方法は，境界積分方程式を境界条件に現われる関数によって定式化する。したがって，関数のもつ意味が明瞭であると同時に，扱いが直線的で理解しやすい。弾性体の応力解析のために このような直接法による定式化が行なわれたのは1967年であった。その後，イギリスおよびフランスを中心とするヨーロッパ諸国およびアメリカにおいて方法の改良，応用の拡大が精力的になされ，今日では，弾性体に対しては有限要素法に比肩できるようなプログラムが完成されているし，非弾性解析への応用も行なわれるようになり，おおむね実用化の段階に達している。応力解析以外の分野に関しても同様である。

境界要素法というよび名は，境界積分方程式を解くために，有限要素法における有限要素(領域内の要素)に対し，境界を有限の大きさをもつ要素(これを境界要素とよぶ)に分けて扱うことを強調したものである。このような名前のつけ方は有限要素法の場合と同様である。

この本は，境界要素法を応力解析に用いる目的ではじめて学ぼうとする人のために書いたものてある。はじめに，有限要素法と比較しながら境界要素法をブラノクボノクスとして用いるための手続き，入力データについて説明する。有限要素法の一通りの知識があれは好都合てあるが，まったく知らなくてもさしつかえない。次には，応力解析か目的てあるから，弾性力学の初歩の知識が必要になるし，またコノピュータによる多量の数値データを扱うから，マトリノクス計算の知識も必要になる。そこて，本書の前半は このような予備知識を習得するためにあててある。そのしめくくりとして，境界要素法の基礎式を導出する際に必要な単位力による解を平易な方法で求めてある。このような準備のあとて，境界要素法の基礎式を導出し，それをコノピュータ向きに離散化，マトリノクス表示すること，さらには基礎式に現われる積分の計算法と結果を示す。これらの扱いは すへて2次元弾性体を対象として説明する。これによって，境界要素法解析が一通り理解てきるようになる。そのあとては，単純な方法をより一般化，高精度化するためのいくつかの方法のうちの基本的なものの概略を説明する。第10章ては簡単なコノピュータプロクラムを作成し，その利用法を示す。さらに，今までになされた境界要素法の応用例を第11章に示す。

この本は入門書てあるから，表記法および表現はてきるかきり平易につとめた。このために，記述が厳密てなかったりあるいは冗長になる面がみられることをあらかじめことわっておく。この本によって境界要素法のアウトライノを理解された方々はより進んた本を読めは，さらに深く内容をとらえ，各分野への有効な応用かてきるものと信する。本書かそのためにいささかなりとも手助けになれば幸いてある。

この本を書くに当り国内，国外のさまざまな教科書，論文を参照させていたたいた これらは巻末にまとめてあるか，その中てとくに

C. A. フレビア，境界要素法入門，培風館

三好俊郎，有限要素法入門，培風館

の2冊の本からは参考になる点が多かった。ここに記してお礼申し上げる。また，ここに示したコンピュータプログラムは著者の研究室の佐脇 豊助手の手助けによるものであり，同氏の助力に感謝したい。

末筆ながら，境界要素法の価値を早い時期に見出され，それに関する出版，普及に務められ，今回も著者の申し出を快諾された（株）培風館に敬意を表する。また，直接ご担当いただいた渡辺邦彦氏と児玉晴男氏に深謝する。

1982年5月

神谷紀生

目　次

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

1 数理解析と数値解法

1.1 はじめに

物体に生じる応力・変形，熱伝導，流体の流れ，その他 種々の現象は，それらを定量的に解析するために，通常 数理モデルとして表わす。弾性体のような固体のつり合い方程式，熱伝導に関する Fourier 熱伝導方程式，流体に関する Laplace 方程式，Navier-Stokes 方程式などがそれであり，これらはその現象に対する**支配方程式**とよばれ，偏微分方程式で表わされることが多い。これらの支配方程式は物体内の局所的な条件から導出されるが，考える位置は任意であるから，物体内全域で成り立つ。固体内の応力や流体のふるまいを一意的に定めるためには，この支配方程式だけでは十分でない。固体には外から力が作用しているし，また何らかの方法で支えられているはずであり，また液体であれば何らかの容器に入れられているか，あるいは流路にそって流れているはずであるから，これらの条件を規定しなければならない。このようなまわりの条件を**境界条件**とよぶ。これに対し，前者は考える対象の内部すなわち考える領域について成り立つ関係式である。このように，領域内での関係式と境界条件の組合せによって 1 つの問題を考えることができ，これを一般に**境界値問題**とよぶ。この解を得ることを境界値問題を解くという。具体的には，弾性体の応力，流体のふるまいを定めることである。

もちろん，現象は時間とともに変化するのが普通であり，このような問題を動的問題とよぶ。時間とともに変化する現象を明らかにするためには，その現象の開始時刻において指定される条件が境界条件以外に必要になる。これを初

期条件とよび，初期条件を伴う問題を**初期値問題**と名付ける。したがって，厳密にいえば一般的な現象はすべて初期値-境界値問題となる。以下では初期値問題については説明しないが，境界値問題についての解析法が理解できれば，初期値問題への応用も難しくない。本書では，境界値問題のコンピュータを利用した解法について考える。しかし，境界値問題全般にわたることはできないので，弾性体の応力・変形解析に限定して扱うことにする。

1.2 数値解析法

境界値問題が解析的に解けるのは，支配方程式がきわめて単純な場合で，たとえば線形な微分方程式，しかも境界の形状が特別の場合に限られる。また古くから考えられているさまざまな数値解法はそれぞれ特別の問題にだけ有効に適用できるにすぎない。現在のところ，広い一般性をもつ数値解法としてよく知られているのは**有限要素法**と**差分法**(**定差法**)であろう。境界要素法との解法の違いを知るために，有限要素法と差分法の概略を復習しておこう。図1.1に示す2次元領域の境界値問題を例にとる。

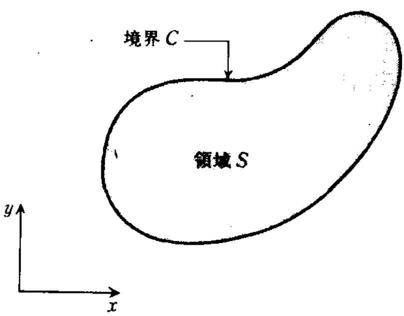

図 1.1　2次元境界値問題

1.2.1 差分法

歴史的にもっとも古く，しかも考えが比較的単純な方法が差分法[27]† である。差分法では図1.2のように考える領域を，x, y 軸方向ともに適当な間隔

† 巻末にあげた参考書および引用文献を［ ］付きの番号によって示す。

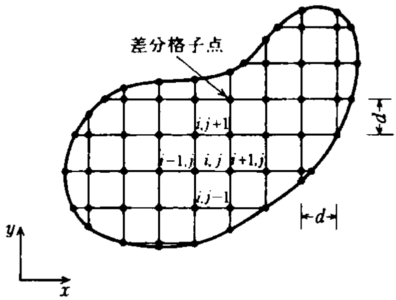

図 1.2 差分法

(図では d)の格子によって分ける。支配方程式に現われる関数 $u(x, y)$ が連続微分可能であれば，$u(x, y)$ の格子点 (i, j) における微係数は まわりの格子点の関数値を使って，たとえば次のように近似できる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \fallingdotseq \frac{1}{2d}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \fallingdotseq \frac{1}{2d}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \fallingdotseq \frac{1}{d^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})$$

左辺の微係数(微分)に対し右辺の表示を**差分**という。したがって，もとの支配微分方程式は差分で近似された関係式， すなわち **差分方程式** として表わされる。差分方程式は考える格子点 (i, j) の関数値とまわりの格子点の関数値によって表わされる。領域内のすべての格子点について同様な関係が成り立つ。これに境界上の格子点について与えられる境界条件を考慮して，格子点における未知関数に関する連立1次方程式が得られるので，これを解くことになる。したがって，差分法は支配微分方程式に数学的近似(差分近似)を導入して得られる方程式を解く手法であるといえる。

差分法では，領域内で場所によって格子間隔を変えることがめんどうであること，境界近くでの扱いにいくぶん不都合な点があることなどが指摘されている。たとえば，図1.3のように，曲線境界であれば，境界は必ずしも格子点に一致しないから，境界近くで不等間隔の格子を考えたり，あるいは近似的な境界形状を考えることが必要になる。また，複雑な境界条件を差分表示すること

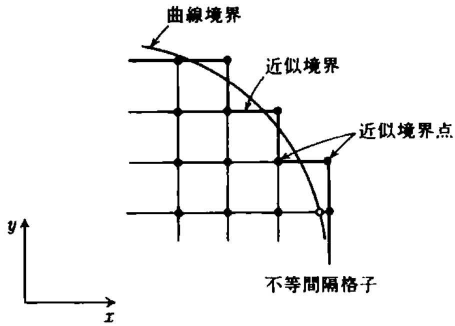

図 1.3 曲線境界の差分格子近似

が困難であること，3次元問題の扱いが容易でないことも古典的な差分法の欠点である。

1.2.2 有限要素法[16~19]

有限要素法では，図1.4に示すように領域 S を有限個の**部分領域**(図では三角形で表わされている。これを**要素**，**領域要素**あるいは**有限要素**という)に分け，これらの部分領域において値を代表する点(**節点**，要素の頂点にとることが多い)における未知関数に関する連立1次方程式を誘導し，これについて問題を解析する。もとになる原理は，差分法における差分近似とはまったく異なり，弾性体では最小ポテンシャルエネルギ原理，仮想仕事原理など，あるいはより一般的な意味では**変分原理**である。エネルギ積分を領域全体にわたって行なうので，対象物体あるいは問題領域全体を考える必要がある。領域を部分領域に分け，個々の部分領域に関する関係を加え合わせて領域全体を扱う。個

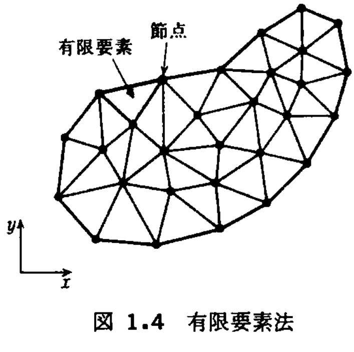

図 1.4 有限要素法

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com