シュヴァルツ

解析学 4

積分法 下

京都大学教授
森　　毅 訳

東京図書株式会社

シュヴァルツ

解析学 4

積分法 下

森　　毅 訳

東京図書株式会社

シュヴァルツ解析学 4

積分法 下 ￥1600

1970年12月25日 第1刷発行
1978年10月20日 第2刷発行

Printed in Japan

著 者 L. シュヴァルツ
訳 者 森 毅
発行所 東京図書株式会社
東京都文京区水道 2-5 カキビル
振替東京4-13803 電話(814)7818〜9

3341-2104-5160

LAURENT SCHWARTZ

COURS D'ANALYSE

I

HERMANN

Paris 1967

序

しばしば語られて来たように，物理学者や技術者のための《涙なしの数学》は存在しない．現代の物理学者や技術者は，莫大な量の，しかも広大な領域にわたっての数学的知識を必要とする．だから，これら数学の《利用者》にとって，必要なすべての結果を，完全な証明つきで習得することは，もはや絶対に不可能である．ところが，数学では，一つ一つの結果に厳密な証明を付けることが通念となっている．したがって，数学の教程は，つぎの二つのうちのどちらかを選ばざるを得ない．一つは短い教程で，ほんの少しの結果をきちんと証明する．こうすると，数学の学生は満足するだろうが，物理の学生は満足しないだろう．もう一つはやはり短い教程で，結果は豊富だが，証明はごく概略だけ付けるか，またはまったく省略してしまう．この場合には，読者のデカルト精神がまったく満たされないことになるだろう．

そこで，我々はこのどちらとも異なる第三の道を選んだ．私は長い教程，非常に長い教程を作った．それは定理をふんだんに含み，しかも，それらすべてに原則として完全な証明が付けてある．したがって，これは本来の意味での教程というよりはむしろ一冊の本，参考図書である．この教程を実際に講義するときには，その要約だけしか話すひまがないと思う．学生諸君は，したがって，この本全部を義務的に学ぶ必要はない．その都度明確に指示される必須部分だけを学べばよい．必須部分は，たくさんの結果と少しの証明とから成っている．

そのかわり，学生諸君は，この本で出会う新しい考えかたや構造をすべて理解

しなければならない．また，諸定理とその精神とを知らなければならない．さらに，習得した定理が楽々と使いこなせるようにならなければならない．これは思ったほどやさしいことではない．もし，定理に述べられていることの意味を一度も深く考えなかったとしたら，たとえ本を見ながらでも，その定理をすぐに使いこなすことは絶対に不可能である．

必須と指示した証明は，すべてもっとも教育的でしかももっとも特徴的なものばかりである．

しかし，学生諸君は，必須でない部分からも，自分の好みに一番よく合ったところを選んで勉強することができるし，しかも私はそれを強くすすめる．その際，講義担当者や私自身に相談するとよい．我々は，諸君に助言を与えることを切に望んでいるのである．こうすることによって，いろいろな好みの学生，いろいろな学力水準の学生が，ひとしく満足を得ることになるだろう．その結果，本校（Ecole Polytechnique）の同学年の学生が，人によってそれぞれ別々の部分を深く学んだことになれば大変結構なことであろう．

ロラン・シュヴァルツ

訳 者 序

本書は，Laurent Schwartz 著

«*Cours d'analyse*» (1967)

の全訳である．これは，シュヴァルツ教授の Ecole Polytechnique での解析学の講義の教程として書かれた．

原書は全二巻の仮綴本であるが，訳書は全7巻に分けた．訳書の構成はつぎのとおりである．

第1巻	集合·位相	Ch. 1	集　合
		Ch. 2	位　相
第2巻	微分法	Ch. 3	微分法
第3巻	積分法 上	Ch. 4	積分法
第4巻	積分法 下	Ch. 4	積分法（つづき）
第5巻	外微分法	Ch. 6	外微分法
第6巻	複素関数	Ch. 7	複素関数
第7巻	微分方程式	Ch. 5	微分方程式
	ヒルベルト空間	Ch. 22	ヒルベルト空間
	フーリエ級数	App.	フーリエ級数

読者への注意

1. 欄外の注意記号 ☡（危険な曲り角）は，そこが重大な誤りを犯しやすい箇所であることを示す.
2. 記号〘——〙は，反復を避けるための略記号である．たとえば，«A〘A′〙ならば B〘B′〙である» は，«A ならば B であり，A′ ならば B′ である» を意味する.
3. 訳者の補注は原注と同じ脚注の形とし，最後に［訳注］と断りを入れた.

目　　次

第4章　積　分　法（つづき）

§ 6.　写像による測度の像

$\vec{\mu}$ を，局所コンパクト空間 X で定義され，ノルム線型空間 $\vec{E}$ に値をとる測度とし，L を $\vec{E}$ からノルム線型空間 $\vec{F}$ への連続線型写像とする．このとき，公式

(6.1)　$$(L \circ \vec{\mu})(\varphi) = L(\vec{\mu}(\varphi))$$

で，新しい測度 $L \circ \vec{\mu}$ の定義されることは自明である．

実際に，$L \circ \vec{\mu}$ が $\mathscr{C}(X)$ から $\vec{F}$ への線型写像であるのは当然であるし，φ の台がコンパクト集合 K にあれば

(6.2)　$$\|(L \circ \vec{\mu})(\varphi)\| \leqslant \|L\| \, \|\vec{\mu}\|_K \, |||\varphi||| \quad \text{で,} \quad \|L \circ \vec{\mu}\|_K \leqslant \|L\| \, \|\vec{\mu}\|_K$$

となって評価されるからである．

この測度のことを，連続線型写像 L による $\vec{\mu}$ の像と言う．

しかしここで，実用上きわめて重要な，別の点から考えた像を問題にする．いま，局所コンパクト空間 X で定義され $\vec{E}$ に値をとる測度 $\vec{\mu}$ について，X から局所コンパクト空間 Y への写像 H をとる．H に適当な条件をつけて，局所コンパクト空間 Y で定義されて $\vec{E}$ に値をとる測度として，$\vec{\mu}$ の像 $H\vec{\mu}$ を定義しようというのだ．

φ が $\mathscr{C}(Y)$ にはいるとき，X 上の関数を，φ の H による逆像 $H^*\varphi$ として，公式

(6.3)　$$H^*\varphi = \varphi \circ H \qquad \text{すなわち} \qquad (H^*\varphi)(x) = \varphi(H(x))$$

で定義できる．

そこで，公式

$$(\mathrm{H}\vec{\mu})(\varphi)=\vec{\mu}(\mathrm{H}^{*}\varphi)=\int\varphi(\mathrm{H}(x))d\vec{\mu}(x) \tag{6.4}$$

によって，像 $\mathrm{H}\vec{\mu}$ を定義するのは自然である．

しかしながら，この定義では (6.4) の右辺が意味を持つかどうかわからぬし，$\vec{\mathrm{E}}$ に値をとる Y 上の測度になったかどうかもわからない．

以下，これのうまくいくような 2 つの場合を，考えることにする．

1.　H が適性連続写像の場合

定義．　局所コンパクト空間 X から局所コンパクト空間 Y への連続写像 H について，Y のコンパクト集合の H による逆像が X でコンパクトのとき，H は**適性**である，または**無限遠で連続**であると言う．

X がコンパクトのときは，X から Y への連続写像 H はすべて適性となる．なぜなら，Y のコンパクト集合は閉集合で，その H による逆像は X の閉集合，X がコンパクトだからこの逆像もコンパクトになるからである（第2章，定理 22, 23)．

X がコンパクトでないとき，X から Y への定値写像は決して適性とならない．平面 $\mathbf{R}^2$ で，座標軸への直交射影は適性でない．

定理 66.　X と Y とが距離空間で，すべての閉球がコンパクトのとき，連続写像 H が適性であるためには，Y の有界集合の H による逆像が X の有界集合になることが，必要十分である．

たしかに，H が連続だから，閉集合の逆像は閉集合であり，閉球がコンパクトならコンパクト集合というのは有界閉集合のことになる*)．

系．　X と Y とが，閉球がコンパクトとなる距離空間のとき，X から Y への連続写像 H が適性となるためには，X の無限遠に向かう点列の像が Y で無限遠に向かうことが，必要十分である．（距離空間で，点列 x_n が**無限遠に向かう**とは，定点 a との距離が $+\infty$ に行くことである．ここで，別の定点 b にしても，$d(b, x_n)\geqslant d(a, x_n)-d(a, b)$ なので，やはり $+\infty$ に行く．）

証明．　1°　まず，H を適性とする．このとき，X で x_n が無限遠に向かえば，Y で $\mathrm{H}(x_n)$ も無限遠に向かう．そうでなければ，Y の球に含まれる部分列（有界集合）があることになり，H が適性なので，対応する x_n の部分列の方も先の定理で有界になって，x_n が無限遠に向かうという仮定と矛盾する．

---

*) 任意の距離空間で，コンパクト集合は有界閉集合である．逆に，すべての閉球がコンパクトとなる距離空間では，有界閉集合は閉球（コンパクト）に含まれて閉だからコンパクトになる．これが，第2章，定理 25 の証明 1°，2° a) である．

2° 逆に，この性質が成立って，H によって X の無限遠に向かう点列が Y の無限遠に向かう点列に移されるとする．このとき，H は適性でなければならない．なぜなら，Y の有界集合 B の逆像が X で有界でないと，そこから無限遠に向かう点列がとれて，その像が無限遠に向かうことになると B が有界であるという仮定に矛盾してしまうからである．それで，H は適性となって，定理が成立する．

例．　$n \geqslant 1$ が整数のとき，$x \mapsto x^n$ は実数直線 $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への適性写像になる．

この定理の成立することが，適性写像のことを《無限遠で連続》という理由である．X と Y とに，《無限遠点》をつけ加え，X の無限遠点の像が Y の無限遠点になるように H を延長しておくと，H が適性であるとは，この延長が無限遠点で連続のことになる．

定理 67.　H が局所コンパクト空間 X から局所コンパクト空間 Y への適性連続写像のとき，X の閉集合の H による像は Y の閉集合になる*)．

証明．　A を X の閉集合，B = H(A) とする．B が閉集合になることを言う．Y の点 b が B に接触するとして，中心 b のコンパクト球 β をとる．b が B に接触するから β と B は交わらねばならない．ここで，b は β∩B に接触する**)．ところで H は適性だから，逆像 $H^{-1}(\beta)$ は X のコンパクト集合となり，A との交わりはコンパクト集合 K となる．ここで，$x \in K$ ならば x の像は β にも B にもはいるので β∩B にはいる．逆に $y \in \beta \cap B$ ならば，B にはいることから A の点 x_0 の像となり，y が β にはいることから x_0 は $H^{-1}(\beta)$ にはいり，結局 K にはいる．すなわち，像 H(K) はちょうど β∩B になる．ところで，H は連続で K はコンパクトだから，β∩B もコンパクトとなり，閉集合である．ところが b は β∩B に接触していたからこれにはいり，B にもはいることになり，証明できたことになる．

適性連続写像の場合には，像 $H\vec{\mu}$ が意味を持つことになる．

定理 68.　X と Y とを局所コンパクト空間，$\vec{E}$ をノルム線型空間，$\vec{\mu}$ を $\vec{E}$ に値をとる X 上の測度で，台が A であるとする．H が X から Y への連続写像で，A への制限が A から Y への適性写像になるとき，$\vec{\mu}$ の H による**像** $H\vec{\mu}$ が，Y 上の測度として，公式 (6.4) で定義できる．(H が X から Y への適性写像のときや，H が連続で $\vec{\mu}$ の台がコンパク

---

*) H が連続のときは，閉集合の逆像が閉集合，コンパクト集合の像がコンパクト，となる．これが適性になると，閉集合の像が閉集合，コンパクト集合の逆像がコンパクト，ということになる．

**) b が集合に接触するとき，b を中心とする任意の球はその集合と交わる．

トのときには，この条件が成立するのはもちろんである．）

証明.　φ を，コンパクトな台 K を持つ $\mathscr{C}(\mathrm{Y})$ の関数とすると，逆像 $\mathrm{H}^*\varphi=\varphi\circ\mathrm{H}$ は連続写像の合成だから連続になる．この台を調べる．$\varphi(y)\neq 0$ となる y の全体を Ω とすると，$\overline{\Omega}=\mathrm{K}$ になっている．関数 $\mathrm{H}^*\varphi$ の値が $\neq 0$ である点 x 全体は，ちょうど逆像 $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ であるが，逆像 $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})$ は閉集合で $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ を含むので，$\mathrm{H}^*\varphi$ の台は $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})$ に含まれる．もちろん，この逆像 $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})$ がコンパクトになるとは限らない．H が X から Y への適性写像のときならよいが，条件はもっと弱いのである．H の A への制限が適性であるという条件からは，$\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})$ と A との共通部分が A のコンパクト集合であることがわかるだけである．しかし，ここで定理 17 を用いれば，$\mathrm{H}^*\varphi$ がスカラー値連続関数で，$\vec{\mu}$ の台と $\mathrm{H}^*\varphi$ の台との共通部分がコンパクトである場合として，$\vec{\mu}(\mathrm{H}^*\varphi)$ は意味を持つ．こうして，(6.4) の右辺の表現は意味を持ち，φ に関して線型となる．ここで，Y のコンパクト集合 K を固定し，φ の台を K の範囲にして φ を 0 に一様収束させると，$\mathrm{H}^*\varphi$ の台も固定した閉集合 $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})$ の範囲で，$\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})$ と A との共通部分はコンパクトであり，$\mathrm{H}^*\varphi$ は 0 に一様収束する．そこで，定理 17 でのように，$\vec{\mu}(\mathrm{H}^*\varphi)$ は 0 に収束する．これで，(6.4) の右辺が，$\vec{\mathrm{E}}$ に値をとる Y 上の測度になることを示したわけで，$\mathrm{H}\vec{\mu}$ が得られる[*]．

定理 69.　1° 定理 68 の条件で，ノルムについての不等式

(6.5)
$$\|\mathrm{H}\vec{\mu}\|\leqslant\|\vec{\mu}\|\leqslant+\infty$$

が成立つ．

2° μ が複素数値〚実数値，実数値 $\geqslant 0$〛なら，$\mathrm{H}\mu$ も同様．

3° $\mathrm{H}\vec{\mu}$ の台は，$\vec{\mu}$ の台の H による像に含まれる．

4° $\vec{\mu}_1$ と $\vec{\mu}_2$ の台が閉集合 A に含まれ，H の A への制限が適性のとき

(6.6)
$$\begin{cases}\mathrm{H}(\vec{\mu}_1+\vec{\mu}_2)=\mathrm{H}\vec{\mu}_1+\mathrm{H}\vec{\mu}_2\\ \mathrm{H}(k\vec{\mu})=k\mathrm{H}(\vec{\mu})\end{cases}$$

となる．すなわち，$\vec{\mu}\mapsto\mathrm{H}\vec{\mu}$ は線型となる[**]．

証明.　1° $\varphi\in\mathscr{C}(\mathrm{Y})$，$|\varphi|\leqslant 1$ とする．このとき $|\mathrm{H}^*\varphi|\leqslant 1$ でもある．そこで評価式

(6.7)
$$\|\mathrm{H}\vec{\mu}(\varphi)\|=\|\vec{\mu}(\mathrm{H}^*\varphi)\|\leqslant\|\vec{\mu}\|$$

が得られる（(2.51) によって）ので，不等式 (6.5) が得られる．

2° 自明．

3° X で，A を $\vec{\mu}$ の台，H による像 H(A) を B とする．定理 67 によって B は閉集合である．$\mathscr{C}(\mathrm{Y})$ の関数 φ の台が K で，B と交わらないとする．このとき，$\mathrm{H}^*\varphi$ の台は，φ の台の H による逆像 $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})$ に含まれ，A と交わらない．そこで $\vec{\mu}(\mathrm{H}^*\varphi)$ は

---

[*] 例については，のちに（9 ページ）のべるので，そこを見るとよい．

[**] H が適性で連続といっても線型的な性質は持たぬこと，そもそも X と Y とは局所コンパクト空間というので線型空間でないことに注意．それでも，$\vec{\mu}\mapsto\mathrm{H}\vec{\mu}$ は線型なのだ！

0 となり，$(\mathrm{H}\bar{\mu})(\varphi)$ が 0 である．すなわち，$\mathrm{H}\bar{\mu}$ は B の外で 0 となり，台が B に含まれる．この台が B より真に小さくなることもありうるのはもちろんである．ただし，μ が実数値 $\geqslant 0$ のときには Hμ の台が B になることを見るのは容易である[*]．

4° 自明．

2. μ が実数値 $\geqslant 0$ の場合

定理 70.　X と Y を遠可算型局所コンパクト空間，μ を X 上の実数値測度 $\geqslant 0$ とする．X から Y への写像 H が μ 可測で，Y のコンパクト集合の H による逆像は μ で測度有限となるとき，(6.4) によって，Y 上の測度 $\mathrm{H}\mu \geqslant 0$ が定義できる．そして，Y のコンパクト集合 K に対し，評価式

$$\|\mathrm{H}\mu\|_{\mathrm{K}} \leqslant \int_{\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})} d\mu \qquad \text{で} \qquad \|\mathrm{H}\mu\| \leqslant \|\mu\| \tag{6.8}$$

が成立する．

この条件の成立するとき，写像 H は μ **適性**であると言う．H が可測で μ がノルム有限のときはいつでも μ 適性である．

証明.　まず，最後の部分は自明，すなわち，H が可測で μ が有限すなわち $\mu(\mathrm{X})<+\infty$ であれば，任意のコンパクト集合 K に対して $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})$ は可測で測度有限になる．

いま，φ を $\mathscr{C}(\mathrm{Y})$ の関数とすると，逆像 $\mathrm{H}^*\varphi=\varphi\circ\mathrm{H}$ は定理 24 によって X 上の複素数値 μ 可測関数で，$|||\varphi|||$ で押えられる．$\mathrm{H}^*\varphi$ の値が $\neq 0$ である点全体は φ の台 K の H による逆像に含まれるので，μ に関して測度有限の可測集合に含まれることになり $\int^* |\mathrm{H}^*\varphi|\,d\mu$ は有限ということになる．そこで定理 42 によって $\mathrm{H}^*\varphi$ は μ 可積である．したがって，(6.4) の右辺は意味を持ち，φ に関して線型で，$\varphi\geqslant 0$ なら $\geqslant 0$ となる．

一方，φ の台が K に含まれれば，$|||\mathrm{H}^*\varphi|||$ は $|||\varphi|||$ に等しく，評価式

$$|(\mathrm{H}\mu)(\varphi)| \leqslant |||\varphi||| \int_{\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{K})} d\mu \tag{6.9}$$

が成立するので，Hμ は $\mathscr{C}_{\mathrm{K}}(\mathrm{Y})$ で連続であり，測度となって評価式 (6.8) が成立したことになる．

定理 71.　定理 70 の条件で，Y からバナハ空間 $\vec{\mathrm{F}}$ への写像 $\vec{f}$ を考える．$\vec{f}$ が Hμ 可積〖Hμ 可測〗であるためには，逆像 $\mathrm{H}^*\vec{f}=\vec{f}\circ\mathrm{H}$ が $\vec{\mathrm{F}}$ に値をとる X 上の関数として μ 可積〖μ 可測〗であることが必要十分であり，このとき，等式

$$\int \vec{f}\,d(\mathrm{H}\mu) = \int (\mathrm{H}^*\vec{f})\,d\mu = \int \vec{f}(\mathrm{H}(x))\,d\mu(x) \tag{6.10}$$

---

[*] これは，定理 71 系 1 より出る．$\mathrm{B}\supset\mathrm{B}_1$ を Hμ の台とし，$\mathrm{B}_1\neq\mathrm{B}$ とすると，$\complement\mathrm{B}_1$ は開集合で，B との交わりが Hμ 測度 0 となる．したがって，$\mathrm{H}^{-1}(\complement\mathrm{B}_1)$ も開集合で，A との交わりが μ 測度 0 となり，矛盾する．