Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann
Series: Institut de Mathématiques, Université de Strasbourg
Adviser: P. A. Meyer

714

J. Jacod

Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1979

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann
Series: Institut de Mathématiques, Université de Strasbourg
Adviser: P. A. Meyer

714

J. Jacod

Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1979

Author

Jean Jacod
Département de Mathématiques
et Informatique
Université de Rennes
Avenue du Général Leclerc
F-35042 Rennes Cédex

AMS Subject Classifications: (1970): 60G45

ISBN 3-540-09253-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-09253-6 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek. *Jacod, Jean:* Calcul stochastique et problèmes de martingales / J. Jacod. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1979. (Lecture notes in mathematics; Vol. 714: Ser. Inst. de Math., Univ. de Strasbourg)

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

INTRODUCTION

Ce qu'on appelle communément calcul stochastique est constitué de la théorie des intégrales stochastiques et des règles de calcul qui président à l'usage de ces intégrales.

Introduites par K. Ito, les intégrales stochastiques étaient d'abord prises par rapport au mouvement brownien, tandis que la classique "formule d'Ito" constituait l'essentiel des règles de calcul. Mais depuis une quinzaine d'années l'ensemble de la théorie a pris un essor considérable, d'abord à cause de son utilité pour la théorie des processus de Markov, ensuite et surtout sous la pression des applications, notamment de la théorie du filtrage.

En fait, à l'exception de A.N. Skorokhod dont le travail [1] est resté longtemps un peu méconnu, la plupart des auteurs ont d'abord traité de la partie de la théorie concernant le mouvement brownien et les processus continus, et il existe plusieurs ouvrages de synthèse dans ce cadre. Par contre pour le cas général où les processus peuvent être discontinus, on trouve des ouvrages et des articles présentant de manière synthétique la construction des intégrales stochastiques, mais aucun jusqu'à présent ne fournit une vue d'ensemble sur le "calcul" stochastique. C'est qu'en effet les règles de ce calcul ne se limitent plus à la formule d'Ito, mais couvrent la plupart des transformations auxquelles on peut soumettre un processus.

Tel est donc l'objectif de ces notes: présenter une synthèse des résultats récents sur les règles du calcul stochastique, règles qui semblent maintenant avoir atteint une forme à peu près stable et s'être débarassées d'une quantité d'hypothèses restrictives.

Plus précisément, ces notes sont divisées en trois parties (avec une certaine dose d'interpénétration):

1) La première partie (ch. I-V) jette les bases de la théorie. On y présente d'abord un résumé de la "théorie générale des processus" au sens de l'Ecole strasbourgeoise. Puis on y rappelle la construction de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale et à une semimartingale (ch. II). Nous insistons sur la classe des semimartingales, dont on découvrira les belles propriétés tout au long de ce travail.

Ensuite on expose la théorie des mesures aléatoires (ch. III), avec beaucoup de détails puisqu'il s'agit du premier exposé systématique sur ce sujet. D'ailleurs, le lecteur remarquera sans doute que les mesures aléatoires, outre leur intérêt intrinsèque et leur aspect naturel (spécialement pour les applications), contribuent notablement à simplifier l'ensemble de la théorie. Les chapitres IV et V sont d'importance moindre.

2) Dans la seconde partie (ch. VI-X) on étudie les <u>règles de transformation</u> des processus, lorsqu'on change la probabilité, la filtration, l'échelle des temps, l'espace lui-même, etc... Les motivations d'une telle étude sont essentiellement d'ordre pratique. Par exemple dans la théorie du filtrage on utilise fréquemment les changements absolument continus de probabilité, tandis que le problème du changement de filtration constitue l'essence même du filtrage.

3) La troisième partie (ch. XI-XV) traite d'une application du calcul stochastique, aux <u>problèmes de martingales</u>. L'intérêt de ces problèmes s'est dégagé au fur et à mesure des progrès de l'application des intégrales et équations différentielles stochastiques à la théorie des processus de Markov, jusqu'à acquérir un statut autonome qui nous semble autoriser un traitement "abstrait". Cependant cette partie contient deux longs chapitres d'applications aux processus à accroissements indépendants, processus de Markov, processus de diffusion, équations différentielles stochastiques.

4) La quatrième partie est absente de ces notes, mais elle devrait être présente à l'esprit du lecteur, au moins à titre de motivation: il s'agit des applications au filtrage et au contrôle stochastique. Indépendamment de la fatigue de l'auteur, nous pouvons justifier cette absence par l'existence d'un grand nombre d'ouvrages traitant souvent des cas particuliers, mais couvrant cependant la plupart des applications "à la réalité", et aussi par le fait que la "théorie générale" du filtrage et du contrôle stochastique dans un cadre aussi général que celui où nous nous plaçons reste encore à faire (bien entendu, on peut aussi se poser la question de l'utilité pratique d'une telle théorie générale).

A la lecture de ce qui précède le lecteur aura compris (ou sinon, il le verra dès les premières lignes du texte) que ces notes ne constituent en aucune manière un cours de base sur l'intégrale stochastique: d'une part en effet les connaissances supposées sont assez nombreuses et incluent notamment l'essentiel de la "théorie générale des processus" et les bases de la théorie des martingales. D'autre part notre point de vue est systématique, dans le sens où partout où cela nous a été possible nous avons donné des résultats complets, des conditions nécessaires et suffisantes, avec le moins d'hypothèses possible, etc..., au détriment parfois des impératifs pédagogiques. Un tel point de vue conduit nécessairement à un texte long, parfois fastidieux, en tous cas d'aspect assez technique.

Pour éviter d'allonger encore l'ensemble, nous avons admis certains résultats "classiques", ce qui veut dire à la fois qu'on peut les trouver facilement dans la littérature, et qu'on peut les admettre sans dommages pour la compréhension du texte: nous nous sommes efforcé de rappeler ces résultats sous la forme d'énoncés précis, et pas seulement sous la forme de référence à tel ou tel livre.

Chaque chapitre est suivi de commentaires, parfois assez longs, où sont indiquées les références bibliographiques et où sont données également quelques appréciations sur le contenu du chapitre et l'intérêt de telle notion, parfois sur des méthodes différentes d'approche des problèmes. Nous avons également ajouté à la fin de la plupart des parties quelques exercices. Certains sont extrêmement simples; la plupart sont des compléments au texte lui-même, et à ce titre méritent d'être lus et résolus.

En ce qui concerne la bibliographie, nous avons essayé dans la mesure de nos connaissances de rendre compte de l'apport de chaque auteur à la théorie "générale" telle qu'elle est exposée ici. Par contre nous n'avons pas tenté de rendre justice aux très nombreux auteurs qui ont construit la théorie "dans le cas continu" et nous nous sommes contenté de citer certains articles marquants: pour une bibliographie complète sur ce sujet, nous préférons renvoyer au livre [2] de Liptzer et Shiryaev. De même la bibliographie relative aux applications (processus de Markov, diffusions, équations différentielles stochastiques) est tout-à-fait squelettique, dans la mesure où nous n'avons cité que les travaux ayant un rapport étroit avec notre texte: que les auteurs ayant contribué à ces théories veuillent bien nous en excuser.

Je remercie ici chaleureusement Marc Yor et Jean Mémin: d'abord parce qu'une part importante de l'aspect original de ces notes résulte de travaux que j'ai effectués en collaboration avec eux. Ensuite parce que Marc Yor a beaucoup contribué à me convaincre d'écrire ce texte et a activement collaboré à une rédaction primitive des premiers chapitres, tandis que Jean Mémin a largement aidé à la préparation du manuscrit en le lisant, en le corrigeant et en faisant nombre de remarques.

TABLE DES MATIERES

QUELQUES NOTATIONS ET DEFINITIONS 1

I - RESUME DE LA THEORIE GENERALE DES PROCESSUS 8
a - Les temps d'arrêt 9
b - Les martingales 12
c - Le théorème de projection 14
d - Les processus croissants 15
e - Projection prévisible duale d'un processus croissant 18
f - Quasi-continuité à gauche 21

II - MARTINGALES, SEMIMARTINGALES ET INTEGRALES STOCHASTIQUES 26
1 - MARTINGALES ET SEMIMARTINGALES 26
a - Quelques espaces de martingales 26
b - Semimartingales 29
c - Partie "martingale continue" d'une semimartingale 32
d - Processus croissant associé à une semimartingale 33
e - Quelques inégalités 37

2 - INTEGRALES STOCHASTIQUES 41
a - Intégrale stochastique par rapport à une martingale locale continue 42
b - Intégrale stochastique par rapport à une martingale locale quelconque 44
c - Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale, le cas localement borné 46
d - La formule d'Ito 47
e - Compléments sur le processus des sauts d'une martingale locale 49
f - Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale, le cas général 52
g - Un théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques 56

3 - UN EXEMPLE: LES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS 59

III - MESURES ALEATOIRES ET INTEGRALES STOCHASTIQUES 66
1 - LES MESURES ALEATOIRES 66
a - Quelques définitions 66
b - La mesure de Doléans 68
c - Projection prévisible duale d'une mesure aléatoire 72
d - Mesures aléatoires à valeurs entières 74
e - Espérance conditionnelle par rapport à une mesure de Doléans positive 76

2 - TROIS EXEMPLES 80
a - Mesures aléatoires de Poisson 80
b - Processus ponctuels multivariés 83
c - Caractéristiques locales d'une semimartingale vectorielle 88
d - Les processus à accroissements indépendants 90

3 - L'INTEGRALE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT A UNE MESURE ALEATOIRE 97
a - L'intégrale stochastique du premier type 98
b - L'intégrale stochastique du second type 101

4 - DECOMPOSITION D'UNE MARTINGALE SELON UNE MESURE ALEATOIRE 103
a - Décomposition d'une martingale locale 103

b - Intégrale stochastique optionnelle par rapport à une martingale locale . 106
c - La formule d'Ito 109

IV - SOUS-ESPACES STABLES DE MARTINGALES 113
1 - LES PROPRIETES ELEMENTAIRES 113
a - Définition d'un sous-espace stable 113
b - Sous-espaces stables et orthogonalité 115
c - Une autre condition pour que $\mathcal{L}^q(\mathcal{M}) = \underline{\underline{H}}^q$ 119
d - Une comparaison de $\underline{\underline{H}}^1$ et de L^1 121
2 - LES SOUS-ESPACES STABLES DE $\underline{\underline{H}}^2$ 125
a - Le théorème de projection 125
b - Sous-espace stable engendré par une famille finie de martingales locales 127
c - Base d'un sous-espace stable 130
3 - SOUS-ESPACES STABLES ET MESURES ALEATOIRES 134
a - Sous-espaces stables engendrés par une mesure aléatoire 134
b - Tribu optionnelle, tribu prévisible, martingales, mesures aléatoires 137
c - Un théorème de projection pour les intégrales optionnelles 141
4 - LES FAMILLES FINIES DE MARTINGALES LOCALES 142
a - Le sous-espace stable $\mathcal{L}^q(\underline{M})$ 142
b - Systèmes générateurs d'un sous-espace stable 147
c - Dimension d'un sous-espace stable 149
d - La propriété de représentation prévisible 152

V - COMPLEMENTS SUR LES SEMIMARTINGALES 158
1 - PROCESSUS DEFINIS SUR UN INTERVALLE STOCHASTIQUE 158
a - Restriction d'un processus 158
b - Extension d'un processus 161
2 - INTEGRABILITE UNIFORME DES MARTINGALES LOCALES 163
3 - COMPORTEMENT A L'INFINI DES MARTINGALES LOCALES 165
a - Un résultat général sur les sousmartingales locales 165
b - Application aux martingales locales 168
4 - VARIATION QUADRATIQUE DES SEMIMARTINGALES 171
5 - QUASIMARTINGALES 174
6 - TEMPS LOCAUX 180
a - Calcul stochastique dépendant d'un paramètre 180
b - Temps local d'une semimartingale 183
c - La formule d'Ito pour les fonctions convexes 186

VI - FORMULES EXPONENTIELLES ET DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES 190
1 - L'EXPONENTIELLE D'UNE SEMIMARTINGALE 190
a - Définition et propriétés de l'exponentielle 190
b - Une généralisation de l'exponentielle 193
c - Une autre équation différentielle stochastique 196
2 - DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES 199
a - Un cas particulier 199
b - Projection prévisible d'une semimartingale spéciale 202
c - Décomposition multiplicative: le cas général 204
d - Un exemple de décomposition multiplicative 206

VII - CHANGEMENTS DE PROBABILITE 211
1 - COMPARAISON DE DEUX PROBABILITES 211
a - Le processus densité 211
b - Comparaison des propriétés de Z et Q 215
c - Quelques questions de mesurabilité 217
2 - CHANGEMENT ABSOLUMENT CONTINU DE PROBABILITE 222
a - Préliminaires 222
b - Le théorème de Girsanov 224
c - Quelques compléments au théorème de Girsanov 228
d - Les mesures aléatoires 231
e - Une application: convexité des lois de semimartingales 235
3 - CHANGEMENT QUELCONQUE DE PROBABILITE 238
a - Préliminaires 238
b - Extension du théorème de Girsanov 240
c - Quelques compléments 242

VIII - CONDITIONS POUR L'ABSOLUE CONTINUITE 249
1 - COMPORTEMENT A L'INFINI 250
a - Préliminaires 250
b - Convergence de Z vers 0 252
c - Convergence de Z vers l'infini 256
2 - CONDITIONS D'UNIFORME INTEGRABILITE 261
a - Critères prévisibles bornés 262
b - Un exemple: les processus ponctuels multivariés 265
c - Un critère prévisible intégrable 269
d - Un critère optionnel intégrable 273

IX - CHANGEMENTS DE FILTRATION 278
1 - INTEGRALES STOCHASTIQUES ET SEMIMARTINGALES 278
2 - RESTRICTION DE LA FILTRATION 284
a - Stabilité des martingales, surmartingales, quasimartingales 285
b - Stabilité des semimartingales 287
c - La condition $\underline{\underline{M}}(\underline{\underline{G}}) \subset \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{F}})$ 291
3 - GROSSISSEMENT DE LA FILTRATION 295
a - Introduction 295
b - Grossissement de la filtration le long d'une suite de temps d'arrêt 297
c - Un résultat général 299
d - Grossissement de la filtration par adjonction de temps d'arrêt 300
e - $\underline{G}$-décomposition canonique d'une $\underline{F}$-martingale 304

X - CHANGEMENTS DE TEMPS ET CHANGEMENTS D'ESPACE 311
1 - CHANGEMENTS DE TEMPS 311
a - Définitions et propriétés élémentaires 311
b - Processus adaptés à un changement de temps 315
c - Mesures aléatoires 321
d - Deux exemples 325
2 - CHANGEMENT D'ESPACE 328
a - Espace image 328
b - Espaces produit 332
c - Une application 334

XI - SOLUTIONS EXTREMALES D'UN PREMIER PROBLEME DE MARTINGALES 337

1 - CARACTERISATION DES SOLUTIONS EXTREMALES 337
a - Le théorème principal 337
b - Une autre démonstration du théorème principal 340
c - Convexité de l'ensemble $M(\mathscr{X})$ 342

2 - APPLICATIONS ET EXTENSIONS 347
a - La propriété de représentation prévisible: deux exemples 347
b - Propriété de représentation prévisible et changements de temps 349
c - Le cas où $\mathscr{X}$ n'a qu'un seul élément 351
d - Un problème de sousmartingales 353
e - Martingale locale de crochet donné 357

XII - UN SECOND PROBLEME DE MARTINGALES 362

1 - POSITION DU PROBLEME 362
a - Enoncé du problème 362
b - Caractéristiques locales de semimartingales et problèmes de martingales 366
c - Changement absolument continu de probabilité 368

2 - LES SOLUTIONS EXTREMALES 372
a - Caractérisation des solutions extrémales 372
b - La propriété de représentation prévisible; exemple: les PAI 374
c - Une autre démonstration de (12.21) 377

3 - CONDITIONS D'ABSOLUE CONTINUITE 379
a - Position du problème 379
b - Quelques conditions nécessaires 381
c - Le processus densité 383
d - Utilisation de l'unicité 387
e - Utilisation de l'unicité locale 388

4 - PROBLEMES DE MARTINGALES ET ESPACES CANONIQUES 394
a - Image d'un problème sur l'espace canonique 395
b - Un critère d'unicité locale 397

XIII - PROBLEMES DE MARTINGALES : QUELQUES EXEMPLES 406

1 - PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS 406
a - Conditions d'absolue continuité 406
b - Une application de la propriété de représentation des martingales 410
c - Isomorphisme des flots de PAIS 412

2 - PROCESSUS DE MARKOV ET PROBLEMES DE MARTINGALES 418
a - Un théorème général de représentation des martingales 418
b - Rappels sur les processus de Markov 421
c - Représentation des martingales pour les processus de Markov 422
d - Un problème de martingales 424

3 - PROCESSUS DE DIFFUSION 433
a - Processus de diffusion et problèmes de martingales 433
b - Unicité pour les diffusions 437
c - Exemples de non-unicité 440

XIV - EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES ET PROBLEMES DE MARTINGALES 447

1 - SOLUTIONS FORTES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES 448
a - Introduction 448
b - Un critère d'existence et d'unicité 451

c - Un critère de non-explosion 457
d - Application: une équation avec semimartingale directrice 459

2 - COMPLEMENTS SUR LES ESPACES CANONIQUES 463

3 - MARTINGALES CONTINUES ET MOUVEMENT BROWNIEN 466

4 - MESURES ALEATOIRES A VALEURS ENTIERES ET MESURES DE POISSON 469
a - Quelques résultats auxiliaires 469
b - Transformation d'une mesure aléatoire à valeurs entières 471
c - Application aux semimartingales 476

5 - SOLUTIONS FAIBLES ET PROBLEMES DE MARTINGALES 479
a - Les divers types de solutions 480
b - Solutions faibles et problèmes de martingales 481
c - Réalisation d'une solution faible; solutions fortes-mesure 485
d - L'unicité trajectorielle 489

XV - REPRESENTATION INTEGRALE DES SOLUTIONS DES PROBLEMES DE MARTINGALES 495

1 - EXISTENCE DES REPRESENTATIONS INTEGRALES 495
a - Enoncé des résultats principaux 495
b - Utilisation du théorème fondamental 499
c - Démonstration du théorème fondamental 503

2 - NON-UNICITE DES REPRESENTATIONS INTEGRALES 510
a - Structure des combinaisons convexes de deux éléments de $M_e(\mathscr{X})$ 510
b - Non-unicité de la représentation intégrale 513

INDEX TERMINOLOGIQUE 518

INDEX DES NOTATIONS 524

BIBLIOGRAPHIE 527

QUELQUES NOTATIONS ET DEFINITIONS

Dans ce chapitre préliminaire sont rassemblées les notations et conventions les plus usuellement adoptées, et les principales définitions de la "théorie générale des processus", dont un résumé sera fait dans le chapitre I. De la sorte, le lecteur connaissant cette théorie pourra, après avoir pris connaissance des définitions utilisées ci-après, passer directement au chapitre II sans lire le chapitre I.

Quelques notations.

(0.1) $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$, $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$, $\mathbb{Q}$ = ensemble des rationnels, $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+$.

(0.2) Si $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ on note $a\vee b$ et $a\wedge b$, respectivement, le maximum et le minimum du couple (a,b) . On note $a^+ = a\vee 0$ et $a^- = -(a\wedge 0)$ les parties positive et négative de a ; ainsi, $a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^-$.

(0.3) $\underline{\underline{B}}(E)$ désigne la tribu borélienne de l'espace topologique E , c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts (ou les fermés) de E .

(0.4) Si E est un ensemble quelconque et si $A\subset E$, on note I_A l'indicatrice de A , i.e. la fonction sur E qui vaut 1 sur A et 0 sur son complémentaire A^c .

(0.5) Si E est un ensemble quelconque et si $a\in E$, on note ε_a la mesure de Dirac sur E concentrée au point a .

(0.6) $(E,\underline{\underline{E}})$ étant un espace mesurable, on écrit $f\in\underline{\underline{E}}$ (resp. $\underline{\underline{E}}^+$, resp. $b\underline{\underline{E}}$) pour signifier que f est une fonction réelle $\underline{\underline{E}}$-mesurable (resp. positive, resp. bornée).

(0.7) Soit E et F deux ensembles quelconques et f une fonction: $E\longrightarrow\mathbb{R}$; s'il n'y a pas de risque d'ambiguité possible, on note encore f la fonction $f\otimes 1$ définie sur $E\times F$ par: $(x,y)\in E\times F \rightsquigarrow f(x)$.

(0.8) Si E est un espace muni d'une famille $(\underline{\underline{E}}_i)_{i\in I}$ de tribus, on note $\bigvee_{i\in I}\underline{\underline{E}}_i$ la plus petite tribu contenant toutes les $\underline{\underline{E}}_i$. Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions sur E , on note $\sigma(f_i : i\in I)$ la plus petite tribu $\underline{\underline{F}}$ de E telle que, pour tout $i\in I$, f_i soit $\underline{\underline{F}}$-mesurable.

(0.9) Si μ et ν sont deux mesures sur (E,E) , on écrit $\mu\ll\nu$ (resp.

$\mu \ll \nu$) lorsque μ est absolument continue par rapport à (resp. équivalente à) ν ; la dérivée de Radon-Nikodym est notée $X = \frac{d\mu}{d\nu}$ et on écrit aussi $\mu = X.\nu$.

(0.10) Etant donnés deux espaces mesurables $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(F,\underline{\underline{F}})$, une <u>mesure de transition</u> de $(E,\underline{\underline{E}})$ sur $(F,\underline{\underline{F}})$ est une application $a : E \times \underline{\underline{F}} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $a(.,A)$ soit $\underline{\underline{E}}$-mesurable si $A \in \underline{\underline{F}}$, et que $a(x,.)$ soit une mesure sur $(F,\underline{\underline{F}})$ si $x \in E$. Une telle mesure de transition est souvent notée $a(x,dy)$.

(0.11) $\underline{\underline{E}} \otimes \underline{\underline{F}}$ désigne la tribu sur $E \times F$ engendrée par les ensembles $A \times B$ ($A \in \underline{\underline{E}}$, $B \in \underline{\underline{F}}$). Si μ et ν sont des mesures sur $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(F,\underline{\underline{F}})$ respectivement, on note $\mu \otimes \nu$ la mesure sur $(E \times F, \underline{\underline{E}} \otimes \underline{\underline{F}})$ caractérisée par $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

(0.12) $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ étant un espace probabilisé, on note $\|\cdot\|_p$ la norme de l'espace $L^p(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$. <u>Convention</u>: on confond habituellement un élément de cet espace, qui est une classe d'équivalence de variables aléatoires (pour la relation d'équivalence: égalité P-p.s.), avec une variable aléatoire de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable appartenant à cette classe.

(0.13) On note habituellement $E(.)$ l'espérance mathématique par rapport à P ; s'il y a risque de confusion sur la probabilité P on écrit $E_P(.)$. On rappelle que $E(X)$ est définie pour toute variable aléatoire X telle qu'on n'ait pas simultanément $E(X^+) = E(X^-) = +\infty$, et que quand on écrit $E(X) \in \mathbb{R}$ cela signifie notamment que X est intégrable.

(0.14) On note $E(.|\underline{\underline{G}})$ l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\underline{\underline{G}}$ ($E_P(.|\underline{\underline{G}})$ s'il y a risque de confusion sur P). $E(X|\underline{\underline{G}})$ est définie pour toute variable aléatoire X positive, ou intégrable, et pour X quelconque on pose $E(X|\underline{\underline{G}}) = E(X^+|\underline{\underline{G}}) - E(X^-|\underline{\underline{G}})$ sur le complémentaire de l'ensemble où $E(X^+|\underline{\underline{G}}) = E(X^-|\underline{\underline{G}}) = +\infty$.

<u>Processus et ensembles aléatoires</u>. On note Ω l'espace des épreuves.

(0.15) Si E est un ensemble quelconque, on appelle <u>processus</u> à valeurs dans E toute application $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$; les applications: $t \leadsto X(\omega,t)$ s'appellent les <u>trajectoires</u> de X ; on adopte souvent pour $X(\omega,t)$ l'écriture $X_t(\omega)$, ou simplement X_t . Lorsque $E = \overline{\mathbb{R}}$ on dit simplement "processus"; si on veut spécifier que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que X est un processus à valeurs réelles, ou un processus réel.

(0.16) Lorsque E est un espace topologique on note $X_{t-}(\omega)$ la limite à gauche en $t > 0$, quand elle existe, de la trajectoire $X_.(\omega)$.

Dans le cas où E est un groupe additif (en général $\mathbb{R}^n$) on pose

$$\Delta X_t(\omega) = X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)$$

si $X_{t-}(\omega)$ existe, et <u>on convient que</u> $X_{0-}(\omega) = 0$, donc $\Delta X_0(\omega) = X_0(\omega)$.

(0.17) Si T est une application: $\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ on note X^T le processus X "arrêté en T", défini par $X^T(\omega,t) = X(\omega, t \wedge T(\omega))$.

(0.18) Un <u>ensemble aléatoire</u> est une partie A de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ (donc I_A est un processus). La projection de A est l'ensemble $\pi(A) = \{\omega: \exists t \in \mathbb{R}_+$ tel que $(\omega,t) \in A\}$. La <u>coupe</u> en ω de A est l'ensemble $A_\omega = \{t \in \mathbb{R}_+: (\omega,t) \in A\}$. A est dit <u>mince</u> si chaque coupe A_ω est au plus dénombrable.

(0.19) Soit S et T deux applications: $\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. L'<u>intervalle stochastique</u> $[\![S,T]\!]$ est l'ensemble aléatoire $\{(\omega,t): S(\omega) \leq t \leq T(\omega), t \in \mathbb{R}_+\}$; on définit de façon analogue les intervalles stochastiques $[\![S,T[\![$, $]\!]S,T]\!]$, et $]\!]S,T[\![$. On écrit $[\![T]\!]$ au lieu de $[\![T,T]\!]$.

<u>Filtrations</u>. On suppose maintenant l'espace Ω muni d'une tribu $\underline{\underline{F}}$.

(0.20) Une <u>filtration</u> de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est une famille $\underline{F} = (\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, indexée par $\mathbb{R}_+$, qui est croissante ($\underline{\underline{F}}_t \subset \underline{\underline{F}}_s$ si $t \leq s$) et <u>continue à droite</u> ($\underline{\underline{F}}_t = \bigcap_{s>t} \underline{\underline{F}}_s$). On pose $\underline{\underline{F}}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \underline{\underline{F}}_t$.

(0.21) Soit P une probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$. On note $\underline{\underline{F}}^P$ la complétée de $\underline{\underline{F}}$ pour P. On note $\underline{\underline{F}}_t^P$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_t$ et les parties P-négligeables de $\underline{\underline{F}}^P$. Par abus de langage on dit que la famille $\underline{F}^P = (\underline{\underline{F}}_t^P)_{t \geq 0}$, qui est clairement une filtration de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^P)$, est la <u>filtration complétée</u> de $\underline{F}$ par rapport à P.

(0.22) Un ensemble aléatoire A est dit P-évanescent si $\pi(A)$ est P-négligeable, i.e. $\pi(A) \in \underline{\underline{F}}^P$ et $P(\pi(A)) = 0$. Deux processus X et Y sont dits P-<u>indistinguables</u> si l'ensemble aléatoire $\{X \neq Y\}$ est P-évanescent.

(0.23) Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible quant à la probabilité P, on écrit parfois $\stackrel{\cdot}{=}$, $\stackrel{\cdot}{<}$, $\stackrel{\cdot}{\subset}$, ... pour signifier que les relations $=$, $<$, $\subset$, ... entre variables aléatoires ou parties de Ω (resp. entre processus ou ensembles aléatoires) sont vérifiées à un ensemble P-négligeable (resp. à un ensemble P-évanescent) près.

<u>Tribus optionnelle et prévisible, temps d'arrêt</u>. On suppose l'espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ muni d'une filtration $\underline{F} = (\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$.

(0.24) Un processus X est dit $\underline{F}$-<u>mesurable</u> si c'est une fonction mesurable sur $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \underline{\underline{F}} \otimes \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$.

(0.25) Un processus X est dit <u>$\underline{F}$-adapté</u> si pour chaque $t\geq 0$ la variable aléatoire X_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable.

(0.26) On appelle tribu <u>$\underline{F}$-optionnelle</u> (resp. <u>$\underline{F}$-prévisible</u>) et on note $\underline{\underline{O}}(\underline{F})$ (resp. $\underline{\underline{P}}(\underline{F})$) la tribu sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$ engendrée par les processus $\underline{F}$-adaptés dont toutes les trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche (resp. continues). On a bien-sûr $\underline{\underline{P}}(\underline{F})\subset\underline{\underline{O}}(\underline{F})$.

(0.27) Un <u>$\underline{F}$-temps d'arrêt</u> (resp. un $\underline{F}$-temps d'arrêt prévisible, ou <u>temps prévisible</u>) est une application $T:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que l'intervalle stochastique $[\![0,T[\![$ soit $\underline{F}$-optionnel (resp. $\underline{F}$-prévisible). Il est immédiat que T est un temps d'arrêt si et seulement si $\{T\leq t\}\in\underline{\underline{F}}_t$ pour tout $t\geq 0$. On note $\underline{\underline{T}}(\underline{F})$ et $\underline{\underline{T}}_p(\underline{F})$, respectivement, la classe des $\underline{F}$-temps d'arrêt et la classe des $\underline{F}$-temps prévisibles.

(0.28) Si $T\in\underline{\underline{T}}(\underline{F})$ et $A\subset\Omega$, on note T_A l'application définie par

$$T_A(\omega) \;=\; \begin{cases} T(\omega) & \text{si } \omega\in A \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

(0.29) Soit $T\in\underline{\underline{T}}(\underline{F})$. On note $\underline{\underline{F}}_T$ la tribu constituée des $A\in\underline{\underline{F}}$ tels que $A\cap\{T\leq t\}\in\underline{\underline{F}}_t$ pour tout $t\geq 0$. On remarque que, si $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, l'application $T=t$ est un temps d'arrêt et $\underline{\underline{F}}_T=\underline{\underline{F}}_t$, ce qui justifie la notation $\underline{\underline{F}}_T$.

(0.30) Soit $T\in\underline{\underline{T}}(\underline{F})$. On note $\underline{\underline{F}}_{T-}$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_0$ et par les ensembles de la forme $A\cap\{t<T\}$ où $t>0$ et $A\in\underline{\underline{F}}_t$. On a toujours $\underline{\underline{F}}_{T-}\subset\underline{\underline{F}}_T$. On a aussi $\underline{\underline{F}}_{T-}=\bigvee_{s<t}\underline{\underline{F}}_s$ si $T=t$, et la notation $\underline{\underline{F}}_{T-}$ prolonge bien la notation naturelle $\underline{\underline{F}}_{t-}$ pour $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$. Remarquons que, avec ces conventions, <u>on a</u> $\underline{\underline{F}}_{0-}=\underline{\underline{F}}_0$.

<u>Quelques classes usuelles de processus</u>. On suppose l'espace $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ muni d'une filtration $\underline{F}$ et d'une probabilité P .

(0.31) Un <u>processus croissant</u> est un processus à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ dont toutes les trajectoires sont croissantes et continues à droite. Si A est un processus croissant on pose $A_\infty=\lim_{t\uparrow\infty}\uparrow A_t$. <u>Attention</u>: un processus croissant n'est pas nécessairement nul à l'origine (contrairement à la convention admise par la plupart des auteurs).

(0.32) $\underline{\underline{V}}^+(\underline{F},P)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de processus, pour la relation de P-indistinguabilité, admettant un représentant A qui est un processus croissant $\underline{F}$-adapté vérifiant $A_t<\infty$ P-p.s. pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. Habituellement on confond un élément B de cet espace, et les processus qui sont dans la classe d'équivalence B (parfois, un tel processus est appelé une "version" de B).

(0.33) Soit $\underline{\underline{V}}(\underline{F},P) = \underline{\underline{V}}^+(\underline{F},P) - \underline{\underline{V}}^+(\underline{F},P)$ l'ensemble des différences de deux éléments de $\underline{\underline{V}}^+(\underline{F},P)$. $\underline{\underline{V}}(\underline{F},P)$ est exactement l'ensemble des (classes d'équivalence de) processus $\underline{F}$-adaptés, dont P-presque toutes les trajectoires sont continues à droite et <u>à variation finie</u> sur tout compact. Si $A \in \underline{\underline{V}}(\underline{F},P)$ on note $\int^{\cdot} |dA_s|$ le processus "variation de A", c'est-à-dire l'unique $B \in \underline{\underline{V}}^+(\underline{F},P)$ tel que la mesure $dB_t(\omega)$ sur $\mathbb{R}_+$ soit la valeur absolue de la mesure signée $dA_t(\omega)$; on a en particulier $B_0 = |A_0|$.

(0.34) $\underline{\underline{A}}^+(\underline{F},P)$ désigne l'ensemble des $A \in \underline{\underline{V}}^+(\underline{F},P)$ qui sont <u>intégrables</u>, i.e. qui vérifient $E(A_\infty) < \infty$. Soit $\underline{\underline{A}}(\underline{F},P) = \underline{\underline{A}}^+(\underline{F},P) - \underline{\underline{A}}^+(\underline{F},P)$.

(0.35) La définition des surmartingales varie selon les auteurs. Quant à nous, nous prendrons la définition suivante: une <u>surmartingale</u> (resp. <u>sousmartingale</u>) sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{F},P)$ est un processus X, $\underline{F}$-adapté, <u>continu à droite et limité à gauche</u>, tel que chaque variable X_t soit <u>intégrable</u> et que $E(X_s|\underline{\underline{F}}_t) \leq X_t$ (resp. $\geq X_t$) pour tous $0 \leq t \leq s$. Une <u>martingale</u> est un processus qui est à la fois une surmartingale et une sousmartingale.

(0.36) $\underline{\underline{M}}(\underline{F},P)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence, pour la relation de P-indistinguabilité, de <u>martingales uniformément intégrables</u> (i.e., de processus X qui sont des martingales sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{F},P)$ et tels que la famille de variables aléatoires $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ soit uniformément intégrable). Là encore, on confond un élément de cet espace, et une martingale qui représente cet élément.

(0.37) Une écriture du type $\underline{\underline{P}}(\underline{F}) \cap \underline{\underline{M}}(\underline{F},P)$, $\underline{\underline{P}}(\underline{F}) \cap \underline{\underline{V}}(\underline{F},P)$, ... désigne l'ensemble des classes de processus appartenant à $\underline{\underline{M}}(\underline{F},P)$, $\underline{\underline{V}}(\underline{F},P)$, ... et dont <u>un</u> représentant au moins est $\underline{\underline{P}}(\underline{F})$-mesurable. Il est bon de remarquer que si une classe d'équivalence admet un représentant $\underline{F}$- ou $\underline{F}^P$-prévisible, elle en admet également (en général) d'autres qui ne le sont pas; en effet il existe en général des ensembles aléatoires P-évanescents qui ne sont pas $\underline{F}^P$-prévisibles. Remarquons également que $\underline{\underline{V}}(\underline{F},P) = \underline{\underline{V}}(\underline{F}^P,P)$; par contre l'inclusion $M(\underline{F},P) \subset M(\underline{F}^P,P)$ est en général stricte: en effet un processus non croissant, $\underline{F}^P$-adapté, continu à droite et limité à gauche, n'est pas nécessairement P-indistinguable d'un processus $\underline{F}$-adapté, continu à droite et limité à gauche.

(0.38) <u>Convention importante</u>: les notations précédentes sont plutôt lourdes ! or dans la suite, $\underline{F}$ et P, donc $\underline{F}^P$, sont souvent fixés une fois pour toutes. On notera donc souvent $\underline{\underline{M}}(P)$, $\underline{\underline{V}}(P)$, ..., voire $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{V}}$, ..., les espaces $\underline{\underline{M}}(\underline{F}^P,P)$, $\underline{\underline{V}}(\underline{F}^P,P)$, ... On allègera l'écriture de façon analogue pour les classes de processus qui seront définies dans la suite du texte.

<u>Localisation d'une classe de processus</u>. Outre l'espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{F},P)$, on considère une famille de processus (ou de classes d'équivalence de processus pour la P-indistinguabilité) $\underline{\underline{C}}$.

(0.39) On note $\underline{\underline{C}}_{loc}(\underline{F},P)$ la <u>classe localisée</u>, c'est-à-dire constituée des processus X pour lesquels il existe une suite (T_n) d'éléments de $\underline{\underline{T}}(\underline{F})$ croissant P-p.s. vers $+\infty$ et telle que chaque processus arrêté X^{T_n} appartienne à $\underline{\underline{C}}$. Une suite (T_n) satisfaisant ces conditions s'appelle une <u>suite localisante</u> pour X , relativement à $\underline{\underline{C}}$. Là encore, s'il n'y a pas de risque de confusion, on applique la convention (0.38) en écrivant $\underline{\underline{C}}_{loc}(P)$ ou $\underline{\underline{C}}_{loc}$.

(0.40) Une classe $\underline{\underline{C}}$ est dite <u>stable par arrêt</u> si $X^T\in\underline{\underline{C}}$ pour tous $X\in\underline{\underline{C}}$ et $T\in\underline{\underline{T}}(\underline{F})$ (ou $\underline{\underline{T}}(\underline{F}^P)$, c'est la même chose).

(0.41) On emplois très souvent l'expression: par localisation, il suffit de montrer telle propriété... Cela signifie que si cette propriété est satisfaite par tous les éléments d'une classe $\underline{\underline{C}}$ de processus, elle est aussi satisfaite par tous les éléments de $\underline{\underline{C}}_{loc}$.

(0.42) On note $\underline{\underline{C}}_o$ l'ensemble des $X\in C$ vérifiant $X_0=0$. On note $\underline{\underline{C}}_{o,loc}$ la classe $(\underline{\underline{C}}_o)_{loc}=(\underline{\underline{C}}_{loc})_o$.

(0.43) L'espace $\underline{\underline{M}}_{loc}$ (à nouveau, (0.38) !) est appelé espace des <u>martingales locales</u>. Etant donnée son importance, on note d'une manière particulière, soit $\underline{\underline{L}}$ (ou $\underline{\underline{L}}(P)$, ou $\underline{\underline{L}}(\underline{F}^P,P)$) l'espace $\underline{\underline{M}}_{o,loc}$.

(0.44) Si X est un processus admettant une <u>variable terminale</u> $X_\infty=\lim_{t\uparrow\infty}X_t$, pour toute application $T:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$ on peut définir la variable X_T par $X_T(\omega)=X_{T(\omega)}(\omega)$. Les éléments de $\underline{\underline{M}}$, de $\underline{\underline{V}}^+$, de $\underline{\underline{A}}$, admettent une telle variable terminale.

(0.45) Si X est un processus quelconque, on définit le processus X^* par

$$X^*_t \;=\; \sup_{s\leq t}|X_s| .$$

Le processus X^* admet la variable terminale $X^*_\infty=\sup_{(t)}|X_t|$. On dit que X est <u>localement borné</u> s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant P-p.s. vers $+\infty$, telle que $X^*_{T_n}\leq n$ pour chaque n .

(0.46) Si X est un processus quelconque, on définit le processus $S(X)$ par

$$S(X)_t=\begin{cases}\sum_{0\leq s\leq t}X_s & \text{si } \sum_{0\leq s\leq t}|X_s|<\infty\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Une condition nécessaire pour que $S(X)$ soit à valeurs finies (donc $S(X)\in\underline{\underline{V}}$) est que l'ensemble aléatoire $\{X\neq 0\}$ soit mince.