

Friedel Hartmann

8733396

Methode der Randelemente

Boundary Elements
in der Mechanik
auf dem PC



Springer-Verlag

0357.4
H 333

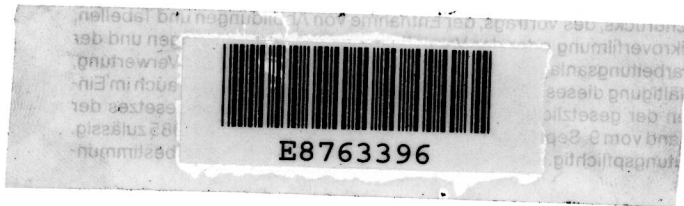
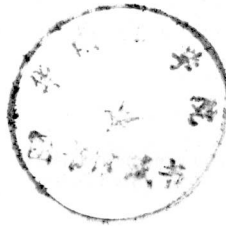
8763396

Friedel Hartmann

Methode der Randelemente

Boundary Elements
in der Mechanik
auf dem PC

Mit 159 Abbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo 1987

Dr.-Ing. Friedel Hartmann

Lehrstuhl für Baumechanik-Statik
Universität Dortmund
August-Schmidt-Straße
4600 Dortmund 50

ISBN 3-540-17336-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork
ISBN 0-387-17336-6 Springer-Verlag NewYork Berlin Heidelberg

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Hartmann, Friedel:

Methode der Randelemente: boundary elements in d. Mechanik auf d. PC / Friedel Hartmann.
Berlin; Heidelberg; NewYork; London; Paris; Tokyo: Springer, 1987.

ISBN 3-540-17336-6 (Berlin ...)

ISBN 0-387-17336-6 (NewYork ...)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der Fassung vom 24. Juni 1985 zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urhebergesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Druck: Color-Druck, G. Baucke, Berlin; Bindearbeiten: Lüderitz & Bauer, Berlin
2161/3020 543210

Vorwort

Die Methode der Randelemente bietet gegenüber den finiten Elementen den Vorteil, daß nur der Rand des Gebiets diskretisiert werden muß, und so das zu lösende Gleichungssystem sehr viel kleiner ist, als bei finiten Elementen. Zudem ist die Genauigkeit der Lösung i.allg. größer. Es erstaunt daher nicht, daß die Methode mehr und mehr das Interesse der Fachwelt findet.

Dieses Buch ist eine Einführung in die Methode. Es wendet sich an Ingenieure, Mathematiker und Physiker, die an einer elementaren und auf die praktischen Aspekte ausgerichteten Darstellung Interesse haben. Behandelt werden u.a. Stäbe, Balken, elastische Membrane, Scheiben, Platten, elastische Körper, die harmonischen und transienten Schwingungen dieser Bauteile und die Kopplung mit finiten Elementen. Häufige Vergleiche mit finiten Elementen und Verweise auf die elementare Mechanik erleichtern den Zugang. Auf die numerischen Details der Methode wird ausführlich eingegangen. Das Buch enthält die vollständigen Einflußmatrizen für die Behandlung von Plattenproblemen (lineare Elemente), Membran- und Scheibenproblemen (quadratische Elemente) und für die Probleme elastischer Körper (lineare Elemente). Die Literatur über Randelemente (boundary elements) nimmt ständig zu. In dem Buch konnte daher nur ein repräsentativer Querschnitt der möglichen Anwendungen dargestellt werden. Viele Dinge sind zudem noch im Fluß. Erfahrung gewinnt man nur durch das Rechnen und mit Randelementen (in ihrer heutigen Form) wird noch nicht sehr lange gerechnet.

Zu dem Buch werden drei Programme zur Lösung von Membran-, Scheiben- und Plattenproblemen angeboten. Sie sind in TURBO-PASCAL geschrieben und laufen auf dem IBM-PC (640 K, 8087 Coprozessor) und kompatiblen Computern.

Ich danke Herrn Dr.-Ing. T. P. Akyol, Herrn Dipl.-Ing. R. Dallmann, Herrn Dr.-Ing. H. Kröner und Herrn Dr.-Ing. M. Ottenstreuer für die Überlassung von Ergebnissen ihrer Arbeiten, Herrn Dipl.-Ing. R. Milnikel für wertvolle Hinweise bei der Programmentwicklung, Frau Middeldorf und Herrn cand. ing. Florian Weller für das Anfertigen der Reinzeichnungen und Frau Dipl.-Ing. Sabine Pickhardt und Herrn Dipl.-Ing. Peter Schöpp für das Korrekturlesen und dem Springer-Verlag für die Aufnahme des Buchs in seine Reihe und für die stets freundliche Zusammenarbeit.

Dortmund, Oktober 1986

Friedel Hartmann

Topics in Boundary Element Research

Editor: C.A. Brebbia

Volume 1

Basic Principles and Applications

Editor: C.A. Brebbia

1984. 144 figures, 11 tables. XIII, 256 pages.
Hard cover DM 168,-. ISBN 3-540-13097-7

Contents: Boundary Integral Formulations. - A Review of the Theory. - Applications in Transient Heat Conduction. - Fracture Mechanics Application in Thermoelastic States. - Applications of Boundary Element Methods to Fluid Mechanics. - Water Waves Analysis. - Interelement Continuity in the Boundary Element Method. - Applications in Geomechanics. - Applications in Mining. - Finite Deflections of Plates. - Trefftz Method. - Subject Index.

Volume 2

Time-dependent and Vibration Problems

Editor: C.A. Brebbia

1985. 140 figures, 5 tables. XIV, 260 pages.
Hard cover DM 168,-. ISBN 3-540-13993-1

Contents: Fundamentals of Boundary Integral Equation Methods in Elastodynamics. - Elastic Potentials in BIE Formulations. - Time-Dependent Non-Linear Potential Problems. - Further Developments on the Solution of the Transient Scalar Wave Equation. - Transient Elastodynamics. - Propagation of Surface Waves. - Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamic Analysis. - Boundary Element Method for Laminar Viscous Flow and Convective Diffusion Problems. - Asymptotic Accuracy and Convergence for Point Collaboration Methods. - Subject Index.

Volume 3

Computational Aspects

Editor: C.A. Brebbia

1987. 126 figures, 28 tables. Approx.
306 pages. Hard cover DM 248,-.
ISBN 3-540-16113-9

Contents: Numerical Convergence of Boundary Solutions in Transient Heat Conduction Problems. - New Integral Equation Approach to Viscoelastic Problems. - Numerical Integration. - Computational Aspects of the Boundary Element Method. - The Edge Function Method in Elastostatics. - Theoretical and Practical Aspects of Multigrid Methods in Boundary Element Calculations. - Complex Variable Elements in Computational Mechanics. - Software for Potential Problems. - Software for Elastostatics.

Volume 4

Engineering Applications

1987. Approx. 267 pages. Hard cover.
In preparation. ISBN 3-540-17497-4

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo

 Springer

Boundary Elements VI

Proceedings of the 6th International Conference, on Board the Liner the Queen Elizabeth 2, Southampton to New York, July 1984

Editor: C. A. Brebbia

1984. 174 figures. X, 474 pages. Hard cover DM 178,-. ISBN 3-540-13420-4 *

Contents: Keynote Address. - Potentials, Heat Transfer Problems. - Solid Mechanics. - Fluid Flow. - Numerical Techniques and Mathematical Principles. - Geomechanics. - Dynamics. - Industrial Applications. - Stress Concentration and Fracture Mechanics.

Boundary Elements VII

Proceedings of the 7th International Conference, Villa Olmo, Lake Como, Italy, September 1985

Editors: C. A. Brebbia, G. Maier

1985. 1.338 pages. Hard cover DM 438,- (in 2 volumes, not available separately). ISBN 3-540-15729-8 *

Contents: Potential Problems. - Heat Transfer. - Time Dependent Problems. - Plates and Shells. - Wave Propagation. - Dynamics. - Stress Concentration. - Fracture Mechanics. - Fluid Flow. - Soil and Rock Mechanics. - Coupling. - Mathematical Aspects. - Numerical Techniques. - Applications in Engineering.

Boundary Elements VIII

Proceedings of the 8th International Conference, Tokyo, Japan, September 1986

Editors: M. Tanaka, C. A. Brebbia

1986. 600 figures. 946 pages (in 2 volumes, not available separately). Hard cover DM 348,-. ISBN 3-540-16915-6 *

Contents: Volume 1: Introduction. Heat Transfer. - Acoustics. - Stress Concentration Fatigue and Fracture Mechanics. - Geomechanics. - Electrostatics & Electromagnetic Problems. - Optimization. - Dynamics and Vibrations. - Structural Problems. - Volume 2: Hydrodynamics. - Nonlinear Structural Problems. - Nonlinear Material Problems. - Computational Aspects. Numerical and Mathematical Aspects. Fluid Mechanics. Groundwater Flow. Extra Paper.

C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel

Boundary Element Techniques

Theory and Applications in Engineering

1983. 284 figures. XIV, 464 pages. Hard cover DM 198,-. ISBN 3-540-12484-5

* In cooperation with Computational Mechanics Centre, Southampton

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo

Springer



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Die Grundlagen der Methode	20
1.1 Notation	20
1.2 Die Grundidee	27
1.2.1 Die Grundidee aus der Sicht des Mathematikers	27
1.2.2 Die Grundidee aus der Sicht des Ingenieurs	28
1.3 Einflußfunktionen	29
1.3.1 Der Satz von Betti	30
1.3.2 Betti-Daten	33
1.3.3 Grundlösungen	34
1.4 Kopplung auf dem Rand	39
1.5 Randelemente	40
1.6 Konforme und nichtkonforme Lösungen	42
1.7 Die Interpretation der Lösung	43
1.8 Symmetrische Formulierungen	44
1.9 Die Integraloperatoren und ihre shifts	46
1.10 Galerkin, Kollokation und least square	49
1.11 Potentiale	52
1.12 Die indirekte Methode	61
1.13 Einflußfunktionen und finite Elemente	65
1.14 Der Maßstab	75
1.15 Die Methode von Trefftz	75
1.16 Konstruktion von Grundlösungen	77
1.17 Schalen	77
2. Eindimensionale Probleme	79
2.1 Der Stab	79
2.2 Der Balken	89
2.3 Übertragungsmatrizen	96
2.4 Die Matrizenverschiebungsmethode	97
2.5 Das allgemeine Prinzip	98

3. Die Membran	101
3.1 Einflußfunktion für die Durchbiegung $u(x)$	108
3.2 Diskretisierung	115
3.3 Elementmatrizen	118
3.4 Das Masterelement	120
3.5 Singuläre Integrale	122
3.6 Die Behandlung des Gleichungssystems	124
3.7 Das Gebietsintegral	126
3.8 Schnittkräfte	127
3.9 Beispiele	127
3.9.1 Schub und Torsion	127
3.9.2 Temperaturverteilung	130
3.9.3 Brownsche Bewegungen	131
3.10 Das Maximumprinzip	133
3.11 Die Einflußfunktion für die Normalableitung	134
3.12 Substrukturtechnik	135
3.13 Singularitäten	138
3.14 Dreidimensionale Probleme	140
3.15 Die Programme	142
3.16 Das Programm BE-LAPLACE	146
4. Scheiben und elastische Körper	154
4.1 Einführung	154
4.2 Die Einflußfunktionen	163
4.3 Diskretisierung	168
4.4 Elementmatrizen	171
4.5 Randbedingungen	175
4.6 Spannungen	178
4.7 Die Gebietsintegrale	181
4.8 Substrukturtechnik	183
4.9 Doppelknoten	185
4.10 Unendliche Gebiete	186
4.11 Beispiele	187
4.11.1 Gelochte Träger	187
4.11.2 Bogenfeder	189
4.11.3 Die Suche nach einem Loch	192
4.12 Schlanke Gebiete	194
4.13 Singularitäten	195
4.14 Einzelkräfte	196
4.15 Dreidimensionale Probleme	200
4.16 Das Programm BE-PLATES	207

5. Nichtlineare Probleme	215
5.1 Das Skalarprodukt	215
5.2 Das Prinzip der virtuellen Kräfte	217
5.3 Die Berechnung der singulären Integrale	226
5.4 Das Differentialgleichungssystem	229
 6. Platten	 234
6.1 Einleitung	234
6.2 Grundlagen	242
6.3 Einflußfunktionen für w und $\partial w / \partial n$	244
6.4 Kopplung auf dem Rand	248
6.5 Diskretisierung	249
6.6 Singuläre Integrale	250
6.7 Elementmatrizen	252
6.8 Freiheitsgrade	257
6.9 Die Gebietsintegrale	259
6.10 Schnittkräfte	261
6.11 Stützen, Zwischenwände und belastete Teilflächen	264
6.12 Beispiele	266
6.13 Singularitäten	276
6.14 Einflußflächen	281
6.15 Sonderprobleme	287
6.15.1 Elastisch gebettete Platten	287
6.15.2 Beulprobleme	287
6.16 Das Programm BE-PLATE-BENDING	288
 7. Kopplung finite Elemente — Randelemente	 299
7.1 Theorie	299
7.2 Praxis	305
7.3 Erfahrung	311
 8. Harmonische Schwingungen	 313
8.1 Der Stab	313
8.2 Der Balken	315
8.3 Scheiben und elastische Körper	316
8.4 Die Platte	318
8.5 Eigenschwingungen	319
8.6 Die Helmholtz Gleichung (Membran)	321
8.6.1 Der Abstrahlgrad einer rotierenden Maschine	323
8.7 Algebraisierung des Eigenwertproblems	332

9. Transiente Probleme	335
9.1 Vergleich finite Elemente — Randelemente	335
9.1.1 Finite Elemente	335
9.1.2 Randelemente	337
9.1.3 Zusammenfassung	339
9.2 Die Wellengleichung	340
9.3 Dynamische Verschiebungsfelder	343
9.4 Numerische Behandlung	349
9.5 Fourier- und Laplace-Transformationen	350
9.6 Dynamische Steifigkeitsmatrizen	352
 Literatur	 357
 Bibliographie	 361
 Index	 374
 Programmservice	 376

Einleitung

Wenn man die Randwerte einer linearen Funktion u kennt, dann kann man die Funktion mit dem Lineal zeichnen, s. Abb. 1.

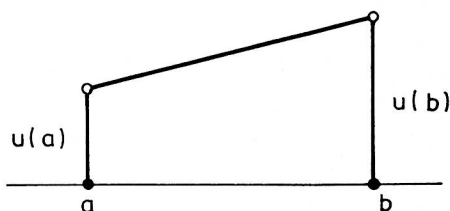


Abb. 1 Eine Gerade ist durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt

Dies ist die einfachste Anwendung des Prinzips der Randelemente: Die Randwerte einer Funktion bestimmen den Verlauf der Funktion. In der Sprache der Mechanik lautet dieses Prinzip:

Die Weg- und Kraftgrößen auf dem Rand eines Bauteils und die äußere Belastung bestimmen die Verformungen und Spannungen im Innern eindeutig.

Bei einem Stab, s. Abb. 2, sind die maßgebenden Randdaten z.B. die Verschiebungen und die Normalkräfte,

$$u(0) = u_1, \quad u(l) = u_2, \quad N(0) = -f_1, \quad N(l) = f_2,$$

und die Einflußfunktion für $u(x)$ lautet,

$$u(x) = (1-x)u_1 + xu_2 + 1/EA \left\{ f_1 + [(1-l)x + 1]f_2 + \int_0^x p(y)[(1-x)y + 1]dy + \int_x^l p(y)[(1-y)x + 1]dy \right\}. \quad (1)$$

Eine solche Einflußfunktion gleicht einem programmierbaren Kurvenlineal, das

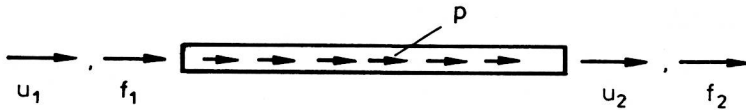


Abb. 2 Die Weg- und Kraftgrößen auf dem Rand eines Stabs und die Längskräfte p

man an den Intervallenden nur an die richtigen Markierungen halten muß, und man erhält die exakte Verschiebung in jedem beliebigen Innenpunkt. Solche Formeln gibt es nicht nur für Stäbe, sondern auch für Balken, Scheiben, Platten etc.. Der Leser ist jetzt vielleicht versucht zu fragen: Warum braucht man dann überhaupt noch Näherungsverfahren, wenn die Dinge so einfach sind, wenn man ja schon fertige Lösungen für alle Bauteile hat? Das Problem besteht darin, daß man nicht alle die Randdaten kennt, die man zum Anlegen des 'Kurvenlineals', d.h. zur Konstruktion der Einflußfunktion, benötigt. Von zwei konjugierten Größen auf dem Rand ist nämlich immer nur eine vorge-schrieben. Die andere Größe ist unbekannt. Damit stellt sich die Frage: Wie erhält man die fehlenden Weg- und Kraftgrößen auf dem Rand, die man für die Anwendung der Einflußfunktionen benötigt? Die Antwort lautet: *Mit den Kopplungsbedingungen auf dem Rand.*

Bevor auf diesen Begriff näher eingegangen wird, sei daran erinnert, wie man mit finiten Elementen mechanische Probleme löst.

Die Längsverschiebung u des Zugstabs in Abb. 3 mit linearen finiten Elementen zu approximieren heißt, das Verformungsverhalten des Zugstabs zu restringieren. Man erlaubt dem Zugstab nur noch solche Verformungszustände

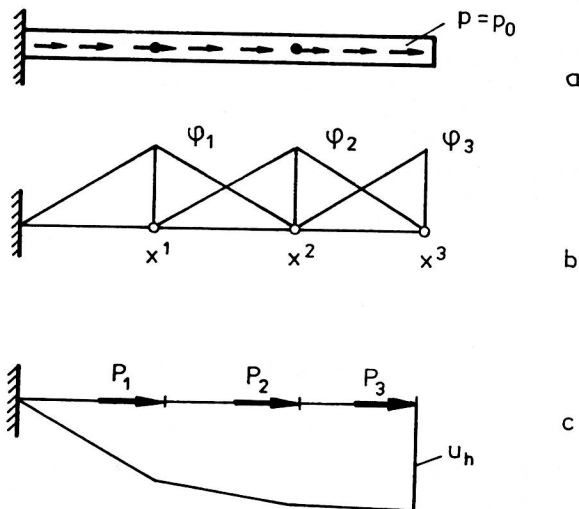


Abb. 3 a-c. Lösung eines Stabproblems mit finiten Elementen; b die drei Ansatzfunktionen; c die Näherungslösung u_h

$$u_h = \sum_{i=1}^3 u_i \varphi_i(x),$$

anzunehmen, die sich durch die drei stückweise linearen Ansatzfunktionen darstellen lassen. Ein solcher Stab aber, dessen Längsverschiebung u stückweise linear verläuft, ist ein Stab, der allein durch Knotenkräfte belastet wird. Zu jeder möglichen Wahl der Knotenverschiebungen u_i gehören daher drei bestimmte Knotenkräfte P_k . Diese sind den Sprüngen der Normalkraft $N_h = EAu_h''$ der FE-Lösung in den Knoten x^k gleich.

Die Knotenverschiebungen u_i werden nun so bestimmt, daß die potentielle Energie

$$\Pi_1(u_h) = \frac{1}{2} \int_0^l EA(u_h')^2 dx - \int_0^l p u_h dx$$

zum Minimum wird. Dies ist, wie man zeigen kann, äquivalent mit der Forderung, daß die FE-Lösung u_h sich so einstellen soll, daß die Arbeit der Knotenkräfte P_k auf den Wegen der drei möglichen virtuellen Verrückung φ_i gleich der Arbeit der wahren äußeren Kräfte p auf denselben Wegen ist, daß also für die drei Knotenkräfte P_k gelten soll

$$\sum_{k=1}^3 P_k \varphi_i(x^k) = \int_0^l p \varphi_i dx, \quad i = 1, 2, 3$$

Wenn man die FE-Kräfte virtuell verrückt, dann sollen diese dabei dieselbe Arbeit leisten, wie die wahren Kräfte.

Wie löst man nun dasselbe Problem mit Randelementen? Zuerst sei bemerkt, daß man die Lösung eigentlich schon kennt, denn die oben angegebene Einflußfunktion

$$u(x) = (1-x)u_1 + xu_2 + 1/EA \left\{ f_1 + [(1-l)x + 1]f_2 + p_0[l(x+1) - \frac{1}{2}(x^2 + xl^2)] \right\}$$

ist die Lösung. Die Funktion (1) ist nicht nur die Längsverschiebung des Stabs in Abb. 3, sondern die Längsverschiebung *aller* Stäbe unter allen nur denkbaren Belastungen. Ein Fachwerkstab, eine Eisenbahnschiene, ein Zugband, sie alle besitzen *dieselbe* Lösung, die Funktion $u(x)$ in (1). Wo ist dann das Problem? Betrachten wir die Funktion $u(x)$ genauer: Um die Verschiebung $u(x)$ für einen Punkt x ausrechnen zu können, muß man — neben der äußeren Belastung p , die man ja immer kennt — die Endverschiebungen und die Endkräfte des Stabs

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, & u_2 &= ?, \\ f_1 &= ?, & f_2 &= 0 \end{aligned}$$

kennen, und dies sind zwei Werte zuviel. Auf Grund der Lagerbedingungen ist zwar bekannt, daß links die Verschiebung Null ist, $u_1 = 0$, und rechts die Stabendkraft $f_2 = 0$, aber es ist nicht bekannt, wie groß die Verschiebung am rechten freien Ende $u_2 = ?$ und die Lagerkraft am linken Ende $f_1 = ?$ ist.

Was tun? Nun, zuerst schneiden wir den Stab einmal frei, s. Abb. 4, damit auch die versteckte, unbekannte Größe f_1 sichtbar wird, und dann erinnern wir uns an den Satz von Betti. Dieser besagt, daß die gegenseitigen äußeren Arbeiten zweier Gleichgewichtszustände gleich groß sind,

$$A_{1,2} = A_{2,1}.$$

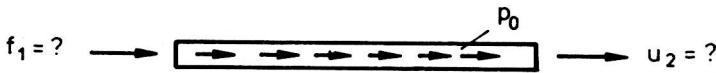


Abb. 4 Die unbekannten Randwerte

Nehmen wir an, wir kennen zwei weitere Gleichgewichtszustände des Stabs. Wir wüßten, etwa, wie groß die Verformungen und Schnittkräfte des Stabs sind, wenn eine Einzelkraft am rechten Stabende zieht, und, — das ganze vertauscht — eine Einzelkraft auf das linke Stabende drückt, s. Abb. 5a und b. Von diesen beiden Gleichgewichtszuständen weist zwar nur der linke dieselben Lagerbedingungen auf, wie der interessierende Stab. Dies ist aber für den Satz von Betti unerheblich. Bevor der Satz von Betti formuliert wird, werden die Tragwerke immer von ihren Lagern freigeschnitten, damit die Lagerkräfte — diese sind ja auch äußere Kräfte — nicht vergessen werden.

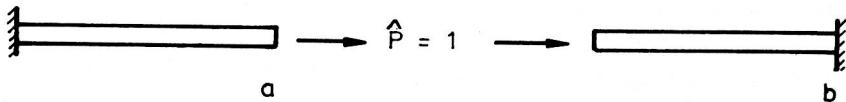


Abb. 5 Kontrollzustände

Nennen wir diese Gleichgewichtszustände 2a und 2b. Der gesuchte Zustand sei der Zustand 1. Nun wird der Satz von Betti insgesamt zweimal formuliert. Beim erstenmal ist der Zustand 2 der Zustand 2a und beim zweitenmal der Zustand 2b. Wir erhalten so zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} A_{1,2a} &= A_{2a,1}, \\ A_{1,2b} &= A_{2b,1} \end{aligned}$$

in denen die unbekannte Endverschiebung u_2 und die unbekannte Auflagerkraft

f_1 vorkommen, denn diese sind ja an den äußeren Arbeiten beteiligt. Dies gibt uns nun umgekehrt eine Möglichkeit, die Unbekannten u_2 und f_1 zu bestimmen. Zwei Gleichungen und zwei Unbekannte — das geht genau auf.

Nun soll die Methode etwas vereinfacht werden. Es wäre sehr mühsam — und bei mehrdimensionalen Problemen auch undenkbar — erst jedesmal den Lastfall: Einzelkraft am linken bzw. rechten Ende zu lösen, um sich Gleichgewichtszustände zu verschaffen, mit denen man die Einhaltung des Gleichgewichts des Zustands 1 kontrollieren kann. Man bräuchte einen Vorrat an Gleichgewichtszuständen, die man in allen Situationen einsetzen kann. Hier empfehlen sich die Gleichgewichtszustände eines unendlich langen Stabs unter dem Angriff einer Einzelkraft, s. Abb. 6.

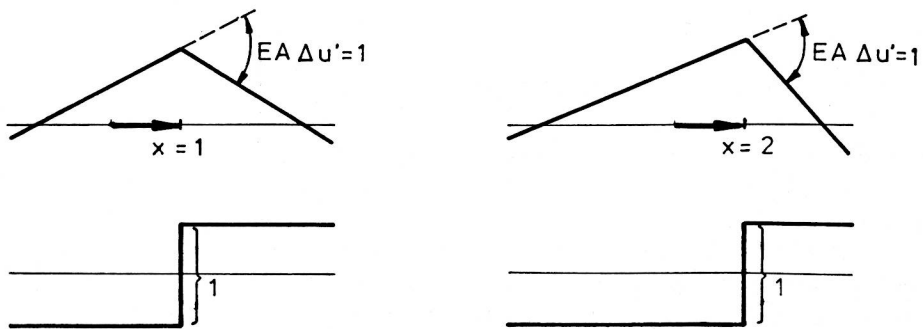


Abb. 6 Die Normalkraft springt im Aufpunkt um den Wert 1

Wenn an einem Stab eine Einzelkraft $\hat{P} = 1$ angreift, dann verläuft die Längsverschiebung u links und rechts vom Angriffspunkt linear, s. Abb. 6, (die horizontale Verschiebung u wurde vertikal zum Stab abgetragen), und im Aufpunkt hat die Verschiebung einen Knick. Wenn nun der Stab unendlich lang ist, dann bedeutet dies einfach nur, daß man die beiden Äste nach links und rechts ins Unendliche weiterlaufen läßt. Daß so im Unendlichen dann auch die Verschiebung u Unendlich wird, stört nicht. An diesen unendlich fernen Punkten sind wir gar nicht interessiert. Uns interessiert nur das Verhalten in der Nähe des Aufpunkts. Auch der Einwand, daß in den Lagern, also im Unendlichen, die Verschiebung Null und im Mittelteil, etwa dort, wo die Kraft angreift, die Verschiebung unendlich groß sein muß, berührt uns nicht, denn wir können uns immer vorstellen, daß wir von u die 'Konstante' ∞ abziehen. Wo der Nullpunkt der Verschiebungsskala liegt, ist gleichgültig.

Die Längsverschiebung eines unendlich langen Stabs unter dem Angriff einer Einzelkraft in einem Punkt x ist also eine stückweise lineare Funktion mit einem Knick im Aufpunkt. Der analytische Ausdruck für solch eine Funktion mit Knick lautet

$$g_0(y, x) = \frac{1}{EA} \begin{cases} (1-x)y + 1, & y \leq x, & \text{(links von der Kraft)}, \\ (1-y)x + 1, & x \leq y, & \text{(rechts von der Kraft)}. \end{cases} \quad (2)$$

Liegt der Punkt y links von x , dann gilt die obere Formel, liegt er rechts von x , dann die untere Formel.

Die Koordinate x markiert den Aufpunkt, und die Koordinate y ist die Laufvariable, d.h. die Koordinate des Punkts, in dem wir die Verschiebung wissen wollen. Vom Nullpunkt des Koordinatensystems gehen also zwei Skalen aus: Eine Skala x und eine Skala y . Beide Skalen sind identisch, und beide haben denselben Nullpunkt. Auf der Skala x markieren wir die Lage des Aufpunkts, und auf der anderen Skala y die Lage des uns gerade interessierenden Punkts, des Punkts in dem wir die Verschiebung wissen wollen, die die Kraft $\hat{P} = 1$ verursacht.

Die Funktion mit dem Knick $g_0(y, x)$ heißt *Grundlösung*. Allgemeiner versteht man darunter die Verformungsfigur eines unendlichen elastischen Mediums unter dem Angriff einer Einzelkraft.

Mit der Grundlösung $g_0(y, x)$ haben wir nun den gewünschten Vorrat an Gleichgewichtszuständen. Wir brauchen nur den Aufpunkt in zwei verschiedene Punkte, z.B. $x = 1$ und $x = 2$, zu legen und haben so zwei verschiedene Gleichgewichtszustände konstruiert, s. Abb. 6. Jedes Teilstück eines so belasteten unendlich langen Stabs ist für sich im Gleichgewicht, denn die Normalkraft ist, bis auf den Faktor EA , die Neigung der Funktion $g_0(y, x)$. Da nun aber die Neigungen an den beiden Enden einer Geraden gleich groß sind, so sind auch die Normalkräfte entgegengesetzt gleich groß. Aber auch wenn zwischen den Schnitten der Knick liegt, wenn die Linie also gebrochen ist, dann wird man finden, daß die Normalkräfte in den Schnitten der zum Knick gehörigen äußeren Kraft das Gleichgewicht halten.

Fassen wir zusammen: Mit der Grundlösung $g_0(y, x)$ hat man einen unerschöpflichen Vorrat an Gleichgewichtszuständen. So viele Punkte x , so viele Gleichgewichtszustände gibt es, mit denen man kontrollieren kann. Praktisch geht man dabei so vor, daß man die Kraft $\hat{P} = 1$ in so viele Punkte x setzt, wie man Gleichgewichtszustände braucht, und dann jeweils das Teilstück, das nach Größe und Lage mit dem realen Stab übereinstimmt, aus dem unendlich langen Stab herausschneidet.

In der oberen Reihe von Abb. 7 sind die Gleichgewichtszustände angetragen, die wir zuerst vorgeschlagen hatten. Darunter sind zwei mögliche Lastfälle

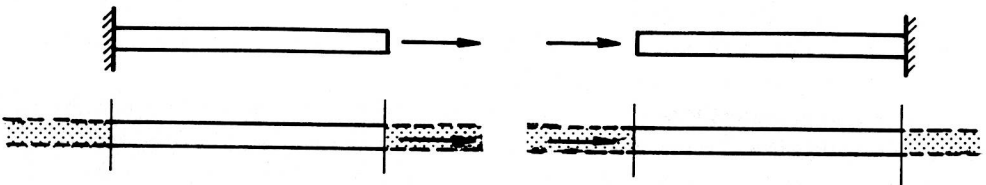


Abb. 7 Alternative Kontrollzustände

des unendlich langen Stabs angezeichnet mit denen man statt dessen kontrollieren kann. Einmal greift die Kraft im Punkt $x = l$ an und einmal im Punkt $x = 0$. Diese Zustände haben gegenüber den ersteren den Vorteil, daß sie sozusagen fertig tabelliert sind. Die Stabendverformungen der Teilstücke kann man direkt aus (2) entnehmen und die Stabendkräfte aus der Formel für die Normalkraft der Grundlösung

$$N_0(y, x) = \begin{cases} (1 - x), & y \leq x, & \text{(links von der Kraft),} \\ -x, & x \leq y, & \text{(rechts von der Kraft).} \end{cases}$$

Geht man so vor, formuliert man also den Satz von Betti einmal mit der Grundlösung $g_0(y, x = 0)$ und einmal mit der Grundlösung $g_0(y, x = l)$ und dem unbekannten Zustand, dann erhält man, nach einem kleinen Zwischenschritt, s. Kap. 2, als Resultat das Gleichungssystem

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

dessen Matrix genau die Steifigkeitsmatrix des Stabs ist. Die Komponenten p_i sind die negativen Festhaltekräfte, d.h. die Auflagerdrücke, die die verteilte Belastung p verursacht, wenn beide Stabenden festgehalten werden. Über das Vorzeichen, das die p_i haben müssen, orientiert man sich am einfachsten, indem man die Verschiebungen $u_i = 0$ setzt (feste Einspannung), denn dann muß gelten $f_i = -p_i$. Die Werte p_i sind im übrigen in bautechnischen Handbüchern tabelliert.

Von den insgesamt vier Größen u_i und f_i in (3) sind immer zwei vorge-schrieben und die dazu konjugierten Größen unbekannt. In unserem Fall sind dies

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, & u_2 &= ?, \\ f_1 &= ?, & f_2 &= 0, \end{aligned}$$

und daher kann man aus den zwei Gleichungen ($p_0 = 100$, $l = 4$)

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \end{bmatrix},$$

die zwei Unbekannten bestimmen,

$$u_2 = 0,8 \text{ m}, \quad f_1 = -400 \text{ kN}, \quad \left(\frac{EA}{l} = 250 \right).$$

Setzt man diese Werte zusammen mit den bekannten Werten, $u_1 = 0$, $f_2 = 0$, in die Einflußfunktion (1) ein, so erhält man schließlich die gesuchte Stabverschiebung

$$u(x) = 0,4x - 0,05x^2 \text{ m}.$$