現代経済学の数学的方法

——位相数学による分析入門——

二階堂副包著

岩波書店

現代経済学の数学的方法

——位相数学による分析入門——

二階堂副包著

岩波書店

現代経済学の数学的方法

1960年10月27日　第1刷発行 ©
1980年5月20日　第14刷発行

¥2400

著　者　二階堂副包（にかいどうふくかね）

発行者　緑川亨

〒101　東京都千代田区一ツ橋2-5-5
発行所　株式会社　岩波書店
電話 03-265-4111
振替 東京 6-26240

印刷・精興社　製本・牧製本

まえがき

本書は，現代経済学において近時さかんになりつつある，近代数学的研究への入門書として，この方面の研究を志されているかたがたを対象に書かれた．同時に，本書は，初等位相数学とその応用の解説書ともみなされうるであろう．位相数学(topology)は，現代数学において，中心的な地位を占める分野であるが，経済学の提起する諸問題の解明に際しても，研究方法としてのすぐれた有効性が確認されつつあるからである．

予備知識としては，大学初年級における微積分学習の体験と，行列式についての基礎知識を前提としたい．そのほかには，第3章における二三の節(§§16, 17, 21)では，複素数が登場するが，これもごく基本的な知識の範囲内のものである．他方，経済理論については，特別の予備知識を前提とせず，理工系の読者にも理解しやすいかたちで，そのつど必要な事項を解説した．

叙述の様式としては，まず，数学の解説をある程度行なって，ただちにその範囲内の数学的準備で取扱える問題について述べ，つぎにまた数学の解説を補ってから，さらにすすんだ問題に移ることにし，基礎知識の解説と問題の分析を交錯させながら，次第に内容の程度をたかめてゆくようにした．

ところで，いうまでもなく，本書のような小冊子に，現代数理経済学における諸問題を，網羅的に盛りこむことは不可能であるので，比較的少数の基本的な問題に焦点を限定して，これらを詳細に解説することにした．新しい分析方法の特徴をつかむには，この方が効果的であろうと信ずるものである．

内容の具体的項目を述べると，前編においては，現代静学分析の名のもとに，産業連関分析，線型計画問題，最大(小)値問題の現代的取扱，activity analysis 式の生産理論，ゲームの理論と鞍点問題，von Neumann モデル，消費者行動の分析などを中心として，解説を行い，後編においては，Walras 式モデルについての，均衡解の存在問題を述べる．この間，三章にわたって，数学の解説を挿入した．

もとより，平易な解説を旨としたが，本書の狙いは，経済学説そのものの概説にはなく，経済学の問題の，数学的な立場からの研究の要点を，できるだけ親しみやすいかたちで紹介することにあるので，平易化と数学的厳密性が両立するようにつとめた．

本書が経済学研究者はもちろんのこと，文科，理工科の別を問わず，社会科学における数学的方法に関心をもつすべてのかたがたの勉強の伴侶になりうれば，著者の望外の幸である．

なお，本書の後編は，さきに，岩波講座“現代応用数学”に執筆した，安井先生との共著をもとに，あらたに書きおろしたものであるが，前著を，このようなかたちで，本書のなかに収録することができたのは，安井先生の御寛裕に負うものである．

本書を世に送りだすについて，出版の企画から原稿の閲読に至るまでの多くの点で，弥永昌吉，安井琢磨両先生から，なみなみならぬ援助と激励をいただいた．心からの謝意を表したい．

1959年冬

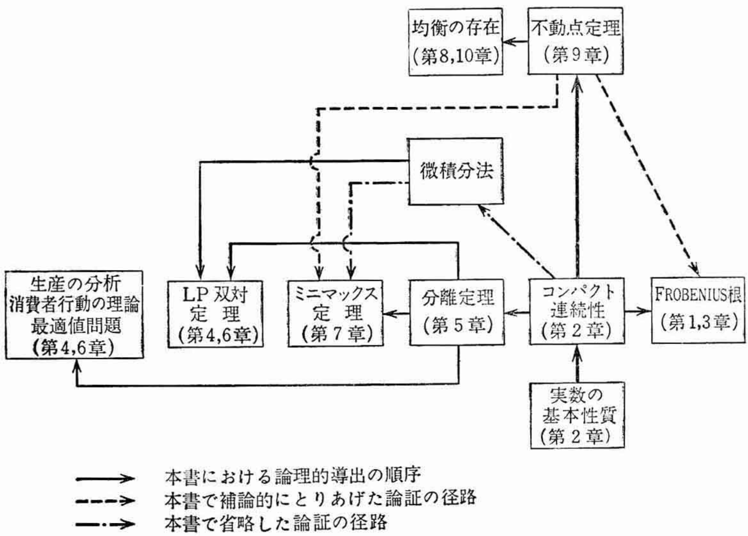
著　　者

凡　　例

1. 定理，数式，図などの番号は節(§)ごとにあらためてある.
2. 定理，注意，例などを参照するときには，おなじ節にあるものは，単に，定理 2，例 4 などと引用し，他の節にあるものは節番号を附して，定理 24.2，注意 16.1，例 5.3 のように記した. これらは § 24 の定理 2 などの意である.
3. 数式，図は，参照に際して，かならず節番号を附して，*(14·3)* のように記した.
4. 本文，註などにある括弧 [　] 内の数字は巻末にある文献番号を示す.

目　　次

章間の論理的連絡


均衡の存在
(第8,10章)
不動点定理
(第9章)
微積分法
生産の分析
消費者行動の理論
最適値問題
(第4,6章)
LP 双対
定理
(第4,6章)
ミニマックス
定理
(第7章)
分離定理
(第5章)
コンパクト
連続性
(第2章)
FROBENIUS根
(第1,3章)
実数の
基本性質
(第2章)
本書における論理的導出の順序
本書で補論的にとりあげた論証の径路
本書で省略した論証の径路

序論にかえて

数学は，応用や実用を離れても，独立の価値をもつことはいうまでもなく，純粋数学の名のもとに，今日なお多くのすぐれた研究が生みだされつつある．しかし，その発展の過程において，数学は科学の他の分野から豊かな素材や問題を摂取し，実り多い応用をかえし与えてきている．物理学，化学，工学などの自然科学は古くから数学の隣接領域であったが，今日ではさらに生物学や経済学のような領域が数学と密接な接触をもつようになった．

経済学に数学的方法が組織的に導入されたのは A. A. Cournot (1801—77) にはじまるが，数理経済学という研究分野に堅固な礎石をすえたのは，19 世紀末葉から 20 世紀初頭にかけての，L. Walras (1834—1910) と V. Pareto (1848—1923) による劃期的な業績である．Walras は“わたくしは二つの学派しか認めない．一つは証明しない学派であり，他はみずからの命題を証明する学派である．この後者こそわたくしが樹立を目指して進んでいるところのものである”(純粋経済学要論, 岩波文庫版, 下巻 pp. 313—4) と述べている．そして，Walras が証明のための武器として使用したものこそ数学であった．経済学への数学的方法の積極的導入というこの傾向は，その後，数理統計的方法とも結びついて，今日では無視できないほどの学界の主流にまで成長している．かつてはおおかたの経済学者から異端視されながら，学界の片隅ではじめられたこのような研究も，漸次その価値を認められ，経済学者自身の努力と数学者の積極的協力によって，非常に充実したものになってきている．これらには，大別して，二つの分野がある．一つは Cournot, Walras の系統をひく理論的研究，他は現実の経済からえられた数値の統計的処理に重点をおく実証的研究，いわゆる計量経済学の分野である．後者については専門の解説書にゆずり，本書における主要な関心の対象である前者について，もう一歩すすんだ検討を加えてみよう．ここでは，Cournot, Walras 以来，久しい間にわたって微積分法が主要な分析用具として用いられてきた．もちろん，これらのほかに微分方

程式，定差方程式，線型代数なども次第に利用されるようになったのであるが，中心となったのは微積分法の機械的適用であった．これによって経済理論が大きく進歩し，とくに，その表現や定式化に著しい精密性が加えられたことは否定できないが，多くの成果にもかかわらず，古典的手法には大きな弱点があった．WALRAS のかがやかしい功績の一つは，均衡方程式の基盤のうえに，多数財市場における価格決定の理論を建設し，これに精密な数学的表現を与えたことである．しかし，その分析方法が素朴であったために，WALRAS はかれの均衡方程式が実際に解をもつことを数学的に論証するまでには至らなかった．そしてこの解の存在問題は，WALRAS 以来約半世紀間の模索期を経て，もっと近代的な立場からの分析によって，最近漸く完全な肯定的解決をみたのである．

19 世紀末から 20 世紀はじめにかけての数学界といえば，当時すでに複素函数論が一応の体系をととのえ，代数や幾何の領域においても多くの新風がまきおこっていた．また，それは，数学者のエスプリが，K. WEIERSTRASS (1815—97) に代表されるように，非常に厳正で批判的なものになり，同時に，G. CANTOR (1845—1918) による集合論の建設，H. POINCARÉ (1854—1912) による位相幾何学の創始などにみられるように，今日の数学に固有の，美しさ，厳密性，抽象性などのもろもろの基調の源流となった時代であった．歴史の古い微積分法もこの例外ではなく，批判的精神の洗礼をうけて，十分に強固なものに生れかわりつつあった．

それにもかかわらず，古典数理経済学の主要な武器は，前提や仮定を無視して，微積分法の演算を機械的に行うことであった．そして，このために，経済理論の基礎をなす中心命題の論証が回避されることが多かったのである．この欠陥は同時代の数学界の新動向からの一種の鎖国状態に起因すると思われる．

この鎖国状態を打開する先駆となったのは，1930 年代における二人の数学者 J. VON NEUMANN (1903—1957) と A. WALD (1902—1950) の業績であろう．前者はゲームの理論を創始し，VON NEUMANN モデルといわれている一種の斉一成長モデルを研究し，後者は CASSEL-WALD モデルの均衡解の存在問題を研究した．いずれも，新感覚の近代数学の手法で問題を解決して，経済学におけ

る数学的分析に一つの紀元を劃した．不幸にして，これらの業績は当時の経済学界にひろく認められるまでには至らなかったが，その後漸く，VON NEUMANN と経済学者 O. MORGENSTERN の共著 " Theory of Games and Economic Behavior (初版 1944)" の出版を機縁として，機械的方法に対する反省が高まり，数学の本来もっている高度の分析力，論証力を生かした研究が志向されるようになった．今日では，この方向に沿う研究は数理経済学の分野において大きなウエイトを獲得しつつあり，今後の一層の発展が期待されている．それは，古典的な研究にくらべて，単に粧いが新しくなっただけの理由からではない．新しい研究が経済現象のより深い，より本質的(intrinsic)な数学的分析を志向しているという，もっとも大切な理由によるのである．

この分野での今日までの主要な成果は，産業連関分析，線型計画法，ゲームの理論と，これらに関連する諸問題，それに前述の均衡解の存在問題，さらに，これらの成果の利用による一般均衡理論の基礎がためと再構成であろう．また，きわめて最近のものとしては，現代的な立場からの均衡の安定問題の研究がある．これらの研究において用いられる手法はかならずしも同一ではない．一つの方法に執着して柔軟性を失うことはもっとも忌むべきことである．問題の種類や性質に応じて適当な方法を用いることこそ肝要である．しかし，点集合論の僅少の知識や位相数学的取扱いの初歩が，どんなに上記の種類の問題の解決に有効であるかは，是非とも多くの若い研究者のかたがたに知っていただきたい事実である．本書は，上述のテーマのうち，均衡の安定問題をのぞく，すべての諸問題，すなわち数理経済学におけるもっとも基本的な静学の諸問題の近代数学による分析にささげられる．

前編　現代静学分析

第1章　線型経済モデルの均衡
——産業連関分析——

§1　経済循環の素描

人間の社会生活における経済的側面の研究，これが経済学の課題である．わたくしたち自身がその渦中にあって体験する複雑きわまりない経済現象，これが経済学の対象である．現実の経済は絶間のない変動の過程におかれ，好況期と不況期の周期的循環をともないながら，成長を続けている．それはまさしく人間の一生を思わしめるものがある．しかし，変動し成長する複雑な経済への接近をはかるまえに，あらゆる経済現象の根底にひそむつぎのような基本的様相が注目されなくてはならない．それは，生産技術を媒介とする人間対自然の関係，経済のメカニズムという制約のもとにおける人間対人間の関係である．本書において，わたくしたちは，このような基本問題の分析に，近代数学の手法がどのように生かされるかを学んでゆきたい．

まず，分析のいとぐちとして，現象を単純化してながめることからはじめよう．そのためには，一つの国民経済のなかで一定期間内(たとえば，一年間)におこる富の交換の定常な流れの素描をすることが，きわめて大切である．これは，ちょうど力学において力の平衡や定常な水の流れについて論ずることにたとえることができよう．いわば，国民経済の静的な解剖図を描くことから出発するわけである．

さて，わたくしたちの社会の複雑な経済のいとなみも，ある一つの本質的な点に焦点を合わせてながめると，意外に単純な様相を呈してくる．17世紀のはじめ，イギリスの生理学者 W. Harvey (1578—1657) は，血液の人体循環を発見して，生理学史の一齣(こま)を飾ったが，約一世紀遅れて，フランス国王 Louis 15世の顧問医 F. Quesnay (1694—1774) は三つの階級，すなわち，農

業階級，地主階級，工業階級* の間の交換による生産物の流れを，**経済表**(Tableau économique)という一つの図式にあらわして，分析した．QUESNAY はフランスの啓蒙期の思想家たち，d'ALEMBERT や V. MIRABEAU と親交があり，かれらの《百科辞典主義》の一環として，経済表の思想に到達したといわれている．

いま，ある農業王国を考え，土地から生産される農鉱産物と若干の工業生産物で毎年の経済生活がいとなまれるとする．この王国の国民は上記の三階級に分れ，それぞれの職分に応じて生産物を生産し，これらの分配にあずかる．生産物が最終的に分配されるために，これらの階級の間に売買による生産物の交換が行われ，これが年々繰返される財の定常的な流れをひきおこす．

農業階級は労働の補助となる若干の財(農耕器具，家畜，納屋など，これを資本財という)を所有し，地主階級から土地を借りて食料と工業原料(鉱産物)を生産する．地主階級は地主と(税の徴収者である)政府から構成され，工業階級は若干の機械，器具その他の生産設備(これも資本といわれる)を所有し，工業原料を加工して工業生産物(奢侈的な消費財をふくむ)を生産する．

農業階級は食料 40 億円，工業原料 10 億円を生産する．食料のうち，20 億を自家消費にあて，残りの 20 億を地代として地主階級に支払う．また，10 億の工業原料を工業階級に渡し，これと交換に同額の工業生産物をうけとり，これを農耕器具や納屋の修理，維持のために用いる．なお，自家消費分の食料の一部は家畜用にあてられる．地主階級は農業階級からうけとった 20 億の食料のうち，10 億を消費し，残りの 10 億を工業階級から同額の工業生産物を購入するのにつかう．工業階級は 30 億の工業生産物を生産し，10 億を機械，器具，設備の修理，維持用にあて，残り 20 億のうち，10 億を地主階級からの同額の食料の購入に，他の 10 億を農業階級からの工業原料の購入にあてる．これで交換が過不足なく行われ，年々このような財の一定量の循環がおこる．これが QUESNAY によって明らかにされた経済循環のスタティックな解剖図である．

---

* QUESNAY 自身はこの三階級を生産階級，地主階級，不生産階級とよんだ．これは，重農主義者(Physiocrat)としての QUESNAY 特有の思想に由来する命名法である．

上記の関係をもういちどながめなおしてみよう．食料ははじめ地主階級に 20 億売却されるが，このうち 10 億はさらに工業階級に転売されるから，最終的には，食料は農業階級に 20 億，地主階級に 10 億，工業階級に 10 億が渡ることになる．また，地主階級は，物理的な意味では，何等の生産物も生産しないが，土地用役というサーヴィスを 20 億生産し，これを農業階級に売却するとしよう．Walras が注意しているように，物質的，非物質的の別を問わず，価格があり，交換される《もの》はすべて社会的富とみなすのが近代的な経済学の考えである．わたくしどももこの考え方にしたがうことにして，上記の生産物の交換関係を，現代的な立場から，つぎのようなみやすい表にまとめてみよう．

<table>
<tr><th>購入者
売却者</th><th>生産物の種類</th><th>農業階級</th><th>地主階級</th><th>工業階級</th><th colspan="2">総売却額</th></tr>
<tr><td rowspan="2">農業階級</td><td>食料</td><td>20</td><td>10</td><td>10</td><td>40</td><td rowspan="2">50</td></tr>
<tr><td>工業原料</td><td>0</td><td>0</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>地主階級</td><td>土地用役</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td colspan="2">20</td></tr>
<tr><td>工業階級</td><td>工業生産物
(消費財をふくむ)</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td colspan="2">30</td></tr>
<tr><td colspan="2">総購入額</td><td>50</td><td>20</td><td>30</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

表の見方を説明すると，まず，各階級または各生産物の行を横に読むと，売却先別の価額と売却総額が分る．たとえば，工業階級の行を横に読むと，農業へ 10，地主へ 10，工業へ 10，総額 30 となる．したがって，こんどは各階級の列を縦に読むと，購入先別の価額と購入総額が並ぶわけである．たとえば，工業階級については，農業から食料 10 と工業原料 10，地主から 0，工業から 10，総額 30 となる．また，総売却額と総購入額は各階級についてひとしい．文章で説明すれば面倒な交換による生産物の流れも，この表によれば，きわめて明確に表現することができる．

§2　一次方程式による表現

Quesnay の考察は，1930 年代になって，アメリカの経済学者 W. W. Leontief (1905—) によって組織的にはじめられた**産業連関分析** (Input-output analysis of interindustry relationships) の萌芽であった*．この間，19世紀のなかばごろ，K. Marx が類似の考え方にたち，有名な再生産表式によって，資本主義経済の再生産過程の分析を試みているが，Quesnay の思想を深めてこれを有力な分析用具にまで発展せしめた点では，Leontief の右に出る学者はない．

Quesnay による分析によって，読者は一つの国民経済における財の流れのとらえ方のだいたいの要領を理解されたことと思う．さて，これを手がかりとして，つぎに，平和な小農業王国から現代の国民経済に焦点を合わせかえよう．ここでは，生産物の種類はきわめて多く，経済活動の規模も大きく，生産様式や技術は高度に科学的なものが多い．

まず，農業，鉱業，工業などの産業部門を適当に分類，分割して，一部門で生産される生産物が一種類で，部門数と生産物の種類の数がちょうどひとしくなるようにし，この個数を n とする．たとえば，Quesnay の設例では，農業階級は食料と工業原料を生産したが，これを二分して，食料生産階級と工業原料生産階級に分ける．さらに，もっと精密な分析を望むならば，前者を農業と漁業，後者を石炭，石油，非鉄金属などの部門に分割する．

n 個の産業部門，n 種類の生産物を番号 i, j であらわそう．ここに，i, j は 1 から n までの番号を表示するものである．一定期間，たとえば一年間に，部門 i が生産する第 i 財の（適当な単位ではかられた，たとえば石炭ならばトンで表示された）総生産量を x_i とし，部門 i から部門 j への売却量を x_{ij}，その他への売却量を c_i とする．その他への売却量というのは，政府が購入する分，輸出にまわされる分，家計が消費する分，新しい工場の建設にまわされる分などのように，産業部門の分類のなかに入っていない分をひとまとめにしたものである．したがって，もしも政府が一産業部門としてかぞえられているときには，政府への売却分は x_{ij} のどれか一つにかぞえられ，c_i のなかにはふくまれない．n 種類の生産物に対応する産業部門を**内生部門**といい，これに対して，それ以外の，c_i にふくまれているものを**外生部門**という．

各財について，総生産量が n 個の内生部門と外生部門によってすべて購入し

---

* W. W. Leontief [19]