Robert Gasch · Klaus Knothe

Strukturdynamik

Band 1

Diskrete Systeme

Springer-Verlag

Robert Gasch · Klaus Knothe

Strukturdynamik

Band 1: Diskrete Systeme

Mit 219 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo 1987

Prof. Dr.-Ing. Robert Gasch
Prof. Dr.-Ing. Klaus Knothe
Institut für Luft- und Raumfahrt
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135
D-1000 Berlin 12

ISBN 3-540-16849-4 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-16849-4 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek:
Gasch, Robert: Strukturdynamik / Robert Gasch; Klaus Knothe. – Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer
NE: Knothe, Klaus:
Bd. 1. Diskrete Systeme. – 1987.
ISBN 3-540-16849-4 (Berlin...)
ISBN 0-387-16849-4 (New York...)

Texterfassung: Mit einem System der Springer Produktions-Gesellschaft, Berlin;
Datenkonvertierung: Brühlsche Universitätsdruckerei, Gießen;
Druck: Saladruck, Berlin; Bindearbeiten: Lüderitz & Bauer, Berlin.
2068/3020-543210

Inhaltsverzeichnis

Inhalt des Bandes 2: Kontinua

0 Einleitung

Der Begriff *Strukturdynamik* (structural dynamics) hat sich im letzten Jahrzehnt für ein Gebiet eingebürgert, das sich mit der Dynamik und den Schwingungsvorgängen von komplizierten technischen Strukturen, wie Fahrzeugen, Flugzeugen, Bauwerken und Maschinen, auseinandersetzt. Er umfaßt einerseits die technische Schwingungslehre und die Fahrzeug-, Maschinen- und Bauwerksdynamik. Darüber hinaus betont er aber stärker die Probleme der Modellbildung des Gesamtsystems, den systematischen, formalisierten Aufbau der Bewegungsgleichungen sowie die algorithmisierte Lösung der Bewegungsgleichungen unter Einsatz von Großrechnern.

Im Zentrum der strukturdynamischen Untersuchungen stehen *mechanische Systeme und Modelle.* Dennoch bleibt bei selbsterregungsfähigen Systemen die Grenze zu Nachbargebieten, wie Regelungstechnik, Fluid- und Aerodynamik, offen. Hier lassen sich oft die Eigenschaften elektrischer Teilsysteme oder strömender Medien nicht aus den Bewegungsgleichungen der Mechanik heraus idealisieren.

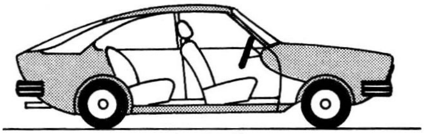
Bei komplizierten technischen Systemen, wie zum Beispiel „Kraftfahrzeug auf welliger Straße“ oder „Turbine auf schwingungsfähigem Fundament“ kommen sehr schnell hundert und mehr mechanische Freiheitsgrade ins Spiel, so daß der Rechner nicht nur bei der Lösung der Bewegungsgleichungen sondern auch bei deren Aufstellung als Hilfsmittel herangezogen werden muß.

Obwohl die Strukturdynamik auf die Behandlung komplizierter technischer Viel-Freiheitsgradsysteme abzielt, kann in einem einführenden Buch auf die Behandlung von Ein- und Zwei-Freiheitsgradsystemen nicht verzichtet werden. An solchen einfachen Systemen gewinnt man phänomenologische Einsichten in die prinzipiellen Verhaltensmöglichkeiten linearer Systeme. Zudem lassen sich komplizierte Strukturen mit vielen Freiheitsgraden durch modale Zerlegung auf Ein-Freiheitsgradsysteme zurückführen. Auch bei der Plausibilitätskontrolle von Rechnerlösungen komplizierter Strukturen wird man sich oft auf die vertrauten Lösungen von stark vereinfachten Ein- oder Zwei-Freiheitsgradmodellen abstützen.

Die Gliederung der beiden Bände Strukturdynamik folgt daher dem traditionellen Schema:

- Ein- und Mehr-Freiheitsgradsysteme, Band I;
- Kontinua und ihre Abbildungen auf diskontinuierliche Systeme, Band II.

Die Einteilung in diskontinuierliche und kontinuierliche Systeme ist der Hauptgliederungsaspekt, dem andere Begriffspaare wie



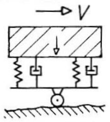
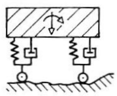
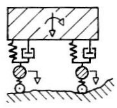
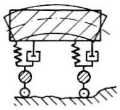
Mech. Modell	Freiheitsgrade		
	1	Tauch-Freiheitsgrad	a
	2	Tauchen und Nicken	b
	4	Tauchen, Nicken und 2 Rad-Freiheitsgrade	c
	5	Tauchen, Nicken, 2 Rad-Freiheitsgrade und 1. Eigenform der Zelle	d

Bild 0.1. Ebene mechanische Modelle mit unterschiedlicher Zahl von Freiheitsgraden für einen Personenkraftwagen

ungedämpfte Systeme – gedämpfte und selbsterregungsfähige Systeme,
freie Schwingungen – erzwungene Schwingungen,
Behandlung im Zeitbereich – Behandlung im Frequenzbereich

als zusätzliche Gliederungsgesichtspunkte zur Seite stehen.

Wir beschränken uns auf die Darstellung *linearer, zeitinvarianter Systeme* mit *deterministischen* Eingängen. Auf die Berücksichtigung nichtlinearer und zeitvarianter Systeme wurde verzichtet, obwohl wir uns in den Forschungsarbeiten der letzten Jahre sehr intensiv mit der quasilinearen Behandlung stark nichtlinearer Systeme und mit Systemen, die zwar linear, aber periodisch zeitvariant sind (parametererregte Systeme), befaßt haben. Der Grund für diese Nichtbefassung ist einfach: Irgendwo muß Schluß sein. Ebenfalls fehlen Zufallsschwingungen; hier existieren Bücher von sachkompetenteren Autoren, z.B. [0.1].

Die Einteilung schwingungsfähiger Systeme nach der Zahl der Freiheitsgrade ist sehr formal. Ein reales System wie der Personenkraftwagen hat nicht einfach soundso viele Freiheitsgrade. Die Zahl der Freiheitsgrade, die man einführen muß, hängt davon ab, was man von dem System wissen möchte.

In dem primitiven Modell von einem Freiheitgrad, Bild 0.1a, wurde die Reifenfederung und -dämpfung mit der Aufbaufederung und -dämpfung zusammengefaßt und das Rad als eine starre Rolle idealisiert. Dieses Modell liefert hinsichtlich des *Tauch-Freiheitsgrades* vernünftige Aussagen für die Abstimmung des Systems, die im allgemeinen so erfolgt, daß die Taucheigenfrequenz bei etwa 1 bis 2 Hz und der Dämpfungsgrad bei 0,2 bis 0,3 liegt. Dennoch muß für eine genauere Komfortuntersuchung zumindest der *Nick-Freiheitsgrad* einbezogen werden. Erst durch ihn kommt der Zeitunterschied zur Geltung, der zwischen Vorder- und Hinterrad beim Überfahren einer Fahrbahnunebenheit auftritt. Für Komfortuntersuchungen ist dieses Modell, Bild 0.1b, schon recht brauchbar. Das Modell mit Nick- und Tauch-Freiheitsgrad des Wagenkörpers gibt aber unzureichend Auskunft darüber, ob beim Überfahren von Hindernissen Radentlastungen bis hin zu kurzzeitigem Abheben auftreten. Darüber kann erst ein Modell Aussagen machen, das die *Vertikal-Freiheitsgrade der Achsmassen* berücksichtigt, Bild 0.1c. Mit diesem Modell erfaßt man den Frequenzbereich von 0 bis 15 Hz schon sehr gut. Ein Modell, das bis 25 Hz brauchbar ist, wird u.U. schon die Annahme einer starren Karosserie aufgeben müssen und die *1. Biegeschwingungseigenform* der Karosserie einbeziehen müssen, Bild 0.1d. Bisher blieb das Modell in der Ebene, weil wir stillschweigend voraussetzen, daß nur Vertikalschwingungen untersucht werden, und daß die Fußpunktanregungen an den Rädern links und rechts in gleicher Weise erfolgen. Ein *räumliches Modell* mit noch mehr Freiheitsgraden erlaubt es, diese Einschränkung fallenzulassen, siehe auch [0.2].

Wie kompliziert auch immer modelliert wird, ob dem System ein, zwei, vier oder noch mehr Freiheitsgrade zugebilligt werden, so lange als Systemkomponenten nur starre Körper, Federn und Dämpfer verwendet werden, entsteht immer ein Satz von *linearen, zeitinvarianten Bewegungsgleichungen 2. Ordnung*:

$$\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{u}}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{u}}^{\cdot}+\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{u}}=\tilde{\boldsymbol{p}}.$$

Die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{S}$ sind quadratische Matrizen vom Format $N \times N$. *Linear* wird das Bewegungsgleichungssystem deshalb, weil wir uns auf die Betrachtung *kleiner Schwingungen* beschränken. Beim Beispiel des Personenkraftwagens kann klein bei der Tauchschwingung durchaus 10 cm bedeuten, wenn erst dann Gummipuffer als Anschläge wirksam werden. *Zeitinvariant* sind die Bewegungsgleichungen deshalb, weil Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften sich im zeitlichen Verlauf nicht verändern. Zeitabhängig ist nur der Vektor $\tilde{\boldsymbol{u}}$, der die N Verschiebungs- und Verdrehungsfreiheitsgrade enthält, sowie der Vektor $\tilde{\boldsymbol{p}}$ der zeitabhängigen äußeren Kräfte.

Derartige *diskrete Systeme*, d.h. aus einzelnen starren Körpern bestehende Systeme, werden im **ersten Band** behandelt.
Die beiden ersten Kapitel

Kapitel 1: Das System von einem Freiheitsgrad,
Kapitel 2: Die Bewegungsgleichungen für Systeme von zwei und mehr Freiheitsgraden,

enthalten den üblichen Lehrstoff der Schwingungslehre. Bei der Modellbildung und der Behandlung von freien und erzwungenen Schwingungen wurde von einfachen technischen Systemen ausgegangen. Besonders Kap.1 ist stark phänonenologisch orientiert, was – hoffentlich – das Lernen leichter macht. Stärker als in anderen Büchern über lineare Schwingungssysteme üblich, werden allerdings bereits in Kap.1 und dann wieder in Kap.3 Selbsterregungsmechanismen betont. Sie spielen in der Rotordynamik, in der Fahrzeugdynamik und in der Aeroelastik eine große Rolle.

Fragen, die bei der Lösung der Bewegungsgleichungen von Mehr-Freiheitsgradsystemen auftreten, werden in den anschließenden Kap.3 bis 5 behandelt:

Kapitel 3: Freie und erzwungene Schwingungen von Zwei- und Mehr-Freiheitsgradsystemen – Behandlung als gekoppeltes System;
Kapitel 4: Die modale Analyse bei ungedämpften Strukturen und bei Strukturen mit Proportionaldämpfung;
Kapitel 5: Die modale Analyse bei Systemen mit starker Dämpfung oder Neigung zur Selbsterregung.

Während in Kap. 3 das System von Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung

$$\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{u}}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{u}}^{\cdot}+\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{u}}=\tilde{\boldsymbol{p}}$$

als *gekoppeltes System* gelöst wird, wird in Kap.4 und 5 gezeigt, daß sich das System von gekoppelten Bewegungsdifferentialgleichungen durch *modale* Behandlung in entkoppelte Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung zerlegen läßt. Der Grad der Formalisierung nimmt hierbei zwangsläufig zu. Die Anschauung bleibt dabei aber nicht unbedingt auf der Strecke. Insbesondere das Verhalten von ungedämpften oder proportional gedämpften Strukturen wird durch die formale Zerlegung, die eine Rückführung auf die Schwinger von einem Freiheitsgrad bedeutet, physikalisch erst transparent. Die modale Zerlegung erlaubt es auch in sehr eleganter Weise, die *Empfindlichkeit linearer Systeme gegen Parameteränderungen* zu untersuchen.

In den ersten Kapiteln von Band I werden die Bewegungsdifferentialgleichungen durchwegs „von Hand" aufgestellt. Bei Systemen von vielen Freiheitsgraden ist diese Vorgehensweise außerordentlich mühsam und zudem sehr fehleranfällig. In den letzten zehn Jahren wurden daher für die Aufgaben der Satelliten- und Fahrzeugdynamik Algorithmen entwickelt, bei denen nicht nur das Lösen, sondern bereits das Aufstellen der Bewegungsgleichungen dem Rechner aufgebürdet wird. Eine Möglichkeit, die sehr stark an dem in der Methode der finiten Elemente üblichen elementweisen Vorgehen orientiert ist, wird im folgenden Kap.6 vorgestellt:

Kapitel 6: Algorithmus zum formalisierten Aufstellen der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen.

Ein kleines Programm auf der Grundlage dieses Algorithmus ist im Anhang abgedruckt. Das anschließende

Kapitel 7: Die Elementmatrizen von Rotoren, Gyrostaten, vorgespannten Federn und die Behandlung von Zwangsbedingungen.

gestattet es, den in Kap.6 angegebenen Algorithmus auch für diese Fälle zu erweitern und zu ergänzen.

Die meisten praktischen, strukturdynamischen Rechnungen erfordern den Einsatz eines Computers. In dem sehr knapp gefaßten Kap.8 sind daher zu den wichtigsten Aufgaben strukturdynamischer Berechnungen einige Gesichtspunkte zusammengestellt, die es zu beachten gilt, wenn man den Rechner für die Lösung dieser Aufgaben heranzieht.

Wir haben uns bemüht, auch komplizierte Sachverhalte so einfach und übersichtlich wie möglich darzustellen. Dem Denken vieler Ingenieure wird das Prinzip, theoretische Grundlagen im Zusammenhang mit der Behandlung einer konkreten Frage darzustellen, entgegenkommen. Andererseits macht es das Nachschlagen schwer. Deshalb haben wir komplizierte Berechnungsgänge, die sich in der textlichen Darstellung über mehrere Seiten hinziehen, in Ablaufdiagrammen zusammengefaßt. Auch das Schlagwortregister versuchten wir nicht zu knapp zu halten.

Sicherheit im Umgang mit Problemen der Strukturdynamik ist aber nur durch Eigenaktivität zu erlangen. Deshalb befindet sich am Schluß der ersten sieben Kapitel jeweils eine kleine Sammlung von Übungsaufgaben, die Einzelaspekte vertiefen oder den Blick auf weiterführende Fragestellungen lenken. Die – hoffentlich richtigen – Lösungen zu den meisten dieser Aufgaben finden sich in Kap.9.

Im **zweiten Band** verlassen wir die Mehrkörpersysteme und wenden uns kontinuierlichen, elastischen Strukturen zu, wie dem skizzierten Eisenbahnfahrzeug. Zwar liegen auch hier die *Starrkörpereigenformen* Tauchen und Nicken des Wagenkasten sehr niedrig, etwa zwischen 0,8 und 1,5 Hz, aber schon bei 7 oder 8 Hz tritt die skizzierte erste *elastische Biegeeigenform* der Zelle auf, die bei einer Komfortuntersuchung berücksichtigt werden muß.

Bei dem System „Reisezugwagen“ (Bild 0.2) liegt es daher nahe, für die Schwingungsberechnungen ein *Kontinuumsmodell* anzusetzen, bei dem die Eigenschaften *Masse* und *Steifigkeit* nicht mehr aufgetrennt werden, wie bei den Mehrkörpersystemen. Allerdings ist ein derartiger Reisezugwagen ein schon recht kompliziertes elastisches Kontinuum, weil Fenster- und Türausschnitte nicht vernachlässigt werden dürfen. Mit einigen Idealisierungstricks gelingt es aber

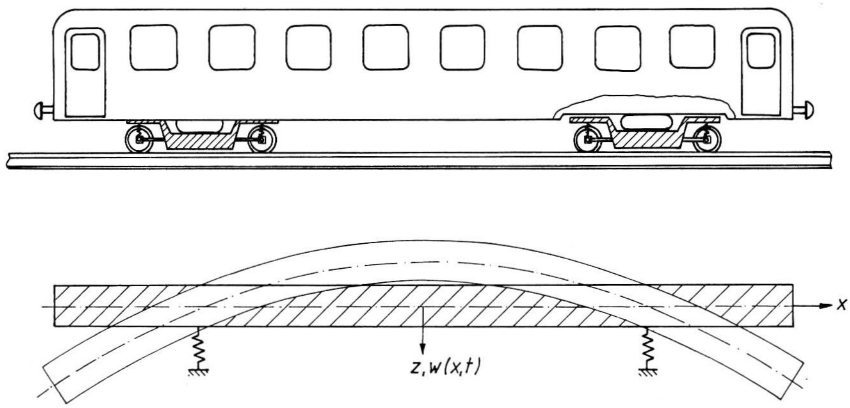


Bild 0.2. Kontinuierlicher Ersatzbalken als Modell für das Schwingungsverhalten eines Reisezugwagens

noch, die durch Ausschnitte bedingte Steifigkeitsminderung zu „verschmieren“. Ein schubelastischer Balken erweist sich dann – zumindest für die Untersuchung des Vertikalschwingungsverhaltens in dem für Komfortuntersuchungen interessierenden Frequenzbereich – als ein recht brauchbares Kontinuumsmodell.

Das Bewegungsverhalten aller kontinuierlichen Gebilde wird durch *partielle Bewegungsdifferentialgleichungen* beschrieben, also beispielsweise bei einem schubstarren Biegebalken der Biegefestigkeit EI, der Massebelegung μ, der Querverschiebung w und der Belastung p durch die Gleichung

$$EI\tilde{w}'''' + \mu\ddot{\tilde{w}} = \tilde{p}.$$

Die Verschiebung $\tilde{w} = w(x,t)$ hängt ebenso wie die Belastung $\tilde{p}$ sowohl vom Ort x als auch von der Zeit t ab. Die Ableitungen nach dem Ort sind durch $'$, die nach der Zeit durch $\dot{}$ angedeutet.

Geschlossene, analytische Lösungen der partiellen Differentialgleichungen von schwingenden Balken, Platten, Schalen usw. lassen sich nur in ganz wenigen Fällen angeben. Eine Voraussetzung hierfür ist, daß Steifigkeit und Massebelegung ortsunabhängig sind. Trotzdem sind derartige analytische Lösungen von Interesse, weil sich an ihnen prinzipielle Systemeigenschaften sehr leicht studieren lassen.

Will man die in Bild 0.2 skizzierte Zelle des Reisezugwagens genauer untersuchen, etwa weil Torsionseigenschwingungen berücksichtigt werden müssen oder weil man sich im Hinblick auf akustische Untersuchungen für die Eigenschwingungen von Teilstrukturen interessiert, dann gelingt es bei aller Idealisierungskunst nicht mehr, die Zelle des Reisezugwagens durch ein homogenes Balkenkontinuum abzubilden. Hier helfen die in den letzten 30 Jahren entwickelten, computerorientierten Verfahren weiter, wie das *Verfahren der Übertragungsmatrizen* oder die *Methode der finiten Elemente*.

Beiden Vorgehensweisen ist gemeinsam, daß die Gesamtstruktur zunächst in *Elemente* oder *Abschnitte* zerlegt wird, die sich wesentlich einfacher behandeln lassen als die Gesamtstruktur. Unter Berücksichtigung der Zusammenhangsbe-

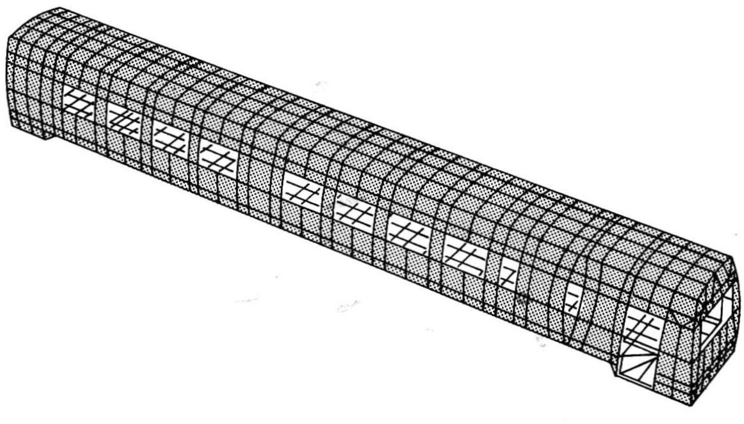


Bild 0.3. Finite-Element-Modell für den Wagenkasten eines Reisezugwagens (Werkbild DÜWAG, nach [0.13])

dingungen an den Elementgrenzen wird dann ein Gleichungssystem für das Gesamtsystem aufgebaut.

Ein Beispiel für ein mechanisches Modell, das aus finiten Elementen zusammengesetzt ist, zeigt Bild 0.3. Die Fahrzeugzelle wurde hier aus 1 008 Viereck- und 45 Dreieckelementen, sowie 312 Stabelementen aufgebaut. Das Verhalten des Systems wird dann durch mehr als 6 000 Freiheitsgrade beschrieben.

Typisch für die Methode der finiten Elemente ist, daß aus den partiellen Differentialgleichungen letztlich wiederum ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem vom Typ

$$\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{u}}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{u}}^{\cdot}+\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{u}}=\tilde{\boldsymbol{p}}$$

entsteht. Es wird also auch hier wieder *diskretisiert* – aber auf formal mathematischem Weg mit Hilfe von Ansatzfunktionen und nicht durch „scharfes Hinsehen", wie bei den Mehrkörpersystemen. Da die Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme von Band I her vertraut sind, braucht im Band II auf sie nicht weiter eingegangen zu werden.

Die Zahl der Freiheitsgrade kann bei komplizierten Strukturen, wie der Zelle des Eisenbahnfahrzeugs, sehr groß werden. Deshalb wird im Band II auf die Möglichkeiten zur *Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade* und auf *Substrukturtechniken* und die Methode der *modalen Synthese* eingegangen.

Eine ganze Reihe von Büchern waren uns bei der Abfassung der vorliegenden Strukturdynamik hilfreich: Die Bücher von Den Hartog [0.3] und Magnus [0.4] wegen ihrer anschaulichen phänomenologischen Darstellung von Schwingungsvorgängen und die Bücher von Meirovitch [0.5] und Fischer-Stephan [0.6] bei der methodischen Einordnung von Problemen der Dynamik in die analytische Mechanik. Das Buch von Müller-Schiehlen [0.7] zogen wir gerne bei Fragen der formalen mathematischen Beschreibung mit Hilfe des Matrizenkalküls heran. Erwähnen wollen wir auch noch die Bücher [0.8 – 0.12]. Dank gebührt auch unserem Lehrmeister und Kollegen E. Giencke, der – aus der Marguerreschen Schule kommend – in seinen Vorlesungen und Arbeiten immer wieder den Vorteil der Formulierung der Bewegungsgleichungen über das Prinzip der virtuellen Verrückung betonte.

Ohne die Mithilfe von vielen Seiten wäre der erste Band der Strukturdynamik wohl nie fertig geworden. Von unseren früheren und derzeitigen wissenschaftlichen Mitarbeitern haben uns vor allem die Herren Dipl.-Ing. D. Bosin, Dr.-Ing. J. Drechsler, Dipl.-Ing. R. de Silva, Dipl.-Ing. P. Gnielka, Dipl.-Ing. Th. Jainski, Dr.-Ing. W. Kik, Dipl.-Ing. D. Moelle, Dipl.-Ing. A. Groß-Thebing, Dipl.-Ing. M. Person und Herr Dipl.-Ing. L. Mauer (MAN-Neue Technologie) unterstützt, die uns zu einzelnen Kapiteln Gesprächspartner waren. Ihnen verdanken wir viele Anregungen und Verbesserungsvorschläge.

Herr Dipl.-Ing. M. aus der Fünten und Herr Dipl.-Ing. B. Ripke haben das Programm für den Mehrkörperalgorithmus verfaßt, daß sich in Kap.10 findet. Als studentische Hilfskräfte haben die Herren Dipl.-Ing. N. Balteas, G. Blech und J. Giakoumis bei der Erarbeitung der Übungsaufgaben mitgewirkt.

Besonderer Dank gebührt der Schreibstube, den Damen U. Dahners, E. Schemmerling und Chr. Balder, die mit unendlicher Geduld die immer wieder

überarbeiteten Manuskripte mit dem schwierigen Formelsatz schrieben und korrigierten. Mit großem Elan hat Frau K. Peter von unserem Zeichenbüro die vielen Zeichnungen und Diagramme angefertigt und gemäß den Verlagsrichtlinien vereinheitlicht.

Unserem Kollegen H. Pfützner und unserem früheren Mitarbeiter Herr Dipl.-Ing. D. Moelle, die in den letzten Wochen vor der Drucklegung noch viele redaktionelle Verbesserungen vorschlugen und zahllose Fehler „fischten", sei für ihre Hilfe herzlich gedankt. Den Mitarbeitern des Springer-Verlages und der Springer Produktions-Gesellschaft, und hier insbesondere Frau B. Münch, danken wir für die gute Zusammenarbeit.

1 Das System von einem Freiheitsgrad

1.0 Vorbemerkung

Viele technische Systeme sind Schwinger von einem Freiheitsgrad. Auch recht komplizierte Strukturen lassen sich oft auf Systeme von einem Freiheitsgrad zurückführen, wenn Symmetrien ausgenutzt werden. Darüber hinaus besteht die Bedeutung des Ein-Freiheitsgradsystems darin, daß an ihm alle wesentlichen Phänomene des Eigenverhaltens linearer Systeme erläutert werden können (Abschn.1.2). Noch wichtiger wird das Ein-Freiheitsgradsystem schließlich dadurch, daß sich Schwinger von n Freiheitsgraden immer auf n Schwinger von einem Freiheitsgrad zurückführen lassen. Ein Schwingungssystem mag noch so kompliziert sein, es mag stark gedämpft, schwach gedämpft oder angefacht sein, die modale oder bimodale Zerlegung (Kap.4 und 5) erlaubt den Übergang zum System von einem Freiheitsgrad.

1.1 Kleine Phänomenologie linearer Schwinger von einem Freiheitsgrad

In diesem Abschnitt werden anhand von Beispielen die wichtigsten Erscheinungen beschrieben, die an Schwingern von einem Freiheitsgrad auftreten können. Zunächst werden an fünf Beispielen die *freien Schwingungen* und ihre Ursachen diskutiert und die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Dann werden an drei weiteren Beispielen *erzwungene Schwingungen* und ihr Erregungsmechanismus erläutert. Die Lösung der Bewegungsgleichungen bleibt den nachfolgenden Abschnitten vorbehalten.

1.1.1 Beispiele für freie Schwingungen

Beispiel 1. Freie ungedämpfte Schwingungen eines Pendels infolge einer Anfangsauslenkung

An jedem Hebezeug (Bild 1.1) ist zu beobachten, wie die Last nach kurzem Anheben auspendelt, wenn der Kranhaken, ehe er eingehängt wurde, nicht senkrecht über der Last schwebte. Die Last führt kleine Schwingungen aus, die nur ganz langsam abklingen.

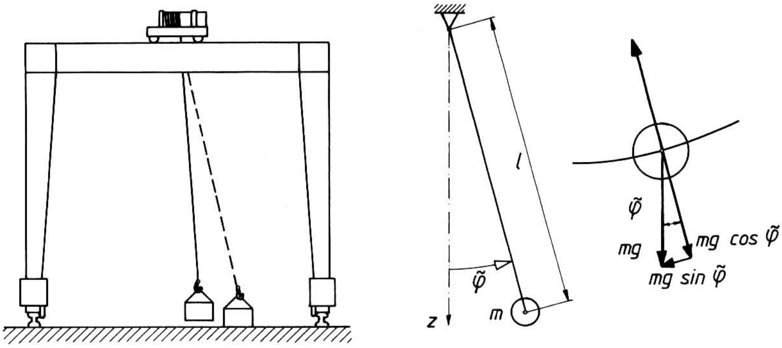


Bild 1.1. Pendelschwingungen

Die Bewegungsgleichung, die diesen Vorgang beschreibt, läßt sich mit Hilfe des (2.) Newtonschen Gesetzes aufstellen, nach dem die angreifende Kraft gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung ist:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung.}$$

Zählt man den Winkel $\tilde{\varphi}$ [1] in der in Bild 1.1 angegebenen Weise, so wirkt auf die Masse als Folge des Gewichtes mg in der zu $\tilde{\varphi}$ entgegengesetzten Richtung die Rückstellkraft $mg \sin \tilde{\varphi}$. Die Bogenlänge zum Winkel $\tilde{\varphi}$ ist $l\tilde{\varphi}$, die Beschleunigung beträgt dann $l\tilde{\varphi}^{\cdot\cdot}$. Aus dem Newtonschen Gesetz erhält man daher die *Bewegungsgleichung*

$$ml\tilde{\varphi}^{\cdot\cdot} = -mg \sin \tilde{\varphi}$$

oder

$$ml\tilde{\varphi}^{\cdot\cdot} + mg \sin \tilde{\varphi} = 0. \tag{1.1}$$

Zusätzlich zur Differentialgleichung müssen *Anfangsbedingungen* formuliert werden. Beim Beispiel von Bild 1.1 gilt für die Anfangslage zur Zeit $t=0$

$$\tilde{\varphi}(t=0) = \varphi_0.$$

Eine Anfangsgeschwindigkeit existiert nicht,

$$\tilde{\varphi}^{\cdot}(t=0) = \varphi_0^{\cdot} = 0.$$

Aus der Bewegungsgleichung (1.1) und den zugehörigen Anfangsbedingungen läßt sich eine Lösung gewinnen, die die freien Schwingungen des Pendels beschreibt. Solange man sich nur für *kleine Schwingungen* interessiert, läßt sich

1 Das Symbol $\tilde{}$ bei $\tilde{\varphi}$ kennzeichnet den zeitlich veränderlichen Winkel, d.h. $\tilde{\varphi} = \varphi(t)$. Diese Bezeichnung wurde gewählt, damit nach Einführung eines Zeitansatzes, z.B. $\tilde{\varphi} = \varphi \sin \omega t$, für die Amplitude φ kein eigener Buchstabe oder zusätzlicher Index erforderlich ist. Für Zeitableitungen wird $d\varphi(t)/dt = \tilde{\varphi}^{\cdot}$ geschrieben.